1 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ορισμός Συνάρτησης

$\mathbf{f(x): A \to B} \qquad \mathbf{A, B \subseteq R}$

Το σύνολο *Α*, που λέγεται *πεδίο ορισμού* της συνάρτησης, είναι υποσύνολο του συνόλου *R* των πραγματικών αριθμών, ενώ το *Β* συμπίπτει με το *R*. Οι συναρτήσεις αυτές λέγονται **πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής** και τις οποίες στο εξής θα τις λέμε απλώς **συναρτήσεις**. Η συνάρτηση συμβολίζεται συνήθως με ένα από τα μικρά γράμματα *f, g, h, φ, σ* κτλ. του λατινικού ή του ελληνικού αλφαβήτου.

Έστω λοιπόν μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού το *Α*. Αν με τη συνάρτηση αυτή το $x \in A$ αντιστοιχίζεται στο $y \in B$, τότε γράφουμε

$$y = f(x)$$

και διαβάζουμε "*y* ίσον *f* του *x*". Το $f(x)$ λέγεται **τιμή της *f* στο *x***. Το γράμμα *x*, που συμβολίζει οποιοδήποτε στοιχείο του *Α*, ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το *y*, που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο *x* και εξαρτάται από την τιμή του *x*, λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

Όταν το $f(x)$ εκφράζεται μόνο με έναν αλγεβρικό τύπο, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το "ευρύτερο" υποσύνολο του *R* στο οποίο το $f(x)$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. Έτσι, η παραπάνω συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $1 - x^2 \geq 0$, δηλαδή το διάστημα $\Delta = [-1, 1]$, η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{3}{x-2}$ έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbf{R} - \{2\}$, δηλαδή το **R** χωρίς το 2, ενώ η συνάρτηση $h(x) = 3x - 1$ έχει ως πεδίο ορισμού ολόκληρο το σύνολο **R** των πραγματικών αριθμών.

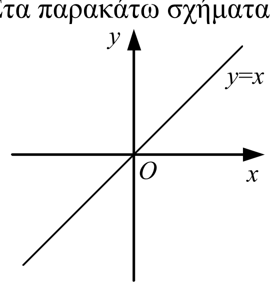
Πράξεις με Συναρτήσεις

Αν δύο συναρτήσεις *f, g* ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο *Α*, δηλαδή ($\mathbf{A = D_f \cap D_g}$) τότε ορίζονται και οι συναρτήσεις:

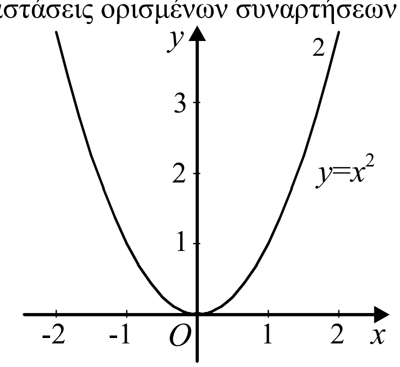
- Το άθροισμα $S = f + g$, με $S(x) = f(x) + g(x)$, $x \in A$
- Η διαφορά $D = f - g$, με $D(x) = f(x) - g(x)$, $x \in A$
- Το γινόμενο $P = f \cdot g$, με $P(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in A$ και
- Το πηλίκο $R = \dfrac{f}{g}$, με $R(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, όπου $x \in A$ και $g(x) \neq 0$.

Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

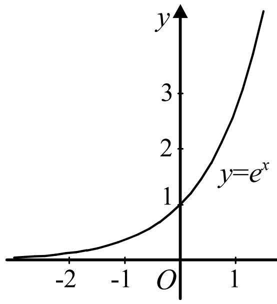
Στα παρακάτω σχήματα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις ορισμένων συναρτήσεων



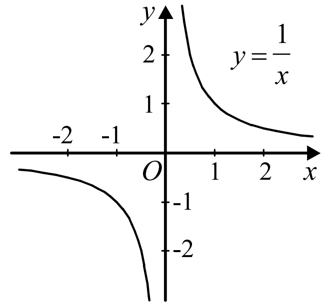
(α) Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = x$ είναι η διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.



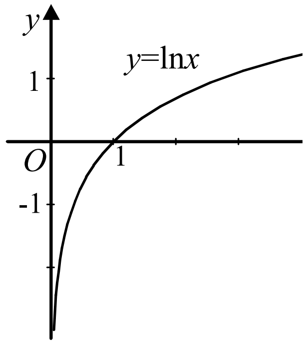
(β) Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι μια *παραβολή*.



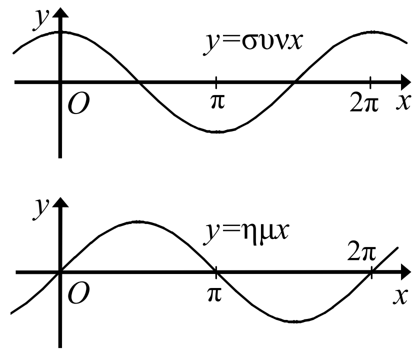
(γ) Η καμπύλη της εκθετικής συνάρτησης $f(x)=e^x$ είναι "πάνω" από τον άξονα $x'x$, αφού $e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.



(δ) Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{x}$ είναι μια *υπερβολή*.



(ε) Η καμπύλη της λογαριθμικής συνάρτησης $f(x)=\ln x$ είναι "δεξιά" του άξονα yy', αφού ο λογάριθμος ορίζεται μόνο για $x>0$.



(στ) Οι συναρτήσεις $f(x)=\text{ημ}x$ και $g(x)=\text{συν}x$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π.

<u>Μονοτονία Συνάρτησης</u>

- Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
- Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** στο Δ, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.
- Μια συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα λέγεται **γνησίως μονότονη**.

<u>Ακρότατα Συνάρτησης</u>

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει:

- **Τοπικό μέγιστο** στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \le f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1.
- **Τοπικό ελάχιστο** στο $x_2 \in A$, όταν $f(x) \ge f(x_2)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_2.

- Τα μέγιστα και τα ελάχιστα μιας συνάρτησης, τοπικά ή ολικά, λέγονται **ακρότατα** της συνάρτησης.

<u>Όριο Συνάρτησης</u>

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$, η οποία δεν ορίζεται για $x=1$. Ας εξετάσουμε όμως τη συμπεριφορά της f για τιμές του x κοντά στο 1.

Βλέπουμε ότι όταν το x παίρνει τιμές πολύ κοντά στο 1 (και από τις δύο πλευρές του 1), το $f(x)$ παίρνει τιμές πολύ κοντά στο 2. Στο ίδιο συμπέρασμα φτάνουμε, αν παρατηρήσουμε ότι για $x\ne 1$ είναι

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1,$$

5

οπότε όταν το x παίρνει τιμές που τείνουν στο 1 $(x\to 1)$, τότε το $f(x)=x+1$ παίρνει τιμές που τείνουν στο 2 $(x+1\to 2)$. Λέμε λοιπόν ότι η f έχει στο σημείο 1 όριο (limit) 2 και γράφουμε $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$.

Ιδιότητες ορίων

Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν στο x_0 όρια πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell_2$ όπου ℓ_1 και ℓ_2 πραγματικοί αριθμοί, τότε αποδεικνύεται ότι:

- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\ell_1+\ell_2$
- $\lim\limits_{x\to x_0}(kf(x))=k\ell_1$
- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))=\ell_1\ell_2$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$
- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{\nu}=\ell_1^{\nu}$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\nu]{f(x)}=\sqrt[\nu]{\ell_1}$.

Συνέχεια συνάρτησης

Ορισμός

Γενικά **μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0\in A$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$** .

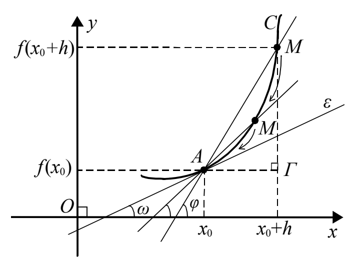
- Χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα είναι ότι η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχής καμπύλη, δηλαδή για το σχεδιασμό της δε χρειάζεται να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί.
- Αποδεικνύεται ότι είναι συνεχείς συναρτήσεις οι γνωστές μας συναρτήσεις,
  - πολυωνυμικές,
  - τριγωνομετρικές,
  - εκθετικές,
  - λογαριθμικές,
  - αλλά και όσες προκύπτουν από πράξεις μεταξύ αυτών.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Εφαπτομένη Καμπύλης

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C στο A θα είναι

$$\boldsymbol{\varepsilon\varphi\omega=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}\ .$$



Παράγωγος της f στο x = x_0

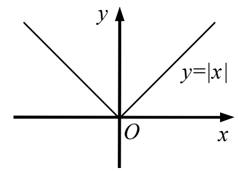
Λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $\boldsymbol{x_0}$ του πεδίου ορισμού της αν υπάρχει το όριο (και είναι πραγματικός αριθμός) αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0**, συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και διαβάζεται "f τονούμενο του x_0". Έχουμε λοιπόν:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

- Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει **το ρυθμό μεταβολής** του $y=f(x)$ ως προς το x, όταν $x=x_0$.
- Ο **συντελεστής διεύθυνσης** της εφαπτομένης της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο σημείο $(x_0,\ f(x_0))$ θα είναι $f'(x_0)$, **δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής** της $f(x)$ ως προς x όταν $x=x_0$.

ΣΧΟΛΙΟ

Υπάρχουν και συναρτήσεις οι οποίες δεν έχουν παράγωγο σε ένα σημείο. Όπως είναι, για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=|x|$ στο $x_0=0$. Διότι όταν $h<0$, έχουμε



$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h}=-1,$$

ενώ όταν $h>0$, έχουμε $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h}=1$, που σημαίνει ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός Παραγώγου

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A, και B το σύνολο των $x\in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. **Πρώτη παράγωγος της *f* και συμβολίζεται με f'** ορίζεται μια νέα συνάρτηση, με την οποία

Για κάθε $x\in B$ αντιστοιχίζεται στο $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Παράδειγμα

η παράγωγος της $f(x)=3x^2$ στο $x_0=4$ είναι ίση με την τιμή της συνάρτησης $f'(x)=6x$ στο $x_0=4$, δηλαδή $f'(4)=6\cdot 4=24$.

Η παράγωγος της συνάρτησης f' λέγεται **δεύτερη παράγωγος** της *f* και συμβολίζεται με f''.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα αν η τετμημένη ενός κινητού που κινείται ευθυγράμμως είναι $x(t)$ τη χρονική στιγμή t, τότε η ταχύτητά του θα είναι

$$\boldsymbol{\upsilon(t)=x'(t)}.$$

Αν η συνάρτηση υ είναι παραγωγίσιμη, τότε η επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t θα είναι η παράγωγος της ταχύτητας, δηλαδή θα ισχύει

$$\alpha(t)=\upsilon'(t) \quad \text{ή} \quad \text{ισοδύναμα} \quad \alpha(t)=x''(t).$$

Παραγώγιση Βασικών Συναρτήσεων

- **Η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x)=c$**

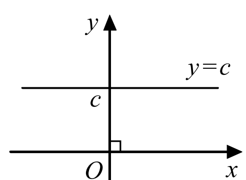
Έχουμε

$$f(x+h)-f(x)=c-c=0$$

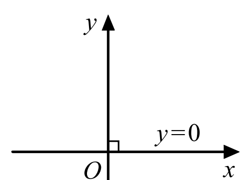
και για $h\neq 0$,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0,$$

οπότε $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$.



(α)



(β)

Άρα $\qquad \boldsymbol{(c)'=0}$.

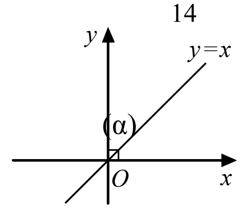
- **Η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$**

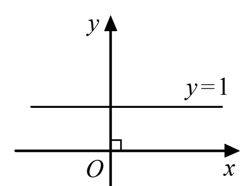
14

Έχουμε $f(x+h)-f(x)=(x+h)-x=h$, και για $h\neq 0$,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{h}{h}=1.$$

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}1=1$.





(β)

Άρα $\qquad \boldsymbol{(x)'=1}$.

- **Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x^{\rho}$**

Αποδεικνύεται ότι $\qquad \boldsymbol{(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}}$, όπου ν φυσικός.

Ο τύπος αυτός ισχύει και στην περίπτωση που ο εκθέτης είναι ρητός αριθμός.

Άρα $\quad (\boldsymbol{x^{\rho}})' = \boldsymbol{\rho x^{\rho-1}}$, όπου ρ ρητός αριθμός .

- **Η παράγωγος του ημx και του συνx .**

Πράγματι, για τη συνάρτηση $f(x) = \text{ημ}x$ αποδεικνύεται ότι

$$(\boldsymbol{\text{ημ}x})' = \boldsymbol{\text{συν}x} .$$

Επίσης για τη συνάρτηση $g(x) = \text{συν}x$ αποδεικνύεται ότι

$$(\boldsymbol{\text{συν}x})' = -\boldsymbol{\text{ημ}x} .$$

- **Η παράγωγος του e^x και του $\ln x$**

Για την εκθετική και τη λογαριθμική συνάρτηση, με βάση τον αριθμό e, αποδεικνύεται ότι

$$(\boldsymbol{e^x})' = \boldsymbol{e^x} \quad \text{και} \quad (\boldsymbol{\ln x})' = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}} .$$

<u>Κανόνες Παραγώγισης</u>

- **Η παράγωγος της συνάρτησης $cf(x)$**

Έστω η συνάρτηση $F(x) = cf(x)$. Έχουμε

$F(x+h) - F(x) = cf(x+h) - cf(x) = c(f(x+h) - f(x))$, και για $h \neq 0$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{c(f(x+h) - f(x)}{h} = c\,\frac{f(x+h) - f(x)}{h} .$$

Επομένως $\quad \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\left[c\,\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] = cf'(x)$.

Άρα $\quad (\boldsymbol{c \cdot f(x)})' = \boldsymbol{c \cdot f'(x)}$.

- **Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) + g(x)$**

Έστω η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$. Έχουμε

$$F(x+h) - F(x) = (f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x)) = (f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x)) ,$$

και για $h \neq 0$, $\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} + \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$.

Επομένως $\quad \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x).$

Άρα $\quad (\boldsymbol{f(x) + g(x)})' = \boldsymbol{f'(x) + g'(x)}$

- **Παράγωγος των συναρτήσεων $f(x) \cdot g(x)$ και $\dfrac{f(x)}{g(x)}$**

Για το γινόμενο και το πηλίκο συναρτήσεων αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω κανόνες παραγώγισης:

$$(\boldsymbol{f(x) \cdot g(x)})' = \boldsymbol{f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{f(x)}}{\boldsymbol{g(x)}}\right)' = \frac{\boldsymbol{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}}{\boldsymbol{(g(x))^2}} .$$

- **Η παράγωγος σύνθετης συνάρτησης**

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $F(x)$ προκύπτει αν στην $f(x)=\sqrt{x}$ θέσουμε όπου x το $g(x)=x^2+1$. Είναι, δηλαδή, $F(x)=\sqrt{x^2+1}=f(g(x))$. Γι' αυτό η συνάρτηση F λέγεται **σύνθεση** της g με την f.

Αποδεικνύεται ότι για την παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης ισχύει:

$$\boldsymbol{\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\cdot g'(x)}\,.$$

Δηλαδή για να παραγωγίσουμε τη συνάρτηση $f(g(x))$, σε πρώτη φάση παραγωγίζουμε την f σαν να έχει ανεξάρτητη μεταβλητή την $g(x)$ και στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε με την παράγωγο της g.

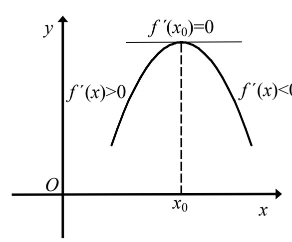
Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζονται οι βασικοί τύποι και κανόνες παραγώγισης.

$(c)'=0$ $(x)'=1$ $(x^\rho)'=\rho x^{\rho-1}$ $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$ $(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$ $(e^x)'=e^x$ $(\ell n x)'=\dfrac{1}{x}$	$(cf(x))'=cf'(x)$ $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$ $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ $\left(f(g(x))\right)'=f'(g(x))\cdot g'(x)$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Το Κριτήριο της Πρώτης Παραγώγου

- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.
- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)<0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ
- Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0\in(\alpha,\beta)$, $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α,β) για $x=x_0$ μέγιστο.



- Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0\in(\alpha,\beta)$, $f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α,β) για $x=x_0$ ελάχιστο.