Θανάση Π. Ξένου

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Απαραίτητο βοήθημα για κάθε μαθητή Λυκείου

- Ορισμοί των εννοιών
- Τύποι και ιδιότητες
- Βασική μεθοδολογία

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

Πρόλογος

Το βιβλιαράκι που κρατάς στα χέρια σου, μοναδικό στην ελληνική βιβλιογραφία, θα σου φανεί χρήσιμο στη διάρκεια των σπουδών σου στο Λύκειο, αλλά και στην προετοιμασία σου για τις πανελλαδικές εξετάσεις.

Περιέχει εκείνες τις *θεωρητικές γνώσεις* (ορισμούς εννοιών, τύπους και ιδιότητες), που έχεις διδαχθεί σε προηγούμενες τάξεις και θα πρέπει να γνωρίζεις για τη συνέχεια των σπουδών σου.

Περιέχει, ακόμη, τη *βασική μεθοδολογία* για την επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων, με *αντιπροσωπευτικά παραδείγματα*.

Η πολύχρονη εμπειρία μου, ως δάσκαλος των Μαθηματικών και συγγραφέας, με κάνει να ελπίζω πως το εγχειρίδιο αυτό θα συμβάλλει, έστω και ελάχιστα, στην επιτυχημένη ενασχόλησή σου με τα Μαθηματικά.

Ιούνιος 2008 *Θανάσης Ξένος*

Περιεχόμενα

1ο Κεφάλαιο ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

2ο Κεφάλαιο ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

3ο Κεφάλαιο ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

4ο Κεφάλαιο ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

5ο Κεφάλαιο ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

6ο Κεφάλαιο

ΑΝΑΛΥΣΗ

7ο Κεφάλαιο ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

8ο Κεφάλαιο ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

9ο Κεφάλαιο ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Αλγεβρικός Λογισμός

1.1 Σύνολα αριθμών

- Σύνολο φυσικών αριθμών $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- Σύνολο ακέραιων αριθμών $\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots\}$.
- **Ρητοί** αριθμοί ονομάζονται οι αριθμοί που γράφονται ως κλάσματα ακεραίων και το σύνολό τους συμβολίζεται με $\mathbb{Q}$.

  Οι ρητοί αριθμοί είναι απλοί δεκαδικοί ή περιοδικοί δεκαδικοί ή ακέραιοι.

  $$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{\alpha}{\beta} / \alpha,\ \beta \in \mathbb{Z},\ \beta \neq 0 \right\}$$

  (γράφοντας $\alpha \in \mathbb{Z}$, εννοούμε ότι ο αριθμός α ανήκει στο σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων).

- Οι αριθμοί που δε γράφονται ως κλάσματα ακεραίων, οπότε είναι μη περιοδικοί δεκαδικοί, ονομάζονται **άρρητοι**. Οι ρητοί και οι άρρητοι μαζί δίνουν τους πραγματικούς αριθμούς, που το σύνολό τους συμβολίζεται με $\mathbb{R}$. Επομένως, το σύνολο των άρρητων αριθμών μπορούμε να το γράψουμε $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

  Π.χ. άρρητοι είναι οι αριθμοί $\sqrt{2}$, $2+\sqrt{5}$ και π. Ο αριθμός $\pi \simeq 3{,}14159$ είναι ο λόγος του μήκους ενός κύκλου προς τη διάμετρό του.

  Προφανώς, ισχύει

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

όπου το σύμβολο $\subset$ σημαίνει γνήσιο υποσύνολο.

- Αν από ένα σύνολο A εξαιρέσουμε τον αριθμό 0, τότε συμβολίζεται με A^*.
  Έτσι, π.χ. με $\mathbb{N}^*$ συμβολίζουμε το σύνολο των θετικών ακεραίων.

1.2 Οι πράξεις στο R και οι ιδιότητές τους

- Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός πραγματικών αριθμών είναι αντιμεταθετικές και προσεταιριστικές πράξεις

  $\alpha+\beta=\beta+\alpha$, $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

  $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$, $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$

- Ο πολλαπλασιασμός είναι επιμεριστική πράξη ως προς την πρόσθεση και την αφαίρεση

  $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$, $\alpha\cdot(\beta-\gamma)=\alpha\cdot\beta-\alpha\cdot\gamma$

- Δύο αριθμοί με άθροισμα 0 λέγονται αντίθετοι, ενώ δύο αριθμοί με γινόμενο 1 λέγονται αντίστροφοι

  $x+(-x)=0$, $x\cdot\frac{1}{x}=1 \quad (x\neq 0)$

- Η διαγραφή ισχύει πάντα στην πρόσθεση, ενώ στον πολλαπλασιασμό διαγράφεται μη μηδενικός παράγοντας

  1) $\alpha+\beta=\alpha+\gamma \Leftrightarrow \beta=\gamma$

  2) Αν $\alpha\neq 0$, τότε: $\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\gamma \Leftrightarrow \beta=\gamma$

- Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

  1) $\alpha\cdot\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ ή $\beta=0$

  2) $\alpha\cdot\beta\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq 0$ και $\beta\neq 0$

  3) $\alpha^2+\beta^2=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ και $\beta=0$

1.3 Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

Έστω πραγματικός αριθμός α.

- Αν $\nu \in \mathbb{N}^*$, τότε $\alpha^\nu = \alpha \cdot \alpha \cdots \alpha$ (ν το πλήθος των παραγόντων).
- Αν $\nu = 0$ και $\alpha \neq 0$, τότε $\alpha^0 = 1$.
- Αν $\alpha \neq 0$, τότε $\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^\nu}$, όπου ν θετικός ακέραιος.
- Αν $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$ και $\alpha \geq 0$, τότε $\boxed{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}}$,

  ενώ για $\alpha > 0$ ισχύει $\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}} = \dfrac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}}$.

  Π.χ. $81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = \left(\sqrt[4]{81}\right)^3 = 3^3 = 27$ ή $81^{\frac{3}{4}} = \left(3^4\right)^{\frac{3}{4}} = 3^3 = 27$.
- Έστω $\alpha > 0$ και x άρρητος. Αν P_ν είναι η δεκαδική προσέγγιση του x με ν δεκαδικά ψηφία, καθώς το ν αυξάνει απεριόριστα ($\nu \to +\infty$), ο αριθμός α^{P_ν} προσεγγίζει ολοένα και περισσότερο έναν συγκεκριμένο θετικό αριθμό, που τον συμβολίζουμε με α^x.

  Αν $x > 0$, τότε ορίζουμε $0^x = 0$.

  Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $1^x = 1$ και $\alpha^x > 0$.
- Αν $\alpha, \beta > 0$ και $x, y \in \mathbb{R}$, τότε

  1) $\alpha^x \cdot \alpha^y = \alpha^{x+y}$ **2)** $\dfrac{\alpha^x}{\alpha^y} = \alpha^{x-y}$

  3) $(\alpha^x)^y = \alpha^{xy}$ **4)** $(\alpha\beta)^x = \alpha^x \beta^x$ **5)** $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^x = \dfrac{\alpha^x}{\beta^x}$
- Αν $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$, τότε: $\alpha^x = \alpha^y \Leftrightarrow x = y$.

  Αν $\alpha > 1$, τότε: $\alpha^x > \alpha^y \Leftrightarrow x > y$.

  Αν $0 < \alpha < 1$, τότε: $\alpha^x > \alpha^y \Leftrightarrow x < y$.

- Αν $\alpha, \beta > 0$ και $x, y \in \mathbb{R}^*$, τότε: $\alpha^x = \beta^y \Leftrightarrow \alpha = \beta^{\frac{y}{x}} \Leftrightarrow \beta = \alpha^{\frac{x}{y}}$.
- Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και ν θετικός ακέραιος, τότε:
  1) για ν περιττό ισχύει: $\alpha^\nu = \beta^\nu \Leftrightarrow \alpha = \beta$
  2) για ν άρτιο ισχύει: $\alpha^\nu = \beta^\nu \Leftrightarrow \alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$.

1.4 Αναλογίες

- Κάθε ισότητα λόγων, όπως η $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, ονομάζεται αναλογία και ισχύει:
  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$ («χιαστή» ιδιότητα).
- Σε μια αναλογία μπορεί να γίνει εναλλαγή των άκρων ή των μέσων όρων.
  1) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$ **2)** $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$
- Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \cdots = \frac{\mu}{\nu} = \lambda$, τότε και $\frac{\alpha + \gamma + \cdots + \mu}{\beta + \delta + \cdots \nu} = \lambda$.

1.5 Ταυτότητες

- $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ και $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
- $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
- $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$
- $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$