2ο ΓΕΛ Ηρακλείου Αττικής

ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΡΙΩΝ ΤΗΣ Β΄ΘΕΤΙΚΗΣ

ΓΩΝΙΑΝΑΚΗ ΚΑΛΛΙΟΠΗΣ & ΣΠΑΧΙΟΥ ΛΑΟΥΡΑΣ

ΤΟ ΔΗΛΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ. ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΗΣ ΛΥΣΗΣ ΤΟΥ ΜΕΝΑΙΧΜΟΥ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΟΤΕΡΑ ΤΗΣ ΣΥΜΒΟΛΗΣ ΤΟΥ ΣΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΩΝ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ

1. Το Δήλιο πρόβλημα

☹.Το δήλιο πρόβλημα ή ο διπλασιασμός του κύβου απασχόλησε τους αρχαίους Έλληνες γεωμέτρες και η αναζήτηση λύσεων, οδήγησε σε μια έντονη ανάπτυξη της Γεωμετρίας.

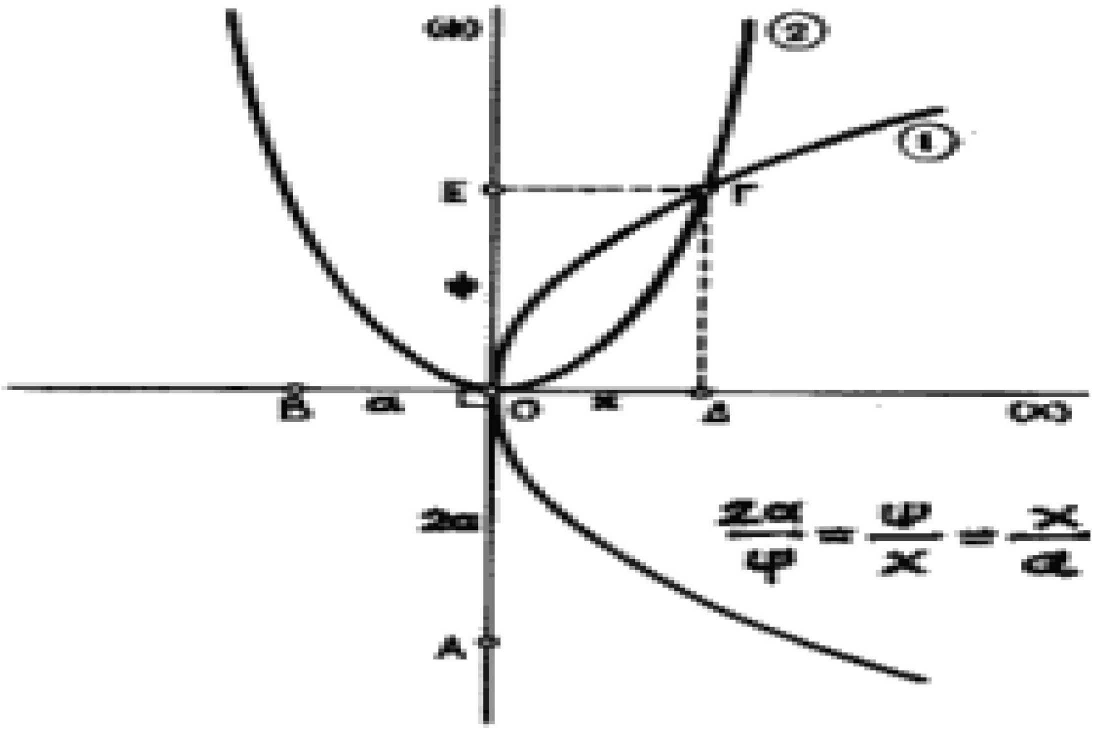
Το δήλιο πρόβλημα απόκτησε δημοσιότητα όταν το ανέφερε, σε μια τραγωδία ο βασιλιάς της Κρήτης Μίνως διαμαρτυρόμενος γιατί το κενοτάφιο, που προοριζόταν για το γυιό του Γλαύκο, ήταν πολύ μικρό για βασιλικό μνημείο και απαιτούσε το διπλασιασμό του όγκου του χωρίς να αλλάξει το κυβικό του σχήμα. Πανελλήνια γνωστό όμως έγινε το πρόβλημα αυτό όταν αναφέρθηκε από το μαντείο του Δήλιου Απόλλωνα, όταν δηλαδή ρωτήθηκε το μαντείο, τι πρέπει να κάνουν για να απαλλαγούν από το λοιμό που μάστιζε το νησί Δήλο, απάντησε ότι τούτο θα συμβεί αν διπλασιάσουν τον κυβικό βωμό του Απόλλωνα. Έτσι το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου πέρασε στην ιστορία με το όνομα "Δήλιο πρόβλημα".

Οι λύσεις που δόθηκαν στο πρόβλημα, κατά την ελληνική αρχαιότητα, σώθηκαν και φθάσανε σε μάς από τον σχολιαστή των έργων του Αρχιμήδη Ευτόκιο (6 αι. μ.χ). Αυτός σχολιάζοντας ανάλογο πρόβλημα του Αρχιμήδη και τη μέθοδο που αυτός χρησιμοποίησε για να το λύσει, δίνει όλες τις λύσεις παρεμβολής που του ήταν τότε γνωστές από παλαιότερες συγγραφές. Οι λύσεις που δίνει είναι 12 και η αρχαιότερη είναι του Αρχύτα. Οι κυριότερες από τις γνωστές λύσεις προέρχονται από τους :

- **Ο Ιπποκράτης ο Χίος** (470-400 π.χ)
- **Ο Αρχύτας ο Ταραντίνος** (428-365 π.χ)
- **Ο Πλάτων** (427-347 π.χ)
- **Ο Μέναιχμος** (375- π.χ)
- **Ο Αρχιμήδης** (287-212 π.χ)
- **Ο Ερατοσθένης** (276-194 π.χ)

- **<u>Ο Απολλώνιος</u>** (265-170 π.χ)
- **<u>Ο Νικομήδης</u>** (έζησε γύρω στο 200 π.χ)
- **<u>Ο Ήρων ο Αλεξανδρινός</u>** (1ος -2ος αι. μ.χ)
- **<u>Ο Διοκλής</u>** (1ος αι. π.χ)
- **<u>Ο Πάππος ο Αλεξανδρινός</u>** (3ος αι. μ.χ)

ΜΕΝΑΙΧΜΟΣ ο ΠΡΟΚΟΝΝΗΣΙΟΣ



Η λύση του Δήλιου Προβλήματος από τον Μέναιχμο, με τη βοήθεια δύο παραβολών.

Γεννήθηκε γύρω στο 375 π.Χ. στην Αλωπεκόννησο ή Προκόννησο της Προποντίδας

- Μαθητής του Ευδόξου, μάλλον από τη σχολή της Κυζίκου, τον ακολούθησε στην Αθήνα, στην οποία μαθήτευσε στην Ακαδημία του Πλάτωνα. Αργότερα εξελίχθηκε σε έναν από τους σημαντικότερους καθηγητές της.
- Η προσφορά του στη Γεωμετρία :

.Η προσφορά του στη γεωμετρία βρίσκεται κυρίως στο ότι ανακάλυψε τις τρεις **κωνικές**

τομές (παραβολή, έλλειψη, υπερβολή). Η αρχική ονομασία των καμπύλων ήταν **"Μεναίχμιος τριάς"** προς τιμή του (Ερατοσθένης). Ο Ευκλείδης τις καμπύλες αυτές τις γνωρίζει ως τομές κώνου με επίπεδο. Ο Μέναιχμος τις καμπύλες του τις κατασκεύαζε σημείο προς σημείο. Οι ίδιες καμπύλες με συνεχή κίνηση πιστεύεται ότι κατασκευάστηκαν για πρώτη φορά από τον **Ισίδωρο τον Μιλήσιο** (6ο αι. μ.Χ.), τον έναν από τους αρχιτέκτονες της Αγίας Σοφίας.

.Δεύτερη κορυφαία γεωμετρική προσφορά του Μέναιχμου υπήρξε η λύση του **Δηλίου προβλήματος**, με τη βοήθεια των κωνικών τομών. Μάλιστα έδωσε δύο λύσεις, τις οποίες διέσωσε ο Εύτοκος, μαθητής του Ισίδωρου. Δεν γνωρίζουμε αν η μελέτη του Δηλίου προβλήματος τον οδήγησε στις κωνικές ή αντίστροφα, πάντως είναι βέβαιο ότι οι λύσεις του στηρί-χτηκαν στην αναγωγή που έκανε για το πρόβλημα ο Ιπποκράτης ο Χίος.

.Κορυφαίος καθηγητής της Ακαδημίας ήταν και ο αδελφός του **Δεινόστρατος**, για τον οποίο αναφέρεται ότι επιχειρούσε να τετραγωνίσει τον κύκλο στηριγμένος σε μία καμπύλη του **Ιππία του Ηλίου** (περί το 430 π.Χ.), η οποία επίσης κατασκευαζόταν σημείο προς σημείο. Η χρήση αυτή της καμπύλης της έδωσε το όνομα **Τετραγωνίζουσα** του Ιππία, αν και εκείνος την επινόησε με στόχο του την τριχοτόμηση γωνίας.

.Τις τρεις καμπύλες της "Μεναιχμίου Τριάδος" επισταμένα μελέτησε ο **Αρισταίος ο Πρεσβύτερος** (περί το 320 π.Χ.), ο οποίος και ανακάλυψε ότι αυτές είναι τομές κώνου. Από τον Πάππο αναφέρεται ότι ο Αρισταίος παρουσίασε μεθοδικά τη σχετική θεωρία στο έργο του **"Περί Κωνικών Τομών"**.

Οι αρχαίοι Έλληνες, στην προσπάθειά τους να επιλύσουν το Δήλιο πρόβλημα, ανακάλυψαν μεθόδους, έτσι, ώστε να κατασκευάζουν δύο μέσους αναλόγους μεταξύ δύο τμημάτων.

Οι δύο μέσοι ανάλογοι παρίσταναν τις ακμές δύο κύβων, όπου ο πρώτος έχει όγκο ίσο με το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, που έχει βάση τετράγωνο πλευράς όσο το πρώτο τμήμα και ύψος όσο το δεύτερο τμήμα, ενώ ο δεύτερος έχει όγκο ίσο με το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, που έχει βάση τετράγωνο πλευράς όσο το δεύτερο τμήμα και ύψος όσο το πρώτο τμήμα.

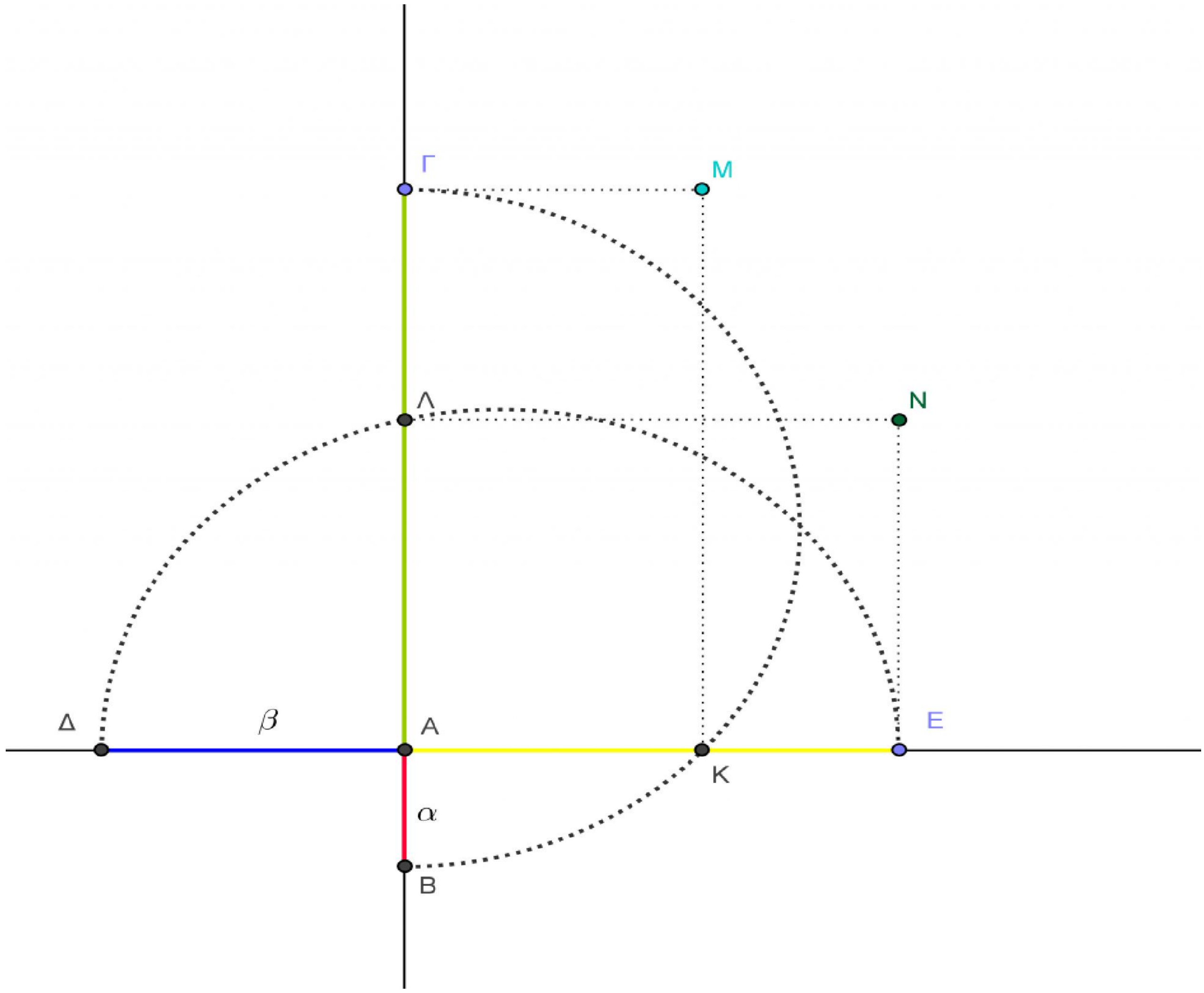
Με σύγχρονη ορολογία, αυτό σημαίνει ότι, αν α και β είναι δεδομένα τμήματα, τότε, μπορούσαν να κατασκευαστούν, όχι, όμως, με χρήση, αποκλειστικά, κανόνα και διαβήτη, κ, λ, τέτοια, ώστε,

$$\frac{\alpha}{\kappa}=\frac{\kappa}{\lambda}=\frac{\lambda}{\beta},$$

απ’ όπου έπεται ότι,

$$\kappa^3 = \alpha^2\beta \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \lambda^3 = \alpha\beta^2.$$

Όπως απέδειξε ο Μέναιχμος, θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν, για τον σκοπό αυτό, μια παραβολή και μια υπερβολή ή, εναλλακτικά, δύο παραβολές.



Ο Πέρσης φιλόσοφος, μαθηματικός, αστρονόμος και ποιητής Ομάρ Καγιάμ (1048–1131), αναγνώρισε, στις μεθόδους του Μέναιχμου, τη στρατηγική με την οποία θα μπορούσαν να αξιοποιηθούν, γενικότερα, οι κωνικές τομές στην επίλυση εξισώσεων τρίτου βαθμού. Στο βιβλίο του «Πραγματεία στην Απόδειξη Προβλημάτων Άλγεβρας», επιλύονται 19 τύποι εξισώσεων τρίτου βαθμού, με τρόπους που προϊκονομούν τη γέννηση της Αναλυτικής Γεωμετρίας.

Η «εξίσωση» ενός χρησμού

Η αρχή της ιστορίας των εξισώσεων τρίτου βαθμού βρίσκεται στην καρδιά του φημισμένου προβλήματος των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών του Δηλιου προβλήματος.

Το Δήλιο πρόβλημα, ή, αλλιώς, ο «διπλασιασμός» του κύβου, όπως ήδη έχουμε αναφέρει αφορά την κατασκευή ενός κύβου με διπλάσιο όγκο από ένα δεδομένο κύβο, και ήταν ένα γεωμετρικό πρόβλημα με, κάπως, ασαφή και μυστηριώδη προέλευση. Σύμφωνα με την εκδοχή που έδωσε ο μαθηματικός, φιλόσοφος και σχολιαστής των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών Θέων ο Σμυρναίος (τέλος 1ου – αρχές 2ου αιώνα μ.Χ.), τέθηκε διά μέσου ενός χρησμού.

Το 430 π.Χ., περίπου, ο θεός Απόλλωνας διαμηνούσε στους κατοίκους της Δήλου, σύμφωνα με τον χρησμό, ότι για να απαλλαγούν από τον λοιμό, που μάστιζε την πόλη τους, θα έπρεπε να «διπλασιάσουν» τον κυβικό βωμό του στο νησί.

Οι κάτοικοι, λόγω των δυσκολιών που συνάντησαν στην προσπάθειά τους να ικανοποιήσουν το αίτημα του θεού, ζήτησαν τη βοήθεια του Πλάτωνα. Ο Πλάτωνας τούς επισήμανε ότι ο θεός ήθελε, περισσότερο από το να «διπλασιαστεί» ο βωμός του ναού του, να τους δώσει, μ’ αυτόν τον τρόπο, ένα μάθημα για την παραμέληση των Μαθηματικών και, ιδιαίτερα, για την περιφρόνηση της Γεωμετρίας.

Ωστόσο, είναι πιθανό το πρόβλημα να ήταν γνωστό νωρίτερα. Για την επίλυσή του, αρκεί, φυσικά, να κατασκευαζόταν η ακμή του ζητούμενου κύβου, δηλαδή, με σημερινό συμβολισμό, η λύση της τριτοβάθμιας εξίσωσης,

$$x^3 = 2\alpha^3,$$

όπου α παριστάνει την ακμή του δεδομένου κύβου.

Όμως, η παραπάνω αλγεβρική έκφραση του προβλήματος είναι μεταγενέστερη. Οι προσπάθειες επίλυσής του, από τους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς, πραγματοποιήθηκαν μέσα στο γεωμετρικό πλαίσιο της εποχής το οποίο, τελικά, εμπλούτισαν με νέες καμπύλες και ιδιοφυείς – ακόμη και τριών διαστάσεων – μηχανικές κατασκευές.

Αναζητήθηκε, επισταμένα, κατασκευή με κανόνα και διαβήτη, χωρίς, φυσικά, επιτυχία, αφού, όπως απέδειξε το 1837 ο Γάλλος μαθηματικός Pierre Wantzel, κάτι τέτοιο είναι αδύνατο.

Ο Ιπποκράτης ο Χίος (περίπου 470 – 410 π.Χ.) ανήγαγε το πρόβλημα στην εύρεση δύο μέσων αναλόγων μεταξύ του τμήματος της ακμής του δεδομένου κύβου και του διπλάσιου αυτού του τμήματος. Με σύγχρονη ορολογία, αυτό σημαίνει να βρεθούν κ, λ, τέτοια, ώστε,

$$\frac{\alpha}{\kappa} = \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\lambda}{2\alpha}.$$

Το κ είναι η ζητούμενη ακμή, διότι, συνδυάζοντας, κατάλληλα, τις τελευταίες ισότητες, προκύπτει ότι,

$$\kappa^3 = 2\alpha^3.$$

Δεν είναι σίγουρο τι οδήγησε τον Ιπποκράτη σ' αυτήν τη διαπίστωση. Μοιάζει, όμως, λογικό να υποτεθεί ότι γνώριζε το πρόβλημα «διπλασιασμού» του τετραγώνου. Διότι ο «διπλασιαμός» του τετραγώνου ισοδυναμεί με το πρόβλημα εύρεσης του μέσου αναλόγου μεταξύ του τμήματος της πλευράς του τετραγώνου και του διπλάσιου αυτού του τμήματος. Παρεμπιπτόντως, το τετράγωνο με πλευρά τη διαγώνιο ενός δεδομένου τετραγώνου έχει διπλάσιο εμβαδό από το δεδομένο τετράγωνο.

Ακολουθεί μια προσπάθεια απόδοσης του συλλογισμού του Ιπποκράτη σε μια γλώσσα περισσότερο οικεία προς εκείνη την εποχή, μια γλώσσα γεωμετρική. Βέβαια, για λόγους συντομίας στην έκφραση και μόνο, διατηρούνται ορισμένοι αλγεβρικοί συμβολισμοί. Θεωρείται, επίσης, γνωστή η γεωμετρική κατασκευή του μέσου αναλόγου δύο ευθύγραμμων τμημάτων.

Το παραλληλεπίδο που σχηματίζουν δύο κύβοι ίσοι με τον δεδομένο κύβο, όταν τοποθετηθούν, έτσι, ώστε να ταυτίζονται δύο έδρες τους, έχει όγκο ίσο με τον όγκο κάθε παραλληλεπιπέδου το οποίο έχει εμβαδόν βάσης $2\alpha^2$ και ύψος α.

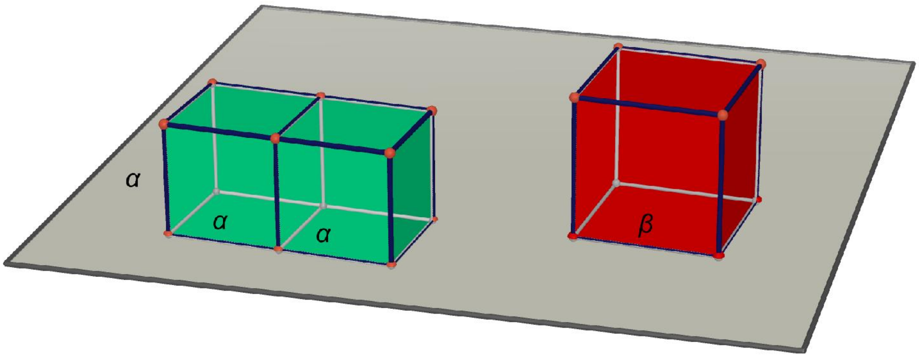
Συνεπώς, τα τμήματα λ και α είναι ανάλογα προς τα τμήματα 2α και κ. **(Συνθήκη 1)**.

(Βάσει αυτής της συνθήκης, άλλωστε, με χρήση όμοιων τριγώνων, κατασκευάστηκε το παραπάνω δυναμικό σχήμα.)

Επίσης, καθεμία από τις δύο διαστάσεις μπορεί να πάρει οποιαδήποτε θετική τιμή, επιλέγοντας, κατάλληλα, κάποιο «μέλος» της οικογένειας.

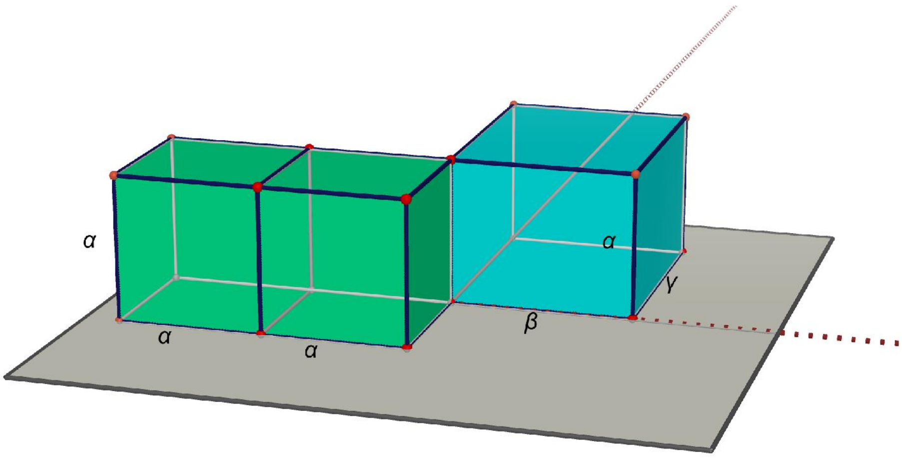
Κατά κάποιον τρόπο, στο «μπλε» παραλληλεπίπεδο, έχουν «απελευθερωθεί» το μήκος και το πλάτος του «πράσινου» παραλληλεπιπέδου, με μόνη δέσμευση αυτήν που απορρέει από τη Συνθήκη 1.

Αναλύοντας, λοιπόν, το πρόβλημα, ας υποτεθεί ότι η ζητούμενη ακμή, β, κατασκευάστηκε.



Φυσικά, ο κύβος ακμής β θα έχει ίσο όγκο και με καθένα από τα μέλη της προηγούμενης οικογένειας.

Προφανώς, κάποιο απ’ αυτά τα παραλληλεπίπεδα έχει μήκος β. Αν γ συμβολίζει το πλάτος του, τότε, κάθε πλαϊνή έδρα του έχει εμβαδό όσο το τετράγωνο πλευράς β.



Συνεπώς το β είναι μέσο ανάλογο των α και.γ

Απαιτείται, λοιπόν, το κ να είναι μέσο ανάλογο των α και λ. (**Συνθήκη 2**).

Εύκολα, αποδεικνύεται ότι το συμπέρασμα του Ιπποκράτη ισοδυναμεί με την ταυτόχρονη ισχύ των Συνθηκών 1 και 2.

Μπορούμε να ανακαλύψουμε τον έναν απ’ τους δύο τρόπους, που έδωσε ο Μέναιχμος (περίπου 380 π.Χ. – 320 π.Χ.), για την εύρεση των τιμών των κ και λ, χρησιμοποιώντας την τομή δύο νέων, για εκείνη την εποχή, καμπυλών: μιας παραβολής και μιας υπερβολής.

Ο Μέναιχμος έδωσε και δεύτερο τρόπο λύσης στο πρόβλημα, χρησιμοποιώντας, αυτή τη φορά, την τομή δύο παραβολών.

Πραγματικά, λόγω της <u>Συνθήκης 1,</u> τα τμήματα λ και α είναι ανάλογα προς τα τμήματα 2α και κ, ενώ, λόγω της <u>Συνθήκης 2</u>, τα τμήματα α και κ είναι ανάλογα προς τα τμήματα κ και λ . Επομένως, τα τμήματα λ και κ είναι ανάλογα προς τα τμήματα 2 α και λ.

Αυτό σημαίνει ότι το λ είναι μέσο ανάλογο των 2 α και κ. **(Συνθήκη 3.)**

<u>Ο δεύτερος τρόπος του Μέναιχμου συνθέτει τις Συνθήκες 2 και 3.</u>

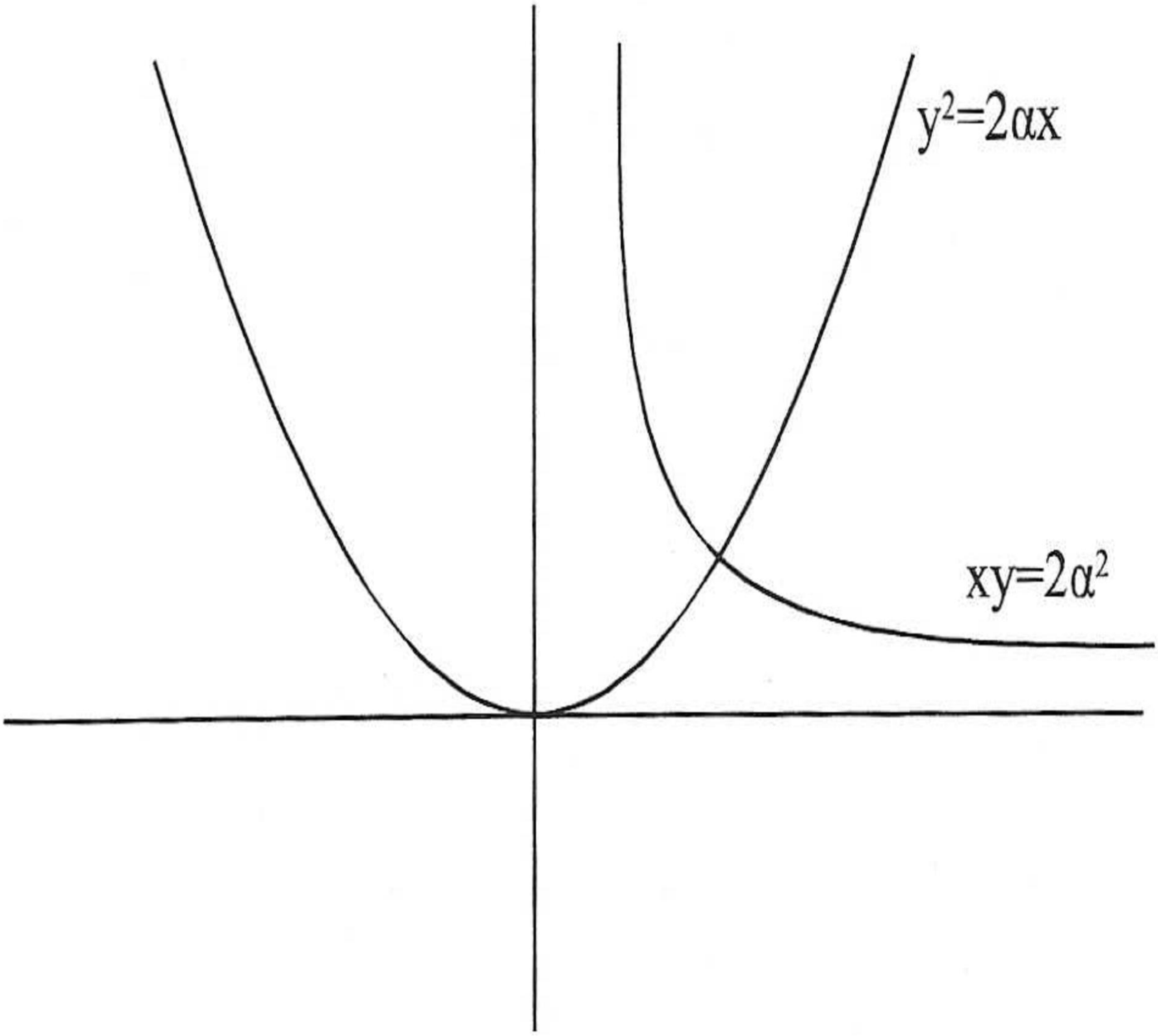
Άλλοι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί, ανάμεσά τους ο Αρχύτας, ο Απολλώνιος, ο Διοκλής, ο Ερατοσθένης, ο Εύδοξος κι ο Νικομήδης, έδωσαν διαφορετικές λύσεις στο πρόβλημα. Όλες αυτές οι μέθοδοι οδηγούν, τροπον τινά, στη γεωμετρική κατασκευή της λύσης μιας εξίσωσης τρίτου βαθμού.

Ας σημειωθεί, τέλος, ότι το πρόβλημα διερευνήθηκε και επιλύθηκε, από τους αρχαίους Έλληνες, σε μια γενικότερη μορφή, στην οποία, πάλι, αναζητούνταν δύο μέσοι ανάλογοι, όχι, όμως, μεταξύ ενός τμήματος και του διπλάσιου αυτού του τμήματος, αλλά μεταξύ δύο τμημάτων. Οι δύο μέσοι ανάλογοι παρίσταναν τις ακμές δύο κύβων, όπου ο πρώτος έχει όγκο ίσο με το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, που έχει βάση τετράγωνο πλευράς όσο το πρώτο τμήμα και ύψος όσο το δεύτερο τμήμα, ενώ ο δεύτερος έχει όγκο ίσο με το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, που έχει βάση τετράγωνο πλευράς όσο το δεύτερο τμήμα και ύψος όσο το πρώτο τμήμα.

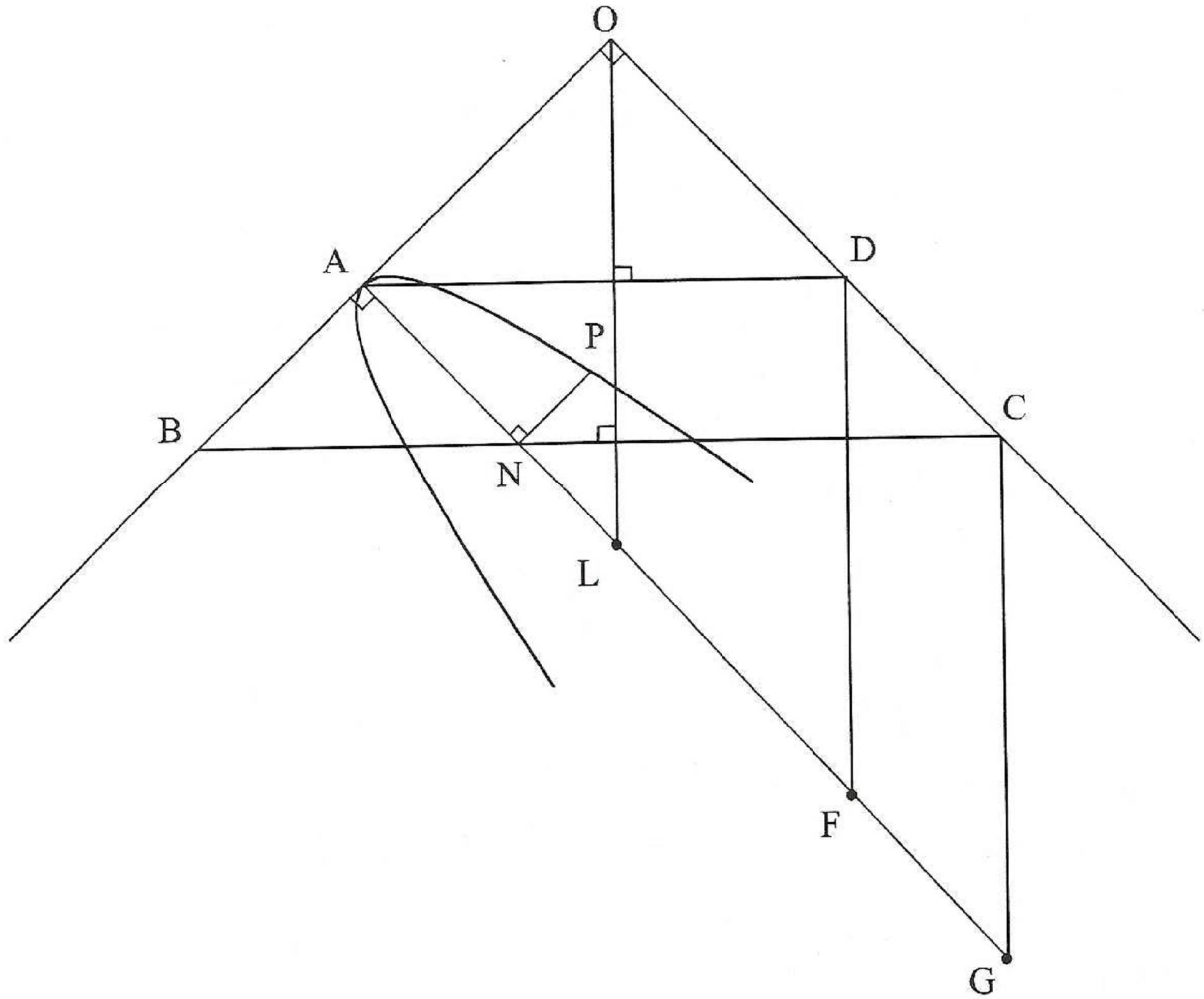
Ο Ιπποκράτης ο Χίος ανήγαγε το πρόβλημα αυτό σε ζήτημα κατασκευής μέσηςαναλόγου. Για την ακρίβεια ισχυρίστηκε πως αρκεί να ευρεθούν ευθύγραμμα τμήματα χ, ψ ώστε να ισχύει: (I) $α/χ=χ/ψ=ψ/2α$. Το ανωτέρω σύστημα δεν είναι δυνατόν να επιλυθεί με τη χρήση ευθείας και κύκλου, αλλά με την χρήση άλλων γεωμετρικών καμπυλών.

<u>Η λύση που δόθηκε από το Μέναιχμο το 350 π.Χ. περιγράφεται ως εξής:</u>

Από τη σχέση (I) προκύπτει ότι ψ2= 2αχ (II), και χψ=2α2. Άρα ψ=2α2/χ (III).Άρα οδηγούμαστε στην εύρεση του κοινού σημείου των καμπύλων (II), και (III), οι οποίες παριστάνουν μία παραβολή και μία υπερβολή αντίστοιχα.

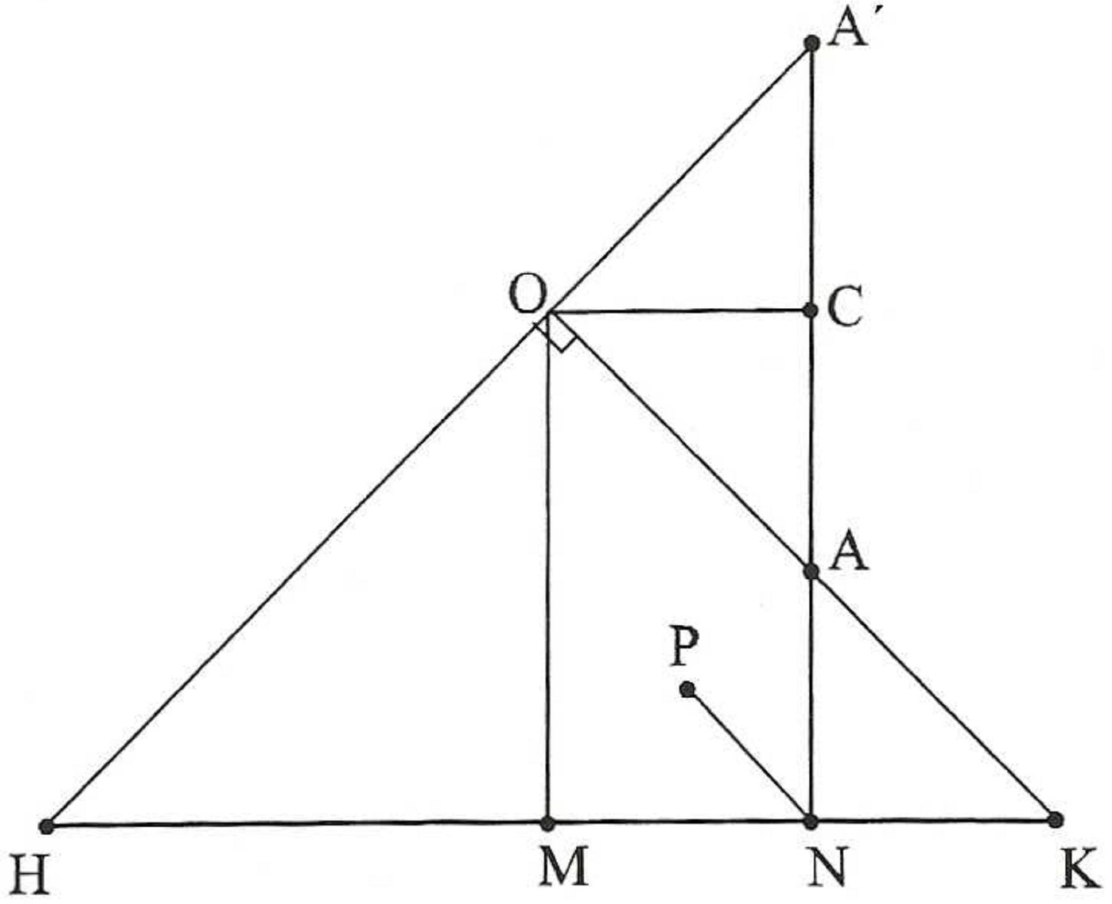


Είναι λοιπόν σαφές, ότι ο Μέναιχμος χρησιμοποιούσε στην επίλυση μαθηματικών θεμάτων τις κωνικές τομές χωρίς ωστόσο να γνωρίζουμε το πώς οδηγήθηκε να σκεφθεί τις καμπύλες αυτές ως τομές κώνου και επιπέδου. Κατά τον Heath, μία πιθανή πορεία που ακολούθησε ο Μέναιχμος ήταν να θεωρήσει κώνο με ορθή γωνία κορυφής και, για να δημιουργηθεί παραβολή, να τον τμήσει με επίπεδο κάθετο σε μία ακμή του. Εάν δε, το P είναι τυχόν σημείο της παραβολής, PN □ AG, BC □ OL, όπου με OL συμβολίζεται ο άξων του κώνου,τότε το P ευρίσκεται σε περιφέρεια κύκλου διαμέτρου BC, ο οποίος προκύπτει σαν τομή του κώνου με επίπεδο κάθετο στον άξονα OL.



Στη συνέχεια θεωρούμε AD//BC, και DF, CG παράλληλες της OL, όπου τα σημεία F, και G ανήκουν στην προέκταση της AL. Τότε η OL θα διχοτομεί τα ευθύγραμμα τμήματα AD, AF. Εάν PN=ψ, AN=χ, τότε ψ2=PN2=BN.NC (η γωνία BPC είναι ίση με μία ορθή, επειδή το τόξο BPC είναι ημιπεριφέρεια).Το τετράπλευρο BACG είναι εγγράψιμο, οπότε BN.NC= AN.NG= AN.AF (AN=DC επειδή το ANC π.Χ. περιγράφεται D είναι παραλληλόγραμμο, DC=FG επειδή το DCGF είναι παραλληλόγραμμο, άρα AN=FG, οπότε AN+NF=FG+NF, δηλαδή AF=NG)

Άρα BN.NC = AN.2AL, οπότε ψ2=2AL.χ, και το τμήμα 2AL είναι η παράμετρος. Σύμφωνα με τον Heath ο Μέναιχμος έκανε κάτι απλούστερο. Θεώρησε ορθογώνιο κώνο, τον οποίον έτμησε με επίπεδο παράλληλο προς τονάξονά του OM, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Ο ΗΟΚ είναι ο ορθογώνιος λοιπόν κώνος και το επίπεδο Α΄ΑΝ είναι Παράλληλο με το ΟΜ. Ο Μέναιχμος, θεώρησε σημείο P της καμπύλης και το ευθύγραμμο τμήμα PN ως την ¨κυρία¨ (ordinate). Έστω OC//HK. Τότε ισχύει PN2=HN.NK=(MN+HM).(MK-MN)=(MN+MK).(MKMN)=MK2 MN2=OM2CA2=CN2-CA2, γιατί MK=OM και MN=OC=CA, δηλαδή ψ2=CN2-CA2 . Αυτή η σχέση είναι ιδιότητα υπερβολής με άξονα Α΄Α. Στη συνέχεια ο Μέναιχμος αποδεικνύει την ιδιότητα της ασυμπτώτου, ως εξής:

Θεωρεί τα ευθύγραμμα τμήματα CR, CR΄, ως ασύμπτωτες οι οποίες σχηματίζουν μεταξύ τους ορθή γωνία, Α΄Α τον άξονα της υπερβολής, και P τυχόν σημείο του άξονα Α΄Α, με PN την ¨κυρία¨ (ordinate), PK$\perp$CR, και PK΄$\perp$CR΄. Προεκτείνει την PN και συμβολίζει με R και R΄ τα κοινά σημεία της PN με τις CR, CR΄. Ισχύει: CA2=CN2-PN2=RN2-PN2=(RN-PN).(RN+PN)=RP.PR΄. Όμως RP2.PR΄2=2PK2.2PK΄2=4PK2.PK΄2, άρα CA2=RP.PR΄=2PK.PK΄ (γωνία PRK=45 μοίρες), οπότε PK.PK΄=CA2/2.Τα ανωτέρω εξηγούν μία πιθανή πορεία που ακολουθήθηκε από τον Μέναιχμο. Αξίζει επιπροσθέτως να σημειωθεί, πως ο Δημόκριτος ήδη ανέφερε, ότι, θεωρώντας κώνο με ορθή γωνία κορυφής, τότε η τομή πουπροέκυπτε με επίπεδο παράλληλο με τη βάση του και κοντά σε αυτήν είχε το σχήμα του κύκλου. Επιπλέον, στα ¨Φαινόμενα¨ του Ευκλείδη αναφέρεται, ότι η τομή κώνου ή κυλίνδρου με επίπεδο όχι παράλληλο με τη βάση τους, μοιάζει με την τομή που προκύπτει, όταν τμήσουμε οξυγώνιο κώνο με επίπεδο κάθετο προς την ακμή του. Σύμφωνα δε με σχόλιο του Ευτόκιου, η τομή οξυγώνιου, ορθογώνιου ή αμβλυγώνιου κώνου με επίπεδο κάθετο προς την γενέτειρα ακμή του, είναι έλλειψη,παραβολή και υπερβολή αντίστοιχα. Μετά τον Μέναιχμο η εξέλιξη ήταν ταχύτατη, αφού μέχρι το τέλος του αιώνα (300 π.Χ.) υπήρξαν σύμφωνα με τον Πάππο δύο αξιόλογες εργασίες με θέμα τις κωνικές τομές. Πρόκειται για τις ¨Κωνικές¨ του Ευκλείδη, ένα έργο που αποτελείτο από 4 βιβλία, καθώς και 5 βιβλία με τίτλο ¨Solid loci¨ του Αρισταίου, στα οποία δόθηκε από τον συγγραφέα ο συγκεκριμένος αυτός τίτλος, αντί του τίτλου ¨Κωνικές τομές¨.

Σύμφωνα δε με τον Πάππο, επρόκειτο για εξειδικευμένη και πρωτότυπη (Ο Πάππος ήταν σημαντικός μαθηματικός ελληνικής καταγωγής που έζησε γύρω στο 300 π.Χ)

Αξίζει δε να σημειωθεί πως σύμφωνα με τον Πάππο υπήρχε διαχωρισμός μεταξύ ‘επιπέδων’, ‘στερεών’, και ‘γραμμικών’ προβλημάτων. Τα ‘επίπεδα’ ήταν τα σχήματα που αντιμετωπίζονταν με τη χρήση ευθειών και περιφερειών κύκλων. Τα ‘στερεά’ (solid) σχετίζονταν με τη χρήση κωνικών τομών, όπως π.χ. το πρόβλημα διπλασιασμού του κύβου. Όσον αφορά δε στα ‘γραμμικά’,αυτά είχαν να κάνουν με άλλες καμπύλες περισσότερο σύνθετες και λιγότερο συνήθεις.

Βέβαια ο Απολλώνιος στο έργο του αναφέρεται στον Ευκλείδη και όχι στον Αρισταίο, γιατί είναι πιθανόν ο Ευκλείδης να του ταίριαζε περισσότερο σε ύφος. Ωστόσο η δουλειά του Αρισταίου θεωρείται σημαντικότερη για το λόγο ότι, αφενός μεν συνέλεξε και κατέγραψε τις ιδιότητες των κωνικών τομών, αφετέρου δε ανακάλυψε καινούριες, όπως ¨The focus property directrix¨.

Σύμφωνα με τον Πάππο το σχετικό θεώρημα λέει πως : *Τα σημεία των οποίων οι αποστάσεις από δοθέν σημείο και από σταθερή ευθεία έχουν λόγο μικρότερο της μονάδας ανήκουν σε έλλειψη, ίσο με τη μονάδα σε παραβολή, και μεγαλύτερο της μονάδας σε υπερβολή.*