ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Δειγματικός Χώρος

Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων λέγεται **δειγματικός χώρος** (sample space) και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα Ω.

Αν δηλαδή $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\kappa$ είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα είναι το σύνολο:

$$\mathbf{\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\kappa\}}.$$

Παράδειγμα:

Ρίχνεται ένα ζάρι και καταγράφεται η ένδειξη της άνω έδρας του.

Στα παραπάνω πειράματα τύχης η ένδειξη της άνω έδρας μπορεί να είναι ένας από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6. Επομένως, ο δειγματικός χώρος είναι $\mathbf{\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}}$.

Ενδεχόμενα

- Το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης λέγεται **ενδεχόμενο** ή **γεγονός**. Ένα ενδεχόμενο είναι υποσύνολο του δειγματικού χώρου.
- Όταν το αποτέλεσμα ενός πειράματος, σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου, τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο αυτό **πραγματοποιείται** ή **συμβαίνει**.
- Γι' αυτό τα στοιχεία ενός ενδεχομένου λέγονται και **ευνοϊκές περιπτώσεις** για την πραγματοποίησή του.
- Ένα ενδεχόμενο λέγεται **απλό** όταν έχει ένα μόνο στοιχείο και **σύνθετο** αν έχει περισσότερα στοιχεία.
- Ο ίδιος ο δειγματικός χώρος **Ω** ενός πειράματος θεωρείται ότι είναι ενδεχόμενο, το οποίο μάλιστα πραγματοποιείται πάντοτε, αφού όποιο και αν είναι το αποτέλεσμα του πειράματος θα ανήκει στο Ω.

  Γι' αυτό το Ω λέγεται **βέβαιο ενδεχόμενο**.
- Το κενό σύνολο $\varnothing$ είναι ενδεχόμενο και που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης.

  Γι' αυτό λέμε ότι το $\varnothing$ είναι το **αδύνατο ενδεχόμενο**.
- Το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου A θα το συμβολίζουμε με $N(A)$.

Παράδειγμα:

Στη ρίψη ενός ζαριού τα σύνολα $\mathbf{\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}}$ $\mathbf{A = \{2,\ 4,\ 6\}}$, $\mathbf{B = \{1,\ 3,\ 5\}}$ και $\mathbf{\Gamma = \{6\}}$ είναι ενδεχόμενα.

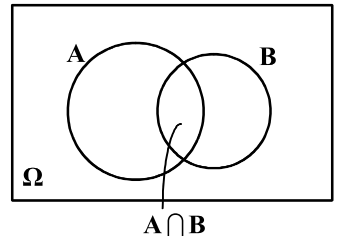
Το **Γ** είναι ένα απλό ενδεχόμενο, ενώ τα **Α** και **Β** είναι σύνθετα ενδεχόμενα.

Το ενδεχόμενο $\mathbf{A = \{2,\ 4,\ 6\}}$ έχει τρεις ευνοϊκές περιπτώσεις και πραγματοποιείται, όταν φέρουμε 2 ή 4 ή 6.

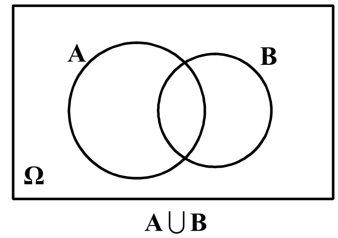
Αν $\mathbf{\Omega = \{1,\ 2, 3,\ 4,\ 5,\ 6\}}$ και $\mathbf{A = \{2,\ 4,\ 6\}}$ έχουμε $\mathbf{N(A) = 3}$, $\mathbf{N(\Omega) = 6}$ και $\mathbf{N(\varnothing\} = 0}$.

Πράξεις με Ενδεχόμενα

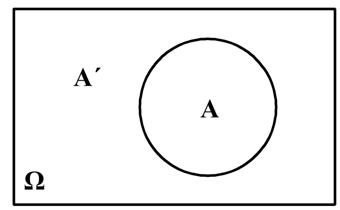
Αν A και B είναι δύο ενδεχόμενα, έχουμε:



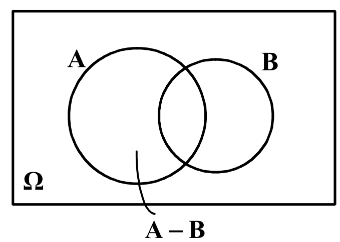
- Το ενδεχόμενο $A \cap B$, που διαβάζεται "A τομή B" ή "A και B" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B.



- Το ενδεχόμενο $A \cup B$, που διαβάζεται "A ένωση B" ή "A ή B" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B.



- Το ενδεχόμενο A', που διαβάζεται "όχι A" ή "συμπληρωματικό του A" και πραγματοποιείται, όταν δεν πραγματοποιείται το A. Το A' λέγεται και "αντίθετο του A".

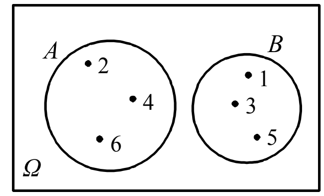


- Το ενδεχόμενο $A - B$, που διαβάζεται "διαφορά του B από το A" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B. Είναι εύκολο να δούμε ότι $A - B = A \cap B'$.

Στον παρακάτω πίνακα τα A και B συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός πειράματος και το ω ένα αποτέλεσμα του πειράματος αυτού. Στην αριστερή στήλη του πίνακα αναγράφονται διάφορες σχέσεις για τα A και B διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα, και στη δεξιά στήλη αναγράφονται οι ίδιες σχέσεις αλλά διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων.

Το ενδεχόμενο A πραγματοποιείται	$\omega \in A$
Το ενδεχόμενο A δεν πραγματοποιείται	$\omega \in A'$ (ή $\omega \notin A$)
Ένα τουλάχιστον από τα A και B πραγματοποιείται	$\omega \in A \cup B$
Πραγματοποιούνται αμφότερα τα A και B	$\omega \in A \cap B$
Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B	$\omega \in (A \cup B)'$
Πραγματοποιείται μόνο το A	$\omega \in A - B$ (ή $\omega \in A \cap B'$)
Η πραγματοποίηση του A συνεπάγεται την πραγματοποίηση του B	$A \subseteq B$

Ασυμβίβαστα Ενδεχόμενα



$A \cap B = \varnothing$

Δύο ενδεχόμενα *A* και *B* λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B = \varnothing$.

Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα λέγονται επίσης **ξένα μεταξύ τους** ή **αμοιβαίως αποκλειόμενα**.

Παράδειγμα:

Στη ρίψη ενός ζαριού

A: είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό

B: το ενδεχόμενο να φέρουμε περιττό αριθμό

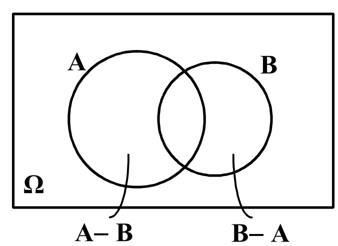
έχουμε $\mathbf{A} = \{2,\ 4,\ 6\}$ και $\mathbf{B} = \{1,\ 3,\ 5\}$. Παρατηρούμε ότι τα *A* και *B* δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν συγχρόνως, αφού δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \varnothing$.

Στην περίπτωση αυτή τα *A* και *B* λέγονται ασυμβίβαστα.

<u>ΕΦΑΡΜΟΓΗ</u>

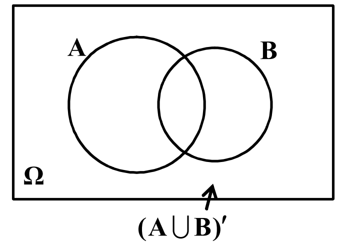
1. **Δίνονται δύο ενδεχόμενα *A* και *B* ενός πειράματος με δειγματικό χώρο *Ω*. Να παρασταθούν με διαγράμματα Venn και να εκφραστούν με τη βοήθεια συνόλων τα ενδεχόμενα που ορίζονται με τις εκφράσεις:**
   i) Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα *A* και *B*.
   ii) Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα *A* και *B*.

ΛΥΣΗ



i) Επειδή θέλουμε να πραγματοποιείται μόνο το *A* ή μόνο το *B*, γραμμοσκιάζουμε τις επιφάνειες των *A* και *B* με εξαίρεση την τομή τους, δηλαδή την κοινή επιφάνειά τους.

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή πραγματοποιείται ένα μόνο από τα $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ και $\mathbf{B} - \mathbf{A}$. Άρα, το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το $(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cup (\mathbf{B} - \mathbf{A})$ ή ισοδύναμα το $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}') \cup (\mathbf{A}' \cap \mathbf{B})$.



iii) Επειδή θέλουμε να μην πραγματοποιείται κανένα από τα **A** και **B**, γραμμοσκιάζουμε την επιφάνεια του **Ω** που είναι εκτός της ένωσης των **A** και **B**.

Στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι το ζητούμενο σύνολο είναι συμπληρωματικό του $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$, δηλαδή το $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})'$.

Κλασικός Ορισμός Πιθανότητας

Σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να ορίσουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου **Α** τον αριθμό:

$$\mathbf{P(A)=\frac{\Pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma\quad E\upsilon\nu o\ddot{\iota}\kappa\acute{\omega}\nu\quad \Pi\varepsilon\rho\iota\pi\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\omega\nu}{\Pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma\quad \Delta\upsilon\nu\alpha\tau\acute{\omega}\nu\quad \Pi\varepsilon\rho\iota\pi\tau\acute{\omega}\sigma\varepsilon\omega\nu}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}}.$$

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει άμεσα ότι:

1. $\mathbf{P(\Omega)=\frac{N(\Omega)}{N(\Omega)}=1}$
2. $\mathbf{P(\varnothing)=\frac{0}{N(\Omega)}=0}$
3. Για κάθε ενδεχόμενο **Α** ισχύει $\mathbf{0\le P(A)\le 1}$, αφού το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου είναι ίσο ή μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου.

Αξιωματικός Ορισμός Πιθανότητας

Έστω $\mathbf{\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_\nu\}}$ ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\mathbf{\{\omega_i\}}$ αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό, που τον συμβολίζουμε με $\mathbf{P(\omega_i)}$, έτσι ώστε να ισχύουν:

- $\mathbf{0\le P(\omega_i)\le 1}$
- $\mathbf{P(\omega_1)+P(\omega_2)+...+P(\omega_\nu)=1}$.

Τον αριθμό $\mathbf{P(\omega_i)}$ ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου $\mathbf{\{\omega_i\}}$.

Ως πιθανότητα $\mathbf{P(A)}$ ενός ενδεχομένου $\mathbf{A=\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\kappa\}\ne\varnothing}$ ορίζουμε το άθροισμα $\mathbf{P(\alpha_1)+P(\alpha_2)+...+P(\alpha_\kappa)}$, ενώ ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου $\varnothing$ ορίζουμε τον αριθμό $\mathbf{P(\varnothing)=0}$.

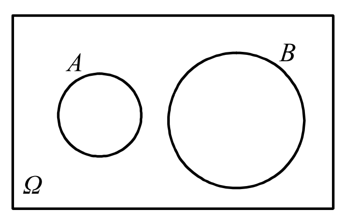
ΣΧΟΛΙΟ

Όταν έχουμε ένα δειγματικό χώρο $\mathbf{\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_\nu\}}$ και χρησιμοποιούμε τη φράση "παίρνουμε τυχαία ένα στοιχείο του **Ω**", εννοούμε ότι όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα με πιθανότητα $\mathbf{P(\omega_i)=\frac{1}{\nu},\ i=1,2,...,\nu}$.

Κανόνες Λογισμού των Πιθανοτήτων

1. Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα *A* και *B* ισχύει: $\mathbf{P(A\cup B)=P(A)+P(B)}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



A∪B

Αν $\mathbf{N(A)=\kappa}$ και $\mathbf{N(B)=\lambda}$, τότε το $\mathbf{A\cup B}$ έχει $\mathbf{\kappa+\lambda}$ στοιχεία, γιατί αλλιώς τα **Α** και **Β** δε θα ήταν ασυμβίβαστα. Δηλαδή, έχουμε $\mathbf{N(A\cup B)=\kappa+\lambda=N(A)+N(B)}$.

$$\mathbf{P(A\cup B)=\frac{N(A\cup B)}{N(\Omega)}=\frac{N(A)+N(B)}{N(\Omega)}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}+\frac{N(B)}{N(\Omega)}=P(A)+P(B)}$$

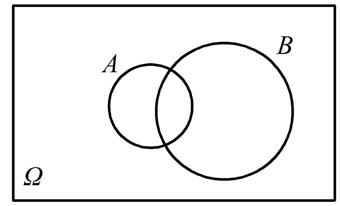
.

.

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **απλός προσθετικός νόμος** και ισχύει και για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα.

2. Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου *Ω* ισχύει: $\mathbf{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



A∪B

Για δυο ενδεχόμενα A και B έχουμε

$$\mathbf{N(A\cup B)=N(A)+N(B)-N(A\cap B)},\quad (1)$$

αφού στο άθροισμα $N(A)+N(B)$ το πλήθος των στοιχείων του $A\cap B$ υπολογίζεται δυο φορές.

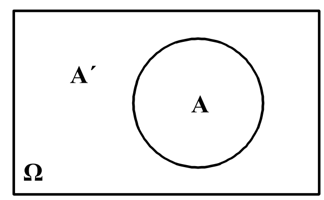
Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με $N(\Omega)$ έχουμε:

$$\mathbf{\frac{N(A\cup B)}{N(\Omega)}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}+\frac{N(B)}{N(\Omega)}-\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}\Leftrightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}.$$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **προσθετικός νόμος** .

3. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει: $\mathbf{P(A')=1-P(A)}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

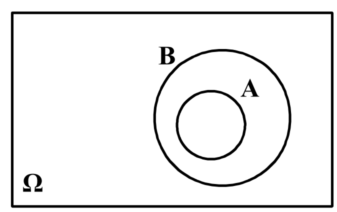


Επειδή $\mathbf{A\cap A'=\varnothing}$, δηλαδή **τα Α και** A' είναι ασυμβίβαστα, έχουμε διαδοχικά, σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο:

$$\mathbf{P(A\cup A')=P(A)+P(A')\Leftrightarrow\quad P(\Omega)=P(A)+P(A')\Leftrightarrow\ 1=P(A)+P(A')\Leftrightarrow}.$$

$$\mathbf{P(A')=1-P(A)}.$$

4. Αν $\mathbf{A\subseteq B}$, τότε $\mathbf{P(A)\le P(B)}$

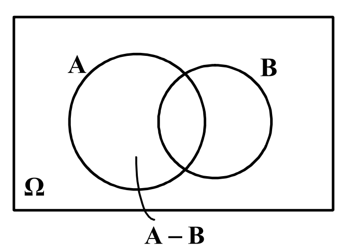


ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή $\mathbf{A\subseteq B\Leftrightarrow N(A)\le N(B)\Leftrightarrow \frac{N(A)}{N(\Omega)}\le\frac{N(B)}{N(\Omega)}\Leftrightarrow\ \ P(A)\le P(B)}$.

5. Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $\mathbf{P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Επειδή τα ενδεχόμενα $\mathbf{A-B}$ και $\mathbf{A\cap B}$ είναι ασυμβίβαστα και $\mathbf{(A-B)\cup(A\cap B)=A}$, έχουμε:

$$\mathbf{P(A)=P(A-B)+P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)}.$$