

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία - Παράρτημα Καστοριάς
Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ - ΘΕΜΑΤΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
1^η ΦΑΣΗ

20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2024

ΟΝΟΜΑ ΣΧΟΛΕΙΟ

Αγαπητοί μαθητές, σας καλωσορίζουμε στον τοπικό διαγωνισμό Μαθηματικών για μαθητές της Α΄ Γυμνασίου. Σας ευχόμαστε ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ.

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα

ΘΕΜΑ 1

Βάλτε σε κύκλο την σωστή απάντηση

A1. Το κλάσμα $\frac{1^{2024} \cdot 2024 + 2024 \cdot (2024 - 2023)}{2}$ ισούται με

- α) 4048 β) 1012 ☒ **γ) 2024** δ) 2025

A2. Δίνεται η παράσταση : $1 \cdot \left(1 - \frac{1}{1}\right) + 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) + 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) + 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) + 5 \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right)$ ισούται με :

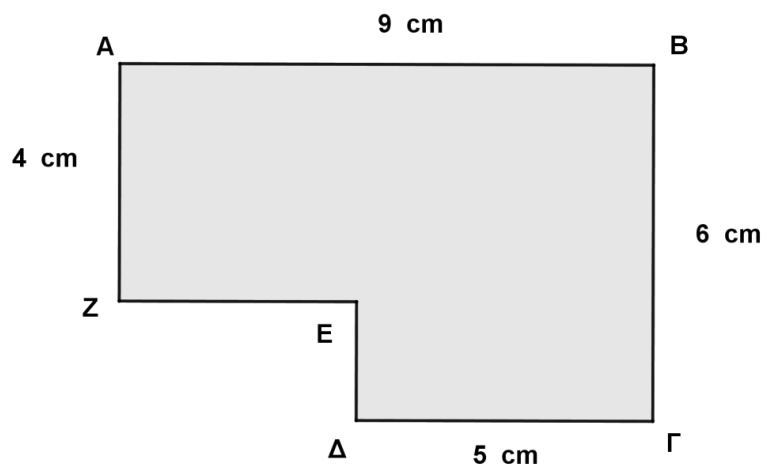
- ☒ **α) 10** β) 15 γ) 16 δ) 14

A3. Αν τα $\frac{2}{3}$ ενός αριθμού είναι 12 , τότε τα $\frac{4}{9}$ του αριθμού είναι :

- α) 16 ☒ **β) 8** γ) 6 δ) 4

A4. Το εμβαδόν του πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ είναι :

- α) 24 cm^2
β) 30 cm^2
☒ **γ) 46 cm^2**
δ) 66 cm^2
ε) 74 cm^2



(Μονάδες 5+5+5+5=20)

ΘΕΜΑ 2

Ο Κωνσταντίνος συμπληρώνει τον διπλανό πίνακα με στόχο **κάθε γραμμή και κάθε στήλη** (όχι διαγώνιο) να έχουν το ίδιο άθροισμα. Δυστυχώς πήρε **έναν αριθμό** λάθος. Ποιος είναι ο λάθος αριθμός και με ποιον πρέπει να τον αντικαταστήσει ;

9	1	5
3 12	7	6
4	7	4

(Μονάδες 5)

Απάντηση -Σκέψη.

Στον παρακάτω πίνακα παρατηρώντας τις γραμμές και τις στήλες έχουμε :

9	1	5
3	7	6
4	7	4

1^η γραμμή : $9+1+5=15$

2^η γραμμή : $3+7+6=16$

3^η γραμμή : $4+7+4=15$

1^η στήλη

1^η στήλη

1^η στήλη

$$9+3+4=16$$

$$1+7+7=15$$

$$5+6+4=15$$

Αφού το λάθος είναι σε **έναν αριθμό**, άρα το άθροισμα κάθε γραμμής και κάθε στήλης θα είναι 15.

Οπότε ο λάθος αριθμός έχει τοποθετηθεί στην **δεύτερη γραμμή** και την **πρώτη στήλη**.

Άρα είναι **ο αριθμός 3** και **πρέπει να τον αντικαταστήσουμε με το 2** για να πετύχουμε ταυτόχρονα άθροισμα γραμμής και στήλης 15.

(Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας σε κάθε ερώτημα από τα παρακάτω θέματα)

ΘΕΜΑ 3.

Δίνονται οι παραστάσεις :

$$A = 4^2 - 2^3 + 3^2 - 2 \cdot (2 \cdot 3 - 1^5) \text{ και } B = 2^4 - 3^2 + 2^3 - 3 \cdot (2 \cdot 4,5 - 6^1)$$

α) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις A , B

Απάντηση.

$$A = 4^2 - 2^3 + 3^2 - 2 \cdot (2 \cdot 3 - 1^5) = 16 - 8 + 9 - 2 \cdot (6 - 1) = 16 - 8 + 9 - 2 \cdot 5 = 8 + 9 - 10 = 17 - 10 = 7$$

Άρα **A=7**

$$B = 2^4 - 3^2 + 2^3 - 3 \cdot (2 \cdot 4,5 - 6^1) = 16 - 9 + 8 - 3 \cdot (9 - 6) = 16 - 9 + 8 - 3 \cdot 3 = 16 - 9 + 8 - 9 = 7 + 8 - 9 = 15 - 9 = 6$$

Άρα **B=6**

Για τα επόμενα ερωτήματα να θεωρήσετε ότι : $A = 7$ και $B = 6$

β) Σχηματίζουμε τα κλάσματα $\frac{A-1}{B+2}$, $\frac{B-2}{A-3}$ και $\frac{B+1}{A-1}$.

Να υπολογίσετε τα παραπάνω κλάσματα και να τα τοποθετήσετε κατ' αύξουσα σειρά (από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο)

Απάντηση.

$$\frac{A-1}{B+2} = \frac{7-1}{6+2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \quad \frac{B-2}{A-3} = \frac{6-2}{7-3} = \frac{4}{4} = 1, \quad \frac{B+1}{A-1} = \frac{6+1}{7-1} = \frac{7}{6}$$

$$\text{Άρα } \frac{A-1}{B+2} = \frac{3}{4} \text{ και } \frac{B-2}{A-3} = 1 \text{ και } \frac{B+1}{A-1} = \frac{7}{6}$$

$$\text{Οπότε } \frac{A-1}{B+2} < \frac{B-2}{A-3} < \frac{B+1}{A-1} \text{ αφού } \frac{3}{4} < 1 < \frac{7}{6}$$

Διότι κάθε κλάσμα με αριθμητή μικρότερο του παρονομαστή είναι μικρότερο της μονάδας και κλάσμα με αριθμητή μεγαλύτερο του παρονομαστή είναι μεγαλύτερο της μονάδας

γ) Αν n είναι ένας αριθμός από το σύνολο $\{1,2,3,4,5\}$, να βρείτε όλες τις τιμές του n για τις οποίες το κλάσμα $\frac{A \cdot B}{n+2}$ είναι φυσικός αριθμός.

Απάντηση.

1^{ος} Τρόπος

Το κλάσμα γίνεται με αντικατάσταση των A, B : $\frac{A \cdot B}{n+2} = \frac{7 \cdot 6}{n+2} = \frac{42}{n+2}$ οπότε για κάθε τιμή του n θα έχουμε

$$n=1: \frac{A \cdot B}{n+2} = \frac{42}{n+2} = \frac{42}{1+2} = \frac{42}{3} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{3} = 2 \cdot 7 = 14$$

$$n=2: \frac{A \cdot B}{n+2} = \frac{42}{n+2} = \frac{42}{2+2} = \frac{42}{4} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{2 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 7}{2} = \frac{21}{2} \text{ άρα δεν δίνει φυσικό αριθμό}$$

$$n=3: \frac{A \cdot B}{n+2} = \frac{7 \cdot 6}{n+2} = \frac{42}{3+2} = \frac{42}{5} \text{ άρα δεν δίνει φυσικό αριθμό}$$

$$n=4: \frac{A \cdot B}{n+2} = \frac{7 \cdot 6}{n+2} = \frac{7 \cdot 6}{4+2} = \frac{7 \cdot 6}{6} = 7$$

$$n=5: \frac{A \cdot B}{n+2} = \frac{7 \cdot 6}{n+2} = \frac{42}{5+2} = \frac{42}{7} = \frac{6 \cdot 7}{7} = 6$$

οπότε οι τιμές του n που το κλάσμα είναι φυσικός αριθμός είναι $\{1, 4, 5\}$

2^{ος} Τρόπος

Για να είναι το κλάσμα $\frac{A \cdot B}{n+2} = \frac{42}{n+2}$ φυσικός αριθμός πρέπει το $n+2$ να είναι διαιρέτης του 42, δηλαδή να χωράει ακριβώς μέσα στο 42.

Οπότε του $n+2$ πρέπει να είναι: 1 ή 2 ή 3 ή 6 ή 7 ή 14 ή 21 ή 42.

Δοκιμάζοντας τις τιμές $\{1,2,3,4,5\}$ που μας δίνουν για το n βρίσκουμε ότι οι τιμές του n που το κλάσμα είναι φυσικός αριθμός είναι $\{1, 4, 5\}$.

(Μονάδες 8+8+9=25)

ΘΕΜΑ 4.

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = 90$ και $\beta = 108$.

α. Να αναλυθούν οι αριθμοί α, β σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Απάντηση.

90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Άρα
 $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

Άρα
 $108 = 2^2 \cdot 3^3$

β. Να βρείτε τον Μ.Κ.Δ και το Ε.Κ.Π των αριθμών α, β .

Απάντηση.

Αφού αναλύσαμε τους αριθμούς σε γινόμενα πρώτων παραγόντων, παίρνουμε μόνο τους κοινούς παράγοντες με τον μικρότερο εκθέτη για το ΜΚΔ και τους κοινούς και μη κοινούς παράγοντες με τον μεγαλύτερο εκθέτη για το ΕΚΠ.

Άρα $\text{ΜΚΔ}(90, 108) = 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$ και $\text{ΕΚΠ}(90, 108) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 4 \cdot 27 \cdot 5 = 20 \cdot 27 = 540$

(Μπορούμε να βρούμε ΕΚΠ και ΜΚΔ και με άλλους τρόπους)

γ. Να βρείτε όλους τους διαιρέτες του αριθμού $\alpha = 90$.

Απάντηση.

Διαφéréτες του αριθμού $\alpha=90$ είναι όλοι οι αριθμοί που τον διαφούν.

Άρα $\Delta_{90} = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90\}$

δ. Να απλοποιηθεί το κλάσμα $K = \frac{\beta}{\alpha}$.

Απάντηση.

$K = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{108}{90}$. Ο ΜΚΔ των όρων του κλάσματος 108 και 90 είναι: $\text{ΜΚΔ}(90, 108) = 18$

Άρα διαφούμε τους όρους του κλάσματος με το 18 και έχουμε: $K = \frac{108}{90} = \frac{108:18}{90:18} = \frac{6}{5}$

Απλοποίηση κλάσματος $\Leftrightarrow$ Μετατροπή κλάσματος σε ανάγωγο κλάσμα

(Μονάδες 6+6+7+6=25)

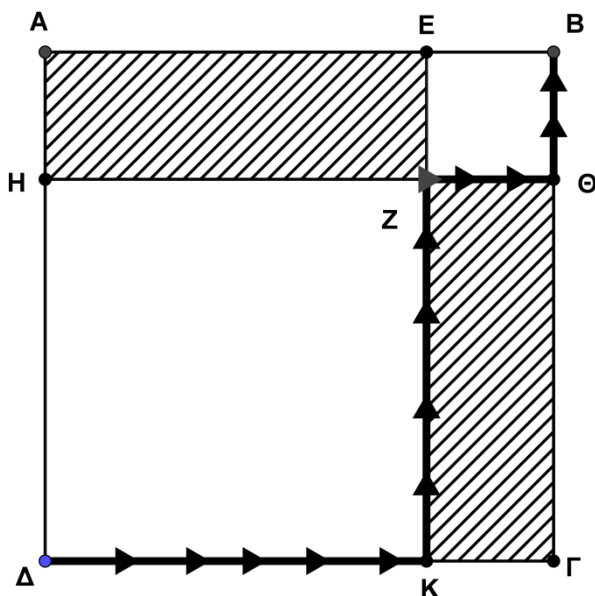
ΘΕΜΑ 5.

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται :

- Τα τετράγωνα $AB\Gamma\Delta$, $HZK\Delta$, $EB\Theta Z$.
- Τα ίσα ορθογώνια $AEZH$, $Z\Theta\Gamma K$.

Γνωρίζουμε επίσης ότι η διαδρομή $\Delta \rightarrow K \rightarrow Z \rightarrow \Theta \rightarrow B$ είναι ίση με 32 cm , δηλαδή

$\Delta K + KZ + Z\Theta + \Theta B = 32 \text{ cm}$.



α. Να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

Απάντηση.

Ξέρουμε ότι η διαδρομή $\Delta \rightarrow K \rightarrow Z \rightarrow \Theta \rightarrow B$ είναι ίση με 32 cm , άρα $\Delta K + KZ + Z\Theta + \Theta B = 32 \text{ cm}$

Το $Z\Theta\Gamma K$ είναι ορθογώνιο άρα $ZK = \Theta\Gamma$ και $Z\Theta = K\Gamma$.

Άρα η διαδρομή $\Delta \rightarrow K \rightarrow \Gamma \rightarrow \Theta \rightarrow B$ είναι ίση με 32 cm δηλαδή $\Delta\Gamma + \Gamma B = 32 \text{ cm}$

Το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο, άρα όλες οι πλευρές του είναι ίσες δηλαδή $\Gamma B = \Delta\Gamma$. Οπότε $\Delta\Gamma = 32:2 = 16 \text{ cm}$

Δηλαδή η πλευρά του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ είναι $\Delta\Gamma = 16 \text{ cm}$.

Για τα επόμενα ερωτήματα να θεωρήσετε ότι η πλευρά του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ είναι $\Gamma\Delta = 16\text{ cm}$.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του $AB\Gamma\Delta$.

Απάντηση.

Το εμβαδόν του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ είναι $(\text{πλευρά}) \times (\text{πλευρά}) = 16 \cdot 16\text{ cm}^2 = \mathbf{256\text{ cm}^2}$

γ. Αν γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του μικρού τετραγώνου $EB\Theta Z$ είναι ίσο με το $\frac{1}{16}$ του εμβαδού του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$, να υπολογίσετε :

i. Το εμβαδόν και την πλευρά του τετραγώνου $EB\Theta Z$.

Απάντηση.

Το εμβαδόν του τετραγώνου $EB\Theta Z$ είναι ίσο με το $\frac{1}{16}$ του εμβαδού του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ δηλαδή το

εμβαδόν του τετραγώνου $EB\Theta Z$ θα είναι ίσο με $256 \cdot \frac{1}{16} = \frac{256}{16} = \mathbf{16\text{ cm}^2}$.

Αφού το εμβαδόν του τετραγώνου $EB\Theta Z$ είναι 16 άρα για την πλευρά του τετραγώνου $EB\Theta Z$ θα έχουμε:
 $(\text{πλευρά}) \times (\text{πλευρά}) = 16\text{ cm}^2$ άρα η πλευρά του θα είναι $\mathbf{EB = B\Theta = \Theta Z = ZE = 4\text{ cm}}$

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου $AEZH$.

Απάντηση.

Το $AEZH$ είναι ορθογώνιο. Οπότε το εμβαδόν του θα είναι ίσο με : $(\text{βάση}) \cdot (\text{ύψος}) = AE \cdot EZ$

$AE = 16 - 4 = 12\text{ cm}$ και $EZ = 4\text{ cm}$ άρα το εμβαδόν είναι $\mathbf{12 \cdot 4 = 48\text{ cm}^2}$.

(Μονάδες $7+6+6+6=25$)