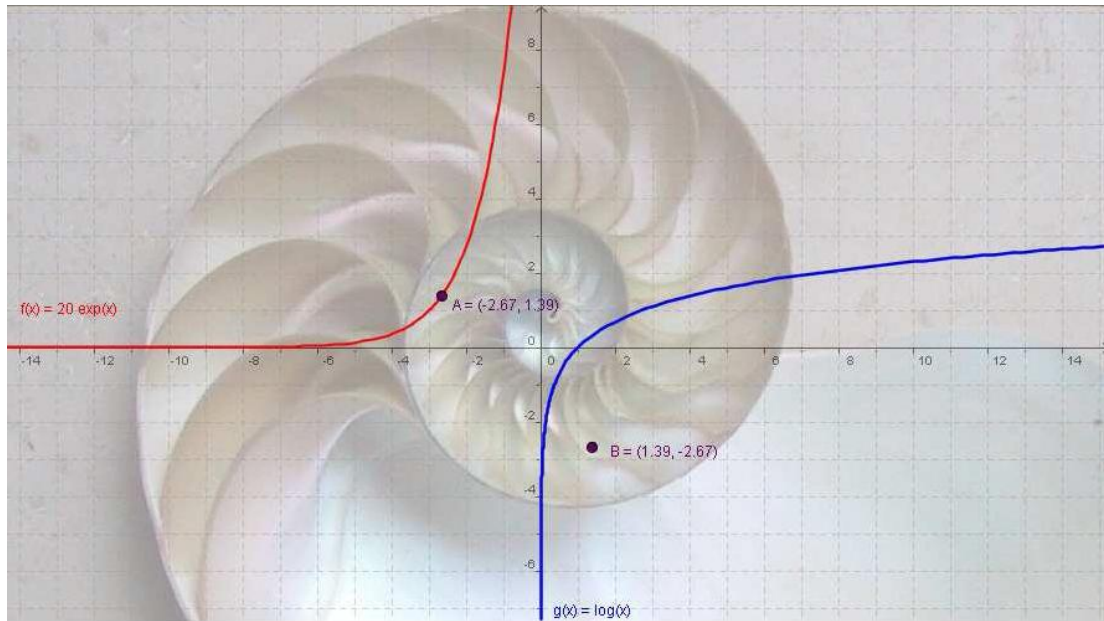


ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΕ ΤΟ GeoGebra*

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

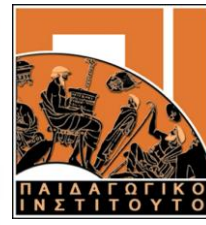
ΤΕΤΡΑΔΙΟ ΜΑΘΗΤΗ



Κώστας Γαβρίλης, Καθηγητής Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

*www.geogebra.org

ΥΠΕΠΘ / ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ «ΚΟΙΝΩΝΙΑ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ»



Γ' ΚΟΙΝΟΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΣΤΗΡΙΞΗΣ
ΕΡΓΟ ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΟΥΜΕΝΟ ΚΑΤΑ 80% ΑΠΟ ΤΟ ΕΚΤ
ΚΑΙ ΚΑΤΑ 20% ΑΠΟ ΕΘΝΙΚΟΥΣ ΠΟΡΟΥΣ
«Ολοκληρωμένη Αξιοποίηση των Τ.Π.Ε. στην Εκπαιδευτική Διαδικασία»

Τεχνική Υποστήριξη

Δικτυακός Τόπος : www.intracom-schools.gr και

Ηλεκτρονικό ταχυδρομείο : support_it@intracom-it.gr

Τηλέφωνο : 210-6679105

Fax : 210-6679106

Υπεύθυνη : κα Μπερτσά Όλγα

Περιεχόμενα

1	Τα σενάρια του CDROM.....	9
1.1	Κεφάλαιο 1 : Η έννοια της συνάρτησης	9
1.1.1	Σενάριο 1.....	9
1.1.2	Σενάριο 2.....	10
1.1.3	Σενάριο 3.....	10
1.1.4	Σενάριο 4.....	10
1.1.5	Σενάριο 5.....	10
1.1.6	Σενάριο 6.....	10
1.2	Κεφάλαιο 2 : Όριο και συνέχεια	10
1.2.1	Σενάριο 1.....	11
1.2.2	Σενάριο 2.....	11
1.3	Κεφάλαιο 3 : Παράγωγος.....	11
1.3.1	Σενάριο 1.....	11
1.3.2	Σενάριο 2.....	11
1.3.3	Σενάριο 3.....	11
1.3.4	Σενάριο 4.....	11
1.4	Κεφάλαιο 4 : Ολοκλήρωμα	12
1.4.1	Σενάριο 1.....	12
1.4.2	Σενάριο 2.....	12
1.4.3	Σενάριο 3.....	12
1.5	Κεφάλαιο 5 : Μιγαδικοί αριθμοί.....	12
1.5.1	Σενάριο 1.....	12
1.5.2	Σενάριο 2.....	12
2	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 – Η έννοια της συνάρτησης	13
2.1	ΣΕΝΑΡΙΟ 1 : Η έννοια της συνάρτησης.....	13
2.2	ΣΕΝΑΡΙΟ 2 : Μελέτη των βασικών συναρτήσεων	23
2.3	ΣΕΝΑΡΙΟ 3 : Μελέτη οικογενειών συναρτήσεων.....	33
2.4	ΣΕΝΑΡΙΟ 4 : Πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών των συναρτήσεων	45
2.5	ΣΕΝΑΡΙΟ 5 : Πράξεις συναρτήσεων.....	55
2.6	ΣΕΝΑΡΙΟ 6 : Ιδιότητες των συναρτήσεων	65
3	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 – Όριο και συνέχεια	75
3.1	ΣΕΝΑΡΙΟ 7 : Όριο συνάρτησης	75
3.2	ΣΕΝΑΡΙΟ 8 : Συνέχεια συνάρτησης και εφαρμογές	87
4	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 - Παράγωγος	97
4.1	ΣΕΝΑΡΙΟ 9 : Η έννοια της παραγώγου	97

4.2	ΣΕΝΑΡΙΟ 10 : Η παράγωγος συνάρτηση	107
4.3	ΣΕΝΑΡΙΟ 11 : Θεωρήματα του διαφορικού λογισμού	117
4.4	ΣΕΝΑΡΙΟ 12 : Εφαρμογές του διαφορικού λογισμού.....	127
5	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 - Ολοκλήρωμα	137
5.1	ΣΕΝΑΡΙΟ 13 : Αόριστο ολοκλήρωμα συνάρτησης.....	137
5.2	ΣΕΝΑΡΙΟ 14 : Μέτρηση εμβαδού χωρίου	147
5.3	ΣΕΝΑΡΙΟ 15 : Θεωρήματα και προβλήματα ολοκληρωτικού λογισμού ...	159
6	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 – Μιγαδικοί αριθμοί.....	169
6.1	ΣΕΝΑΡΙΟ 16 : Μιγαδικοί αριθμοί.....	169
6.2	ΣΕΝΑΡΙΟ 17 : Μετασχηματισμοί στο μιγαδικό επίπεδο	179

Πρόλογος

Πολλοί πιστεύουν ότι η προσπάθεια ένταξης εκπαιδευτικού λογισμικού στη μάθηση και στη διδασκαλία των μαθηματικών της Γ' Λυκείου είναι ανέφικτη, καθώς οι μαθητές προετοιμάζονται για τις πανελλήνιες εισαγωγικές εξετάσεις στις επόμενες βαθμίδες εκπαίδευσης. Όσοι πιστεύουν αυτά επικαλούνται, ως σοβαρό επιχείρημα, την έλλειψη χρόνου καθώς το πρόγραμμα των μαθηματικών είναι αρκετά μεγάλο, σε σχέση με τον διατιθέμενο χρόνο και έτσι δεν αφήνει κάποιο περιθώριο για διδασκαλία με τη βοήθεια του υπολογιστή. Προφανώς πιστεύουν ότι η ένταξη του λογισμικού στη διδακτική ατζέντα των εκπαιδευτικών απαιτεί το ξόδεμα πολύτιμου χρόνου, καθώς απαιτείται (1) χρόνος για τη μάθηση των χειρισμών και των ιδιαίτερων λειτουργιών του λογισμικού, (2) χρόνος για τη δημιουργία – κατασκευή του κάθε περιβάλλοντος από τους μαθητές και (3) χρόνος σε οπτικές διερευνήσεις. Έτσι νομίζουν ότι ο χρόνος που απομένει για τη μάθηση τεχνικών και μεθοδολογιών αρκούντως χρήσιμων στις εξετάσεις είναι περιορισμένος και δεν αρκεί για να καταστούν οι μαθητές ικανοί για επιτυχίες.

Δε συμμεριζόμαστε την άποψη αυτή πλήρως καθώς πιστεύουμε ότι οι εκπαιδευτικοί που διδάσκουν τα μαθηματικά της Γ' Λυκείου μπορούν να αντικαταστήσουν πολλές διδασκαλίες που κάνουν στον πίνακα με την κιμωλία με τον υπολογιστή. Αρκεί να υπάρχει κατάλληλο λογισμικό και κατάλληλα σενάρια τα οποία επιτρέπουν στους μαθητές και στον εκπαιδευτικό να διερευνούν κατάλληλα φαινόμενα προβληματισμού και μάθησης με τη χρήση απλών και κατανοητών υπολογιστικών εργαλείων. Ακόμα, έχουμε τη γνώμη ότι η μάθηση τεχνικών και μεθοδολογιών για τη διαπραγμάτευση εννοιών και φαινομένων των μαθηματικών, είναι ελλιπής και αναποτελεσματική όταν δε συνοδεύεται από βαθιά κατανόηση των εννοιών αυτών. Για παράδειγμα, η διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου, στηρίζεται στην περιγραφή φαινομένων της κίνησης και της εφαπτομένης της καμπύλης μιας συνάρτησης, χωρίς να μπορούν οι μαθητές να χειριστούν τα φαινόμενα αυτά και να τα προσεγγίσουν νοητικά με τον δικό τους τρόπο.

Το CDROM που δημιουργήσαμε μπορεί να ενταχθεί χωρίς να δημιουργεί προβλήματα στη διδακτική ατζέντα του καθηγητή των μαθηματικών της Γ' Λυκείου καθώς: (1) Δεν απαιτούνται ιδιαίτερες γνώσεις του λογισμικού. (2) Τα θέματα που διαπραγματεύεται αφορούν ακριβώς τη διδακτέα ύλη του μαθήματος. (3) Οι μικρόκοσμοι που δημιουργήσαμε μπορούν να παρουσιαστούν από τον εκπαιδευτικό στην τάξη και να γίνουν αντικείμενο διερεύνησης όλης της τάξης. (4) Οι χειρισμοί που απαιτούνται είναι ελάχιστοι και αφορούν τη διαχείριση έτοιμων αλλά επαναχρησιμοποιήσιμων μικρόκοσμων. (5) Το CDROM μπορεί να τρέχει στο διαδίκτυο και από αυτή την άποψη μπορεί ο κάθε μαθητής να το χρησιμοποιεί και από το σπίτι του.

Ελπίζουμε, ότι η πρότασή μας θα βοηθήσει τους μεν καθηγητές των μαθηματικών να αποκτήσουν και εναλλακτικούς τρόπους διδασκαλίας δύσβατων εννοιών, όπως αυτές της ανάλυσης, τους δε μαθητές να προσεγγίσουν οι ίδιοι έννοιες και σχέσεις με πολλαπλούς τρόπους.

Εισαγωγή

Το παρόν λογισμικό αφορά τα Μαθηματικά της Γ' Λυκείου. Προσεγγίζει στις έννοιες των συναρτήσεων και των μιγαδικών αριθμών με ένα ιδιαίτερο τρόπο με τον οποίο δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να εμπλέκονται σε διερευνήσεις με τις πιο σημαντικές έννοιες των σχολικών τους μαθηματικών αξιοποιώντας τα εργαλεία που προσφέρει το εκπαιδευτικό λογισμικό GeoGebra.

Με τον όρο 'διερεύνηση' εννοούμε τη δράση την οποία αναπτύσσουν οι μαθητές όταν εξερευνούν ένα υπολογιστικό περιβάλλον (ένα μικρόκοσμο) όπως αυτά που προτείνουμε εδώ.

Τα εργαλεία εξερεύνησης που καλούνται να χρησιμοποιήσουν κατά την εξερεύνηση είναι δύο κατηγοριών. Είναι τα διαθέσιμα στο περιβάλλον υπολογιστικά εργαλεία καθώς και οι γνώσεις τους που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αναζήτηση και την επεξεργασία των πληροφοριών που αντλούν από αυτό. Ακόμα, το γεγονός ότι για να περιγράψουμε τον όρο 'διερεύνηση' χρησιμοποιούμε τον όρο 'εξερεύνηση' δηλώνει ότι η πρόσκληση την οποία απευθύνουμε στον κάθε μαθητή δεν είναι άλλο από μια εξερεύνηση σε ένα άγνωστο περιβάλλον.

Οι μικρόκοσμοι που περιλαμβάνονται εδώ, αφορούν τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων ή οικογενειών συναρτήσεων που συνήθως περιέχονται στα εκπαιδευτικά - σχολικά εγχειρίδια. Η χρήση παραμέτρων στη θέση των συντελεστών των εξισώσεων με τις οποίες ορίζονται οι συναρτήσεις, δίνει τη δυνατότητα, αφενός να εξετάζονται οι κοινές ιδιότητες αυτών για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων αλλά και να εξερευνώνται οι ειδικές περιπτώσεις αυτών. Η οπτική εξερεύνηση στο γράφημα των συναρτήσεων και η αντιστοίχισή της με την εξίσωση αυτών είναι ένας κατάλληλος τρόπος για να αντλούν οι μαθητές συμπεράσματα για τις ιδιότητες αυτών. Τέλος, την εξήγηση των φαινομένων που παρατηρούνται στο υπολογιστικό περιβάλλον και την απόδειξη των σχέσεων που εμπλέκονται σ' αυτά τα φαινόμενα καλείται να διατυπώσει ο χρήστης ώστε να ολοκληρωθεί αυτό που παραπάνω καλέσαμε "διερεύνηση".

Οι συναρτησιακοί μικρόκοσμοι, που προτείνονται εδώ, είναι κατανεμημένοι σύμφωνα με τις ενότητες του σχολικού βιβλίου. Σε κάθε ενότητα οι προτεινόμενοι μικρόκοσμοι είναι ομαδοποιημένοι σε σενάρια, με βάση μια συγκεκριμένη κατηγοριοποίηση η οποία έχει σκοπό να διευκολύνει την εξαγωγή γενικών συμπερασμάτων. Ελπίζουμε αυτά τα γενικά συμπεράσματα καθώς εξάγονται από τα συναρτησιακά φαινόμενα, τα οποία οριοθετούνται από τις οπτικές εικόνες των μεταβολών θα αποτελέσουν τις δεξαμενές από τις οποίες θα αντλούνται πληροφορίες και για τις μελλοντικές διερευνήσεις σχετικών θεμάτων.

1 Τα σενάρια του CDROM

1.1 Κεφάλαιο 1 : Η έννοια της συνάρτησης

Η ενότητα αυτή περιέχει σενάρια, εργασίες και διερευνήσεις που αφορούν την έννοια της συνάρτησης.

Η έννοια της συνάρτησης και ο τρόπος με τον οποίο την διαχειριζόμαστε είναι από τα σημαντικότερα ζητήματα των σύγχρονων μαθηματικών. Με την βοήθεια της μελετάμε και ερμηνεύουμε φαινόμενα των διαφόρων επιστημών αλλά και της καθημερινότητας. Είναι το κύριο εργαλείο περιγραφής και μελέτης των μεταβολών, όπου και να συμβαίνουν αυτές, αρκεί να μπορούμε να αντλήσουμε δεδομένα από αυτές. Η βαθιά γνώση επομένως της έννοιας της συνάρτησης καθώς και η χρήση της ως εργαλείο μελέτης και έκφρασης των μεταβολών είναι σημαντικά στοιχεία των σύγχρονων ανθρώπων που θέλουν να κατανοούν τον κόσμο και να προσαρμόζονται στις σύγχρονες απαιτήσεις της ζωής τους.

Στα σενάρια που προτείνουμε σ' αυτή την ενότητα αλλά και στις επόμενες, δίνεται η ευκαιρία σε κάθε μαθητή, ακόμα και σ' αυτόν που δεν είναι εξοικειωμένος με την χρήση εκπαιδευτικών λογισμικών των μαθηματικών, να προσεγγίσει την έννοια και τις ιδιότητες της συνάρτησης με ένα ολοκληρωμένο τρόπο.

- Μπορεί να χειρίζεται ο ίδιος φαινόμενα ή προσομοιώσεις φαινομένων στην επιφάνεια εργασίας και να παρακολουθεί τις συμμεταβολές των μεγεθών τους, των αριθμητικών τους τιμών καθώς και τον τρόπο που αυτά συμμεταβάλλονται στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.
- Μπορεί να επεξεργάζεται άμεσα την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης και να παρακολουθεί πώς μεταβάλλεται ο τύπος της.
- Μπορεί να μεταβάλλει τον τύπο της και να παρακολουθεί τις μεταβολές στο γράφημά της.
- Μπορεί επίσης να χειρίζεται με τη βοήθεια μεταβολέων τους συντελεστές των εξισώσεων και να παρατηρεί τι μεταβάλλεται και τι όχι στο γράφημα της συνάρτησης.

Μερικά από τα θέματα αυτής της ενότητας αντλούνται από το σχολικό βιβλίο με αποτέλεσμα να μπορεί κάθε μαθητής να τα προσεγγίσει με ένα εναλλακτικό τρόπο.

Περιέχει έξι σενάρια για την έννοια της συνάρτησης

1.1.1 Σενάριο 1

Οι εργασίες που προτείνονται εδώ παρουσιάζουν την έννοια της μεταβολής και της συμμεταβολής μεγεθών που ορίζονται στο πλαίσιο προβλημάτων από την γεωμετρία ή προσομοιώσεις προβλημάτων της καθημερινότητας.

1.1.2 Σενάριο 2

Στο δεύτερο σενάριο προτείνονται θέματα που αφορούν μερικές από τις βασικές συναρτήσεις που οι μαθητές της Γ' τάξης διδάχθηκαν τα προηγούμενα χρόνια. Έτσι, εκτός από την επανάληψη των θεμάτων αποκαθίσταται και μια συνέχεια στον τρόπο προσέγγισης ώστε να δημιουργηθεί μια όσο το δυνατόν ολοκληρωμένη για την έννοια της συνάρτησης και για τις διάφορες κατηγορίες συμμεταβολών.

1.1.3 Σενάριο 3

Το τρίτο σενάριο περιλαμβάνει την μελέτη οικογενειών συναρτήσεων. Δηλαδή συναρτήσεων που ορίζονται με τη βοήθεια ενιαίων αλγεβρικών τύπων και που διαφέρουν ως προς τις τιμές των παραμέτρων τους. Έτσι οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να μελετήσουν σε τι διαφέρουν και τι διατηρείται σταθερό στις συναρτήσεις της ίδιας οικογένειας και μέσω αυτών να οργανώσουν τα ποιοτικά χαρακτηριστικά αυτών των οικογενειών.

1.1.4 Σενάριο 4

Το τέταρτο σενάριο περιλαμβάνει την μελέτη οικογενειών συναρτήσεων. Δηλαδή συναρτήσεων που ορίζονται με τη βοήθεια ενιαίων αλγεβρικών τύπων και που διαφέρουν ως προς τις τιμές των παραμέτρων τους. Έτσι οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να μελετήσουν σε τι διαφέρουν και τι διατηρείται σταθερό στις συναρτήσεις της ίδιας οικογένειας και μέσω αυτών να οργανώσουν τα ποιοτικά χαρακτηριστικά αυτών των οικογενειών.

1.1.5 Σενάριο 5

Στο πέμπτο σενάριο οι μαθητές καλούνται να μελετήσουν το αποτέλεσμα των πράξεων της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού, του ηλίκου και της σύνθεσης δυο συναρτήσεων. Καλούνται δηλαδή να διερευνήσουν ποιές ιδιότητες των αρχικών συναρτήσεων παρεμβαίνουν και πώς στις ιδιότητες της συνάρτησης αποτέλεσμα.

1.1.6 Σενάριο 6

Η μονοτονία και τα ακρότατα συνάρτησης, η ιδιότητα του 1-1 και ορισμός της αντίστροφης συνάρτησης είναι τα θέματα του τελευταίου σεναρίου αυτής της ενότητας.

1.2 Κεφάλαιο 2 : Όριο και συνέχεια

Όπως δηλώνεται και στον τίτλο αυτής της ενότητας τα δυο σενάρια που προτείνονται αφορούν στις έννοιες του ορίου, της συνέχεις και σχετικών με αυτές θεωρημάτων.

Με την μελέτη αυτών των ιδιοτήτων οι μαθητές έρχονται σε επαφή με σημαντικές ιδιότητες των συναρτήσεων με ένα διαφορετικό τρόπο από αυτόν που παρουσιάζονται στο σχολικό βιβλίο αλλά και γενικότερα στα σχετικά διδακτικά εγχειρίδια. Με εργαλεία την μεγέθυνση του γραφήματος σε ένα σημείο του αλλά και το ορθογώνιο που ορίζεται από τα δ και ϵ οι μαθητές μπορούν να "δουν" πολύ κοντά σε ένα σημείο της καμπύλης. Η διαδικασία αυτή που ζωντανεύει με τα ίδια τα χέρια των μαθητών για αρκετά μικρές τιμές του δ και του ϵ εύκολα μπορεί να επαναληφθεί νοητικά για όσο μικρές τιμές θέλουν. Και η εξήγηση για το φαινόμενο αυτό δεν είναι τίποτα άλλο από την λεκτική και αλγεβρική διατύπωση της έννοιας του ορίου σε ένα σημείο της καμπύλης.

Η έννοια της συνέχειας και τα θεωρήματα Bolzano και ενδιάμεσων τιμών είναι λογικά επακόλουθα της έννοιας του ορίου. Η διερεύνησή τους θα εμπλουτίσει τους μαθητές με νοητικές εικόνες εργαλεία που θα τους είναι χρήσιμα σε κάθε ανάλογη περίπτωση. Περιέχει δυο σενάρια για τις έννοιες του ορίου και της συνέχειας της συνάρτησης

1.2.1 Σενάριο 1

Στο σενάριο αυτό οι μαθητές επεξεργάζονται την έννοια του ορίου σε ένα σημείο μιας συνάρτησης. Καλούνται να διερευνήσουν το όριο μερικών τύπων συναρτήσεων με τη βοήθεια ενός ορθογωνίου του οποίου οι δυο διαστάσεις ορίζονται για πολύ μικρές τιμές των μεταβολών δ και ϵ .

1.2.2 Σενάριο 2

Οι προτεινόμενες εργασίες του δεύτερου σεναρίου αναφέρονται στην έννοια της συνέχειας της συνάρτησης καθώς και στα θεωρήματα που αφορούν τις ρίζες της και το πρόσημο των τιμών της.

1.3 Κεφάλαιο 3 : Παράγωγος

Σ' αυτή την ενότητα οι μαθητές διερευνούν τον ρυθμό μεταβολής της κλίσης της εφαπτομένης καμπύλης σ' ένα σημείο της. Μ' άλλα λόγια μελετούν την έννοια του παράγωγου αριθμού σε ένα σημείο μιας συνάρτησης καθώς και την παράγωγο συνάρτηση που προκύπτει ως συνάρτηση των παραγώγων της σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της.

Ακόμα, μελετούν τον τρόπο σύνδεσης της έννοιας της παραγώγου με τις ιδιότητες της μονοτονίας, των ακροτάτων και της κυρτότητας των συναρτήσεων και χρησιμοποιούν την παράγωγο για να λύσουν προβλήματα μεγίστων - ελαχίστων που μερικά από αυτά περιέχονται στο σχολικό βιβλίο.

Περιέχει τρία σενάρια για την έννοια της παραγώγου συνάρτησης και των σχετικών με αυτή την έννοια

1.3.1 Σενάριο 1

Το σενάριο αυτό αφορά στην έννοια της εφαπτομένης καμπύλης. Οι μαθητές προσεγγίζουν την έννοια της κλίσης και του λόγου μεταβολής και μέσω αυτών στην έννοια της εφαπτομένης σε ένα σημείο της.

1.3.2 Σενάριο 2

Με το δεύτερο σενάριο οι μαθητές εμπλέκονται στον ορισμό της παραγώγου συνάρτησης με τη βοήθεια της μεταβολής της κλίσης της εφαπτομένης.

1.3.3 Σενάριο 3

Στο τρίτο σενάριο οι μαθητές διαπραγματεύονται τα σημαντικά θεωρήματα του διαφορικού λογισμού, όπως το θεώρημα της μέσης τιμής, το θεώρημα της μονοτονίας και των ακροτάτων, το θεώρημα της κυρτότητας και τέλος διερευνούν την έννοια της ασύμπτωτης μιας συνάρτησης

1.3.4 Σενάριο 4

Στο τελευταίο σενάριο οι μαθητές εμπλέκονται με προβλήματα μεγίστων - ελαχίστων τα οποία περιέχονται στο σχολικό βιβλίο.

1.4 Κεφάλαιο 4 : Ολοκλήρωμα

Με την ενότητα αυτή συμπληρώνονται οι βασικές έννοιες των συναρτήσεων όπως περιέχονται στο σχολικό βιβλίο.

Οι έννοιες και οι ιδιότητες του ολοκληρωτικού λογισμού διαπραγματεύονται με τρόπους ανάλογους με αυτούς των προηγούμενων ενοτήτων. Οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να διαπραγματευτούν την έννοια του αόριστου ολοκληρώματος σε στενή σχέση με αυτή της παραγώγου και στη συνέχεια αφού διερευνήσουν τον τρόπο υπολογισμού του εμβαδού χωρίων τα οποία ορίζονται με τη βοήθεια συναρτήσεων, συνδέουν με απλό τρόπο τις δυο έννοιες, του αόριστου ολοκληρώματος και του εμβαδού του χωρίου που ορίζεται κάτω από μια συνάρτηση. Περιέχει τρία σενάρια για τις έννοιες του ολοκληρώματος

1.4.1 Σενάριο 1

Το πρώτο σενάριο αναφέρεται στην έννοια της αρχικής συνάρτησης. Οι μαθητές διερευνούν τον τρόπο ορισμού της αρχικής μιας δεδομένης συνάρτησης.

1.4.2 Σενάριο 2

Στο δεύτερο σενάριο οι μαθητές διαπραγματεύονται τον υπολογισμό του εμβαδού χωρίου που ορίζεται είτε από μια συνάρτηση. Διαιρώντας το χωρίο σε ορθογώνια ίσου πλάτους και συνδέουν το αποτέλεσμα της μέτρησης με την τιμή που δίνει η αρχική συνάρτηση της δεδομένης σε συγκεκριμένο σημείο. Δηλαδή συνδέουν το εμβαδόν του χωρίου με το αόριστο ολοκλήρωμα, δηλαδή με το ορισμένο ολοκλήρωμα.

1.4.3 Σενάριο 3

Στο τελευταίο σενάριο οι μαθητές διερευνούν το θεώρημα της μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού καθώς και το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ δυο συναρτήσεων είτε μεταξύ μιας συνάρτησης και της εφαπτομένης σε σημείο της. Εφαρμογές του ολοκληρωτικού λογισμού

1.5 Κεφάλαιο 5 : Μιγαδικοί αριθμοί

Η ενότητα αυτή διαπραγματεύεται τους μιγαδικούς αριθμούς και την αναπαράστασή τους στο μιγαδικό επίπεδο.

Στο μιγαδικό επίπεδο οι μαθητές διαπραγματεύονται την αναπαράσταση των συζυγών μιγαδικών αριθμών και διερευνούν σχέσεις που συνδέονται στενά με το μέτρο των μιγαδικών αριθμών.

Ακόμα, καθώς μπορούν να διαπραγματεύονται μιγαδικούς αριθμούς των οποίων το πραγματικό ή και το φανταστικό μέρος τους μπορεί να μεταβάλλεται, έρχονται σε επαφή με τις έννοιες του γεωμετρικού τόπου και του μετασχηματισμού αυτών. Περιέχει δυο σενάρια για τις έννοιες των μιγαδικών αριθμών

1.5.1 Σενάριο 1

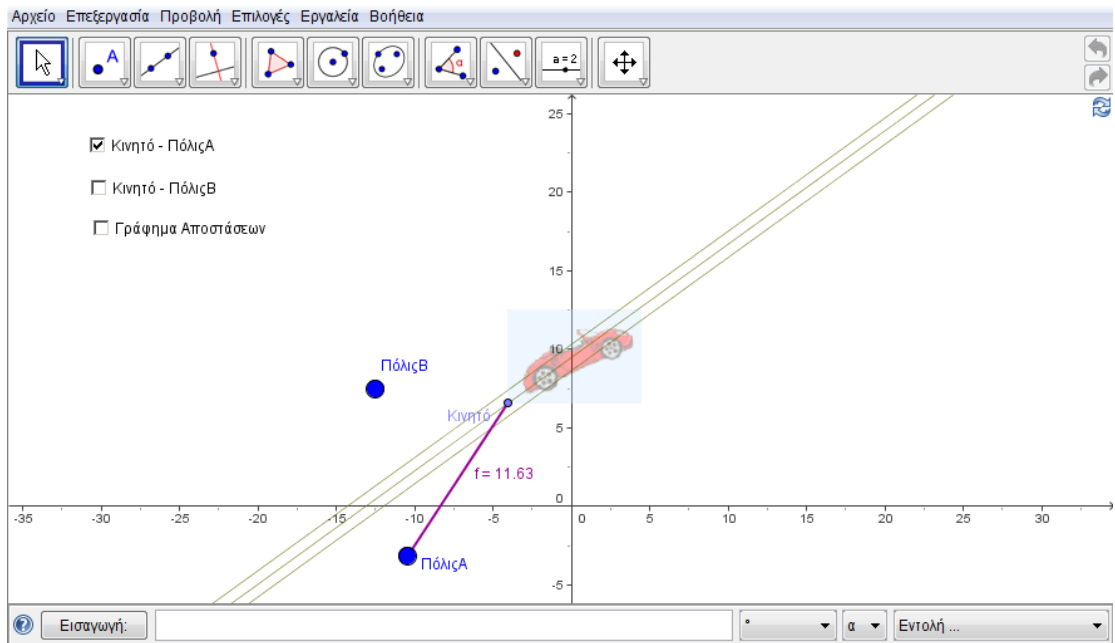
Το σενάριο αυτό αφορά το μιγαδικό επίπεδο, τον τρόπο αναπαράστασης των μιγαδικών αριθμών σ' αυτό. Ακόμα οι μαθητές διερευνούν σχέσεις μεταξύ μιγαδικών αριθμών, των συζυγών τους και των μέτρων τους.

1.5.2 Σενάριο 2

Το δεύτερο σενάριο αφορά στους γεωμετρικούς τόπους των μιγαδικών αριθμών καθώς και στους μετασχηματισμούς καμπύλων που ορίζονται στο μιγαδικό επίπεδο.

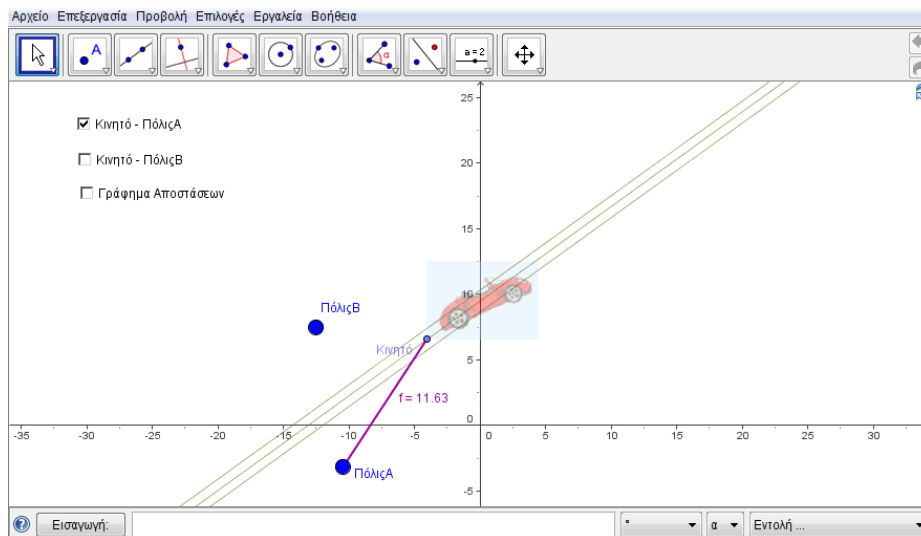
2 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 – Η έννοια της συνάρτησης

2.1 ΣΕΝΑΡΙΟ 1 : Η έννοια της συνάρτησης



Εργασία 1: Ο αυτοκινητόδρομος

Δυο πόλεις Α και Β βρίσκονται κοντά σε έναν αυτοκινητόδρομο. Ένα "κινητό" καθώς κινείται κατά μήκος του αυτοκινητόδρομου μπορεί, με τη βοήθεια ενός οργάνου, να μετρά συνεχώς τις αποστάσεις του από τις δυο πόλεις. Μπορείτε να ερευνήσετε τον τρόπο μεταβολής των αποστάσεων;



Τμήμα:

Όνομ/νυμο μαθητών:

1.
2.
3.

Διερευνήσεις:

1. Πώς μεταβάλλεται κάθε απόσταση καθώς το κινητό κινείται στον αυτοκινητόδρομο;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Για να δείτε πώς μεταβάλλεται κάθε μια απόσταση ξεχωριστά κρύψτε την άλλη επιλέγοντας το αντίστοιχο κουμπί.

Μετακινήστε το "κινητό" αργά και παρακολουθήστε πώς μεταβάλλεται η απόσταση "Κινητό - Πόλις Α" ή "Κινητό - Πόλις Β". Περιγράψτε με δικά σας λόγια τον τρόπο μεταβολής. Προσπαθήστε να απαντήσετε σε ερωτήματα όπως "Πότε αυξάνει και πότε μειώνεται η απόσταση καθώς το κινητό κινείται προς μια κατεύθυνση". Επιλέξτε "Ανανέωση (Refresh)" για να ανανεώσετε την σελίδα.

Πώς συµµεταβάλλονται οι δυο αποστάσεις;

Σηµειώστε την απάντησή σας εδώ:

Για να δείτε πώς συµµεταβάλλονται οι δυο αποστάσεις επιλέξτε και τα δυο κουµπιά "Κινητό-ΠόλιςΑ" και "Κινητό-ΠόλιςΒ" και κινήστε αργά το σηµείο που αναπαριστά το κινητό και παρατηρήστε πώς µεταβάλλονται ταυτόχρονα (συµµεταβάλλονται) οι δυο αποστάσεις. Περιγράψτε όταν αυξάνει ή µειώνεται η µια πώς µεταβάλλεται η άλλη καθώς το κινητό κινείται προς µια κατεύθυνση. Επιλέξτε το τρίτο κουµπί "Γράφηµα Αποστάσεων" για να εµφανίσετε το γράφηµα των δυο αποστάσεων και προσπαθήστε µέσω αυτού να περιγράψετε τον τρόπο συµµεταβολής των δυο αποστάσεων.

2. Διερευνήστε ειδικές περιπτώσεις. Για παράδειγμα διερευνήστε:

- Σε ποια θέση των πόλεων η συµµεταβολή των αποστάσεων είναι γραµµική;
- Πώς συµµεταβάλλονται οι δυο αποστάσεις όταν οι δυο πόλεις είναι συµµετρικές ως προς τον άξονα του δρόµου;
- Πώς συµµεταβάλλονται οι δυο αποστάσεις αν η µία πόλις (ή και οι δυο) βρίσκεται πάνω στον αυτοκινητόδροµο.

Σηµειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε µε το ποντίκι σας κάθε πόλη στη θέση που επιθυµείτε.

Παρατηρήστε µε προσοχή το γράφηµα των συµµεταβολών.

3. Μπορείτε να βρείτε σε ποιές περιπτώσεις η συµµεταβολή είναι συνάρτηση;

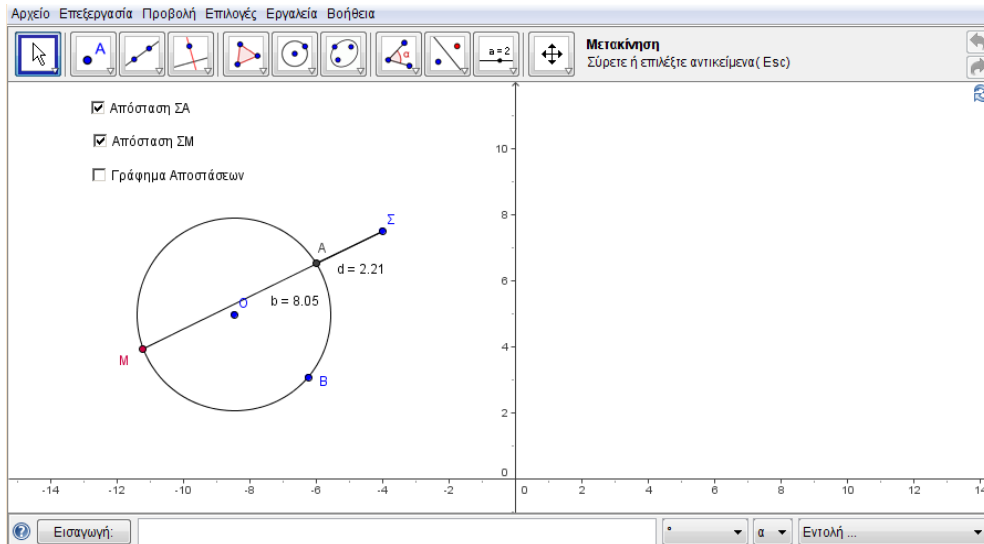
Σηµειώστε την απάντησή σας εδώ:

Για να είναι συνάρτηση πρέπει σε κάθε τιμή της µιας απόστασης να αντιστοιχεί µόνο µια τιμή στην άλλη. Χρησιμοποιήστε το γράφηµα της συµµεταβολής. Για να είναι η συµµεταβολή συνάρτηση πρέπει κάθε ευθεία κάθετη στον άξονα χ'χ να τέµνει την καµπύλη µόνο µια φορά

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του µικρόκοσµου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

Εργασία 2: Η κίνηση σημείου σε κύκλο

Το σημείο M μπορεί να κινείται ελεύθερα πάνω στον κύκλο. Ερευνήστε τον τρόπο που μεταβάλλονται τα δυο τμήματα στα οποία διαιρείται η χορδή AM από το σημείο Σ .



Τμήμα:

Όνομ/νυμο μαθητών:

1.
2.
3.

Διερευνήσεις:

1. Πώς μεταβάλλεται κάθε μήκος καθώς το σημείο κινείται στον κύκλο;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Για να δείτε πώς μεταβάλλεται μόνο το μήκος του ενός τμήματος κρύψτε το άλλο.

Δηλαδή, επιλέξτε με δεξί κλικ πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που θέλετε να κρύψετε και στο μενού επιλογών που θα εμφανιστεί επιλέξτε την εντολή " Δείξτε το αντικείμενο " ώστε να είναι απενεργοποιημένη. Για να επαναφέρετε το ευθύγραμμο τμήμα ώστε να είναι ορατό, μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5) ή να επιλέξετε ένα από τα ορατά μέρη του σχήματος με δεξί κλικ και να επιλέξετε "Ιδιότητες". Στον κατάλογο που θα εμφανιστεί μπορείτε να επιλέξετε το τμήμα που αποκρύψατε και στη συνέχεια να επιλέξετε " Δείξτε το αντικείμενο ".

2. Πώς συµµεταβάλλονται τα µήκη των δυο ευθυγράµµων τµηµάτων ΣΑ και ΣΜ;

Σηµειώστε την απάντησή σας εδώ:

Για να δείτε πώς συµµεταβάλλονται τα µήκη των δυο ευθυγράµµων τµηµάτων κινείστε αργά το σηµείο Μ και παρατηρήστε όταν αυξάνει ή µειώνεται το ένα µήκος πώς µεταβάλλεται το άλλο.

Κάντε δικά σας ερωτήµατα και τρόπους µεταβολής. Σε κάθε περίπτωση µην παραλείψετε να παρατηρείτε το γράφηµα που δηµιουργείται.

3. Διερευνήστε ειδικές περιπτώσεις. Για παράδειγμα διερευνήστε:

- Πώς θα συµµεταβάλλονται τα µήκη των ΣΜ και ΣΑ όταν µετακινήσετε το Σ ώστε να είναι πάνω στον κύκλο;
- Πώς θα συµµεταβάλλονται τα µήκη των ΣΜ και ΣΑ όταν µετακινήσετε το Σ ώστε να είναι εκτός του κύκλου;
- Πώς θα συµµεταβάλλονται τα µήκη των ΣΜ και ΣΑ όταν µετακινήσετε το Σ ώστε να είναι στο κέντρο του κύκλου;

Σηµειώστε την απάντησή σας εδώ:

Παρατηρήστε µε προσοχή το γράφηµα των συµµεταβολών των δυο ευθυγράµµων τµηµάτων σε κάθε µια ειδική περίπτωση.

4. Μπορείτε να βρείτε µια εξίσωση (ένα τύπο) που να περιγράφει τη συµµεταβολή των ΣΜ και ΣΑ;

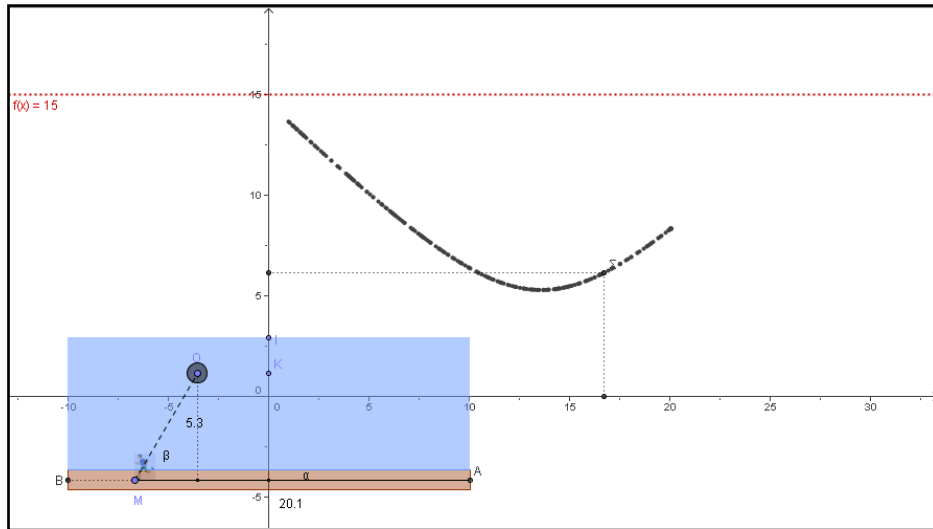
Σηµειώστε την απάντησή σας εδώ:

Ονοµάστε το ένα µήκος µε το γράµµα χ και το άλλο µε το γράµµα ψ και στη συνέχεια διατυπώστε τη σχέση αυτών όπως περιγράφεται στο σχετικό θεώρηµα της δύναµης σηµείου ως προς κύκλο.

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του µικρόκοσµου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

Εργασία 3: Ο δρομέας

Ένας δρομέας σκοπεύει να ξεκινήσει από το σημείο A με σκοπό να φτάσει στο νησί O κάνοντας τον λιγότερο δυνατό χρόνο. Γνωρίζει ότι η μέγιστη ταχύτητα με την οποία μπορεί να τρέξει είναι 10 Km/h ενώ μπορεί να κολυμπήσει με ταχύτητα το πολύ 3 Km/h. Μπορείτε να ερευνήσετε πώς πρέπει να κινηθεί για να επιτύχει το σκοπό του;



Διερευνήσεις:

4. Κινείτε το σημείο M από το A μέχρι το B και παρατηρήστε το ίχνος του σημείου Σ. Τι αναπαριστά το ίχνος του σημείου Σ;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε το σημείο M στη θέση του A και στη συνέχεια στη θέση του B. Τι είδους καμπύλη σχηματίζουν τα ίχνη του Σ;

Κάντε δεξί κλικ πάνω στο σημείο Σ και επιλέξτε "Επαναπροσδιορισμός". Στο πλαίσιο που εμφανίζεται μπορείτε να δείτε τι αναπαριστούν τα ίχνη της καμπύλης.

5. Πώς συµμεταβάλλονται οι δυο αποστάσεις α και β;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Για να δείτε πώς συµμεταβάλλονται οι δυο αποστάσεις κινήστε αργά το σημείο που αναπαριστά το κινητό και παρατηρήστε όταν αυξάνει ή ελαττώνεται η μια απόσταση πώς μεταβάλλεται η άλλη. Δοκιμάστε τα δικά σας ερωτήματα για να μάθετε τον τρόπο συµμεταβολής.

6. Διερευνήστε για το πρόβλημα του δρομέα Σύμφωνα με το πρόβλημα, ο δρομέας μπορεί να κινείται με 5 Km/h και να κολυπά με ταχύτητα 2 Km/h. Μπορείτε με την εντολή "Επαναπροσδιορισμός" να καθορίσετε το σημείο Σ να αναπαριστά τον τρόπο συμμεταβολής της απόστασης α και του χρόνου που χρειάζεται για να κάνει όλη τη διαδρομή από το Α μέχρι το νησί Ο; Μπορείτε να βρείτε σε ποιά περίπτωση θα κάνει το ελάχιστο δυνατό χρόνο;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

7. Στην επιφάνεια εργασίας υπάρχει σχεδιασμένη η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi=15$. Αν επιλέξετε "Επαναπροσδιορισμός" Μπορείτε να τροποποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης. Ποιά συνάρτηση πρέπει να πληκτρολογήσετε ώστε η γραφική της παράσταση να ταυτίζεται με την γραμμή του ίχνους της;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Σύμφωνα με το πρόβλημα ο δρομέας μπορεί να επιλέξει να κινηθεί στο δρόμο για α Km και να κολυπήσει β Km μέχρι να φτάσει στο νησί. Ο χρόνος που θα κάνει αυτή τη διαδρομή θα είναι $\alpha/5$ ώρες για την πρώτη διαδρομή και $\beta/2$ για την δεύτερη διαδρομή.

Επιλέξτε με δεξί κλικ πάνω στο σημείο Σ και στον κατάλογο που θα ανοίξει επιλέξτε "Ιδιότητες". Στο νέο κατάλογο επιλέξτε στο μενού "Δείξε το αντικείμενο" να δείχνει "Όνομα&Τιμή". Έτσι θα μπορείτε να παρακολουθείτε πώς μεταβάλλονται οι συντεταγμένες του Σ.

Παρατηρήστε προσεκτικά την καμπύλη του ίχνους του σημείου Σ.

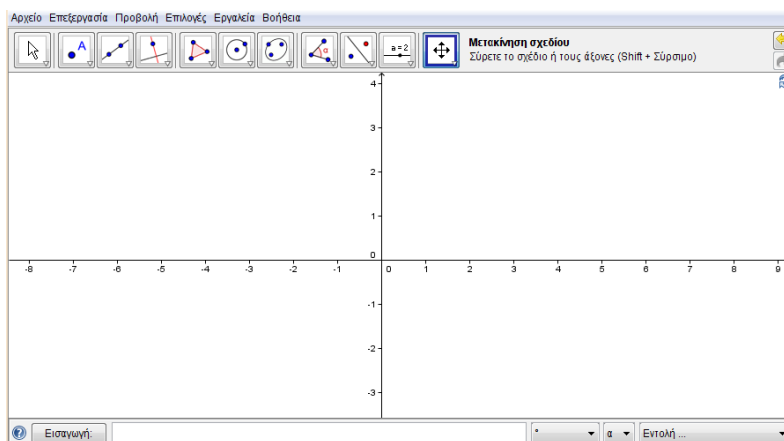
Επιλέξτε με δεξί κλικ πάνω στο σημείο Σ και στον κατάλογο που θα ανοίξει επιλέξτε "Ιδιότητες". Στο νέο κατάλογο επιλέξτε στο μενού "Δείξε το αντικείμενο" να δείχνει "Όνομα&Τιμή". Έτσι θα μπορείτε να παρακολουθείτε πώς μεταβάλλονται οι συντεταγμένες του Σ.

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

Εργασία 4: Η έννοια της συνάρτησης

Οι προηγηθείσες δραστηριότητες είχαν σκοπό να αναδείξουν την έννοια της συνάρτησης ως συμμεταβολή δυο μεγεθών, μέσα από μοντέλα και προσομοιώσεις στο ψηφιακό περιβάλλον του λογισμικού Geogebra. Δύο είναι τα κύρια ερωτήματα των διερευνήσεων αυτών στα οποία καλείστε να απαντήσετε και να συζητήσετε στη τάξη.

- Πότε η συμμεταβολή των δυο ποσοτήτων είναι συνάρτηση;
- Πώς εκφράζεται η συμμεταβολή αυτή αλγεβρικά σε κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις;



Διερευνήσεις:

1. Διερευνήστε τη συμμεταβολή των συντεταγμένων σημείου που κινείται σε έλλειψη Στην περιοχή του λογισμικού, σχεδιάστε μια έλλειψη με τρία σημεία, επιλέγοντας τα σημεία (-3,0), (3,0) και (0,2). Στο σχήμα που προκύπτει επιλέξτε ένα σημείο A να κινείται ελεύθερα και εμφανίστε τις συντεταγμένες του. Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο συμμεταβολής των δυο συντεταγμένων; Είναι συνάρτηση η συμμεταβολή αυτή; Μπορείτε να ορίσετε μια συνάρτηση με βάση τις συμμεταβολές των συντεταγμένων του σημείου A;

Μετακινήστε το σημείο A και παρατηρήστε τον τρόπο που μεταβάλλονται οι συντεταγμένες του. Υπάρχουν δυο σημεία που έχουν διαφορετικές τετμημένες και την ίδια τεταγμένη; Αν υπάρχουν αυτή η συμμεταβολή δεν είναι συνάρτηση, σύμφωνα με τον ορισμό του σχολικού βιβλίου.
 Για να ορίσετε μια νέα συμμεταβολή μεταξύ των συντεταγμένων του σημείου A που να είναι συνάρτηση αρκεί να ορίσετε την συμμεταβολή έτσι ώστε σε κάθε τετμημένη του σημείου A να αντιστοιχεί μια διαφορετική τεταγμένη. Για παράδειγμα να ορίσετε το σημείο $M=(x(A), 2*abs(y(A)))$ (όπου $abs(x)=$ απόλυτη τιμή του x)

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

2. Διερευνήστε τη συμμεταβολή των συντεταγμένων σημείου που κινείται σε ευθεία. Στο περιβάλλον εργασίας σχεδιάστε μια ευθεία και ένα σημείο A πάνω σε αυτή.
Μπορείτε να περιγράψετε λεκτικά και αλγεβρικά τον τρόπο συμμεταβολής των συντεταγμένων του σημείου A;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

3. Διερευνήστε τη συμμεταβολή βάσης και εμβαδού ισοσκελούς τριγώνου.
 Σχεδιάστε ένα ισοσκελές τρίγωνο του οποίου οι ίσες πλευρές έχουν σταθερό μήκος 2 μονάδες.
Μπορείτε να βρείτε πώς μεταβάλλονται το μήκος της βάσης του και το εμβαδόν του;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Η ευθεία που σχεδιάσατε ορίζεται από δυο σημεία. Μεταβάλλοντας τη θέση των σημείων αυτών μπορείτε να μεταβάλλετε τη θέση και την κατεύθυνση της ευθείας. Εμφανίστε τις συντεταγμένες του σημείου A και παρατηρήστε πώς μεταβάλλονται καθώς κινείτε το σημείο στην ευθεία.
 Όπως γνωρίζετε κάθε ευθεία ορίζεται από τον συντελεστή διεύθυνσής της ή την κλίση της. Εμφανίστε την κλίση της και συνδυάστε την με τις συντεταγμένες του σημείου A. Π.χ. τεταγμένη = κλίση * τετμημένη.

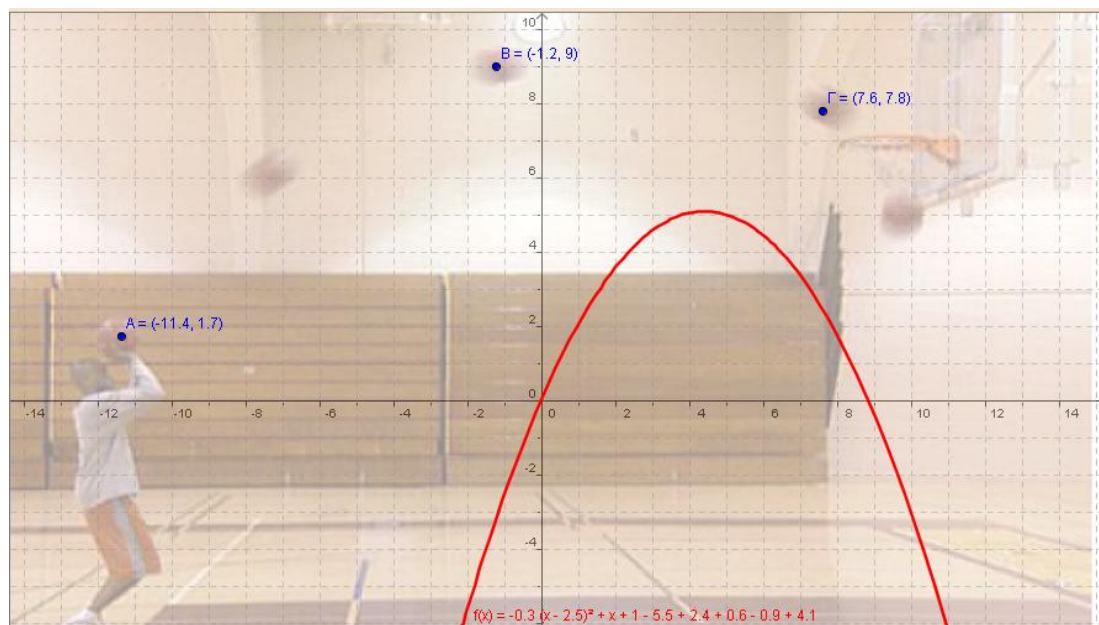
Επιλέξτε να σχεδιάσετε ευθύγραμμο τμήμα με ένα σημείο και μήκος 2 μονάδες. Σχεδιάστε κύκλο με κέντρο το ένα σημείο και ακτίνα το ευθ. τμήμα που σχεδιάσατε. Ενώστε τα τρία σημεία για να σχεδιάσετε έτσι το ισοσκελές τρίγωνο. Επιλέξτε να σχεδιάσετε ένα πολύγωνο με κορυφές αυτές του ισοσκελούς τριγώνου. Στη συνέχεια μετρήστε το μήκος της βάσης και το εμβαδόν του τριγώνου. Κινήστε τη μια κορυφή του τριγώνου ώστε να μεταβάλλετε τη βάση του. Πώς μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου καθώς μεγαλώνει ή μικραίνει το μήκος της βάσης του; Είναι συνάρτηση; Ορίστε ένα σημείο με συντεταγμένες τις δυο μετρήσεις και επιλέξτε να εμφανίζετε το ίχνος του. Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο συμμεταβολής της βάσης και του εμβαδού του τριγώνου; Είναι συνάρτηση; Για να εκφράσετε αλγεβρικά τη συμμεταβολή αυτή υπολογίστε το εμβαδόν του τριγώνου λαμβάνοντας υπόψη το μήκος των ίσων πλευρών 2 και υπολογίζοντας το ύψος του και το εμβαδόν του, αφού ονομάσετε με χ το μήκος της βάσης του.

4. Η συμμεταβολή και η αντιστοιχία σημείων
 Στην επιφάνεια εργασίας εμφανίστε ένα "δρομέα" με όνομα "a", μήκος 200 μονάδες από το -4 έως το 4 και να μεταβάλετε ανά 1 μονάδα (αύξηση). Ορίστε στη συνέχεια δυο σημεία το A με συντεταγμένες (a,3) και στη συνέχεια ένα δεύτερο B με συντεταγμένες (2*x(A), 1). Στη συνέχεια σχεδιάστε το διάνυσμα AB και επιλέξτε τα δυο σημεία να αφήνουν τα ίχνη τους.
 Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο μεταβολής των δυο σημείων A και B καθώς μεταβάλλετε τον δρομέα; Τι θα συμβεί αν μεταβάλετε την αύξηση διαδοχικά σε 0.5, 0.25, 0.125 κ.ο.κ;

Παρατηρήστε προσεκτικά την καμπύλη του ίχνους του σημείου Σ.
 Για να περιγράψετε τον τρόπο συμμεταβολής των A και B σκεφτείτε τον τρόπο συμμεταβολής των τετμημένων τους. Στο μεν A η τετμημένη ορίζεται από την τιμή του δρομέα ενώ του B από το 2πλάσιο της τιμής της τετμημένης του A.

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

2.2 ΣΕΝΑΡΙΟ 2 : Μελέτη των βασικών συναρτήσεων



ΘΕΜΑ 1: Βρείτε την κατάλληλη συνάρτηση

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης καθώς και τρία σημεία A, B και Γ. Μπορείτε να επαναπροσδιορίσετε την καμπύλη ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από τα σημεία αυτά;

Διερευνήσεις:

1. Μπορείτε να επαναπροσδιορίσετε την καμπύλη ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σταθερό σημείο A; Σε ποια περίπτωση το σημείο A γίνεται κορυφή της καμπύλης;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μπορείτε να μετακινήσετε την καμπύλη με το ποντίκι σας ώστε να διέρχεται από το σημείο A (-1,4), παρατηρώντας ταυτόχρονα και τον τύπο της. Θα διαπιστώσετε ότι υπάρχουν πολλές διαφορετικές παραβολές που διέρχονται από το A.

Μετακινήστε την καμπύλη σε κατάλληλη θέση ώστε το σημείο A να γίνει κορυφή της καμπύλης. Για να επιβεβαιώσετε ότι πράγματι το A είναι η κορυφή της παραβολής που επιλέξατε χρειάζεται η ευθεία $x=-1$ να είναι ο άξονας συμμετρίας της καμπύλης.

Μπορείτε επίσης να επαναπροσδιορίσετε τον τύπο της, αν επιλέξετε με δεξί κλικ πάνω στην καμπύλη και στο μενού επιλογών που θα εμφανιστεί επιλέξετε την εντολή "Επαναπροσδιορισμός". Στο πλαίσιο που θα εμφανιστεί πληκτρολογήστε τη νέα συνάρτηση. Επιλέξτε μια εξίσωση που επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του A.

Μπορείτε να πληκτρολογήσετε ένα νέο τύπο ώστε το σημείο A να γίνει κορυφή της καμπύλης αν ο τύπος έχει τη μορφή $f(x)=a*(x+1)^2+4$.

2. Μπορείτε να επαναπροσδιορίσετε την συνάρτηση ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από τα σημεία Β και Γ; Σε ποια περίπτωση τα δυο σημεία είναι συμμετρικά;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μπορείτε να μεταφέρετε την καμπύλη με το ποντίκι σας ώστε να διέρχεται και από τα δυο σημεία παρατηρώντας ταυτόχρονα την εξίσωσή της.

Μπορείτε επίσης να επιλέξετε "Επαναπροσδιορισμός" και να πληκτρολογήσετε την κατάλληλη εξίσωση. Για την επιλογή της κατάλληλης εξίσωσης στον τύπο $\psi = \alpha \cdot \chi^2 + \beta \cdot \chi + \gamma$ επιλέξτε ο συντελεστής $\alpha = 0.5$ με εφαρμόστε τις συντεταγμένες των δυο σημείων ώστε να προσδιορίσετε τους συντελεστές β και γ . Εύκολα μπορείτε να διαπιστώσετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση της οποίας τα σημεία να είναι σε συμμετρικές ως προς τον άξονα συμμετρίας θέση.

3. Μπορείτε να επαναπροσδιορίσετε την συνάρτηση ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται και από τα τρία σημεία Α, Β και Γ.

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε με το ποντίκι σας την καμπύλη στη θέση που επιθυμείτε. Αλλάξτε το πρόσημο του συντελεστή α ώστε να στρέφει το άνοιγμα προς τα πάνω (να είναι κυρτή). Επιλέξτε την εντολή "Επαναπροσδιορισμός" αφού επιλέξετε με το δεξί πλήκτρο του ποντικιού σας την καμπύλη. Στη συνέχεια αλλάξτε τους συντελεστές της εξίσωσης ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από τα τρία σημεία. Για να βρείτε αλγεβρικά τους κατάλληλους συντελεστές, στον τύπο $\psi = \alpha \chi^2 + \beta \chi + \gamma$ εφαρμόστε τις συντεταγμένες των τριών σημείων και στη συνέχεια λύστε το σύστημα των α, β, γ που θα προκύψει. Ερευνήστε αν υπάρχουν περισσότερες από μια εξισώσεις που οι γραφικές τους παραστάσεις διέρχονται και από τα τρία σημεία.

4. Μετακινείστε τα τρία σημεία στις θέσεις $(-1,0)$, $(1,0)$ και $(-4,2)$. Μπορείτε να προβλέψετε την εξίσωση της συνάρτησης ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται και από τα τρία σημεία.

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Θυμηθείτε ότι η συνάρτηση τέμνει τον άξονα x σε σημεία που οι τετμημένες του είναι οι ρίζες της. Μάλιστα, αν η συνάρτηση έχει ρίζες τους αριθμούς κ και λ αυτή έχει την εξίσωση $a(x-\kappa)(x-\lambda)$. Επιλέξτε τις οδηγίες στο λογισμικό για περισσότερη βοήθεια σχετικά με τη σύνταξη της εξίσωσης. Με την εντολή «Επαναπροσδιορισμός» αλλάξτε τον τύπο της ώστε να διέρχεται και από τα τρία σημεία.

Ανακεφαλαίωση:

Επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις και για άλλες πολυωνυμικές συναρτήσεις, όπως την $f(x)=a*x^3+\beta*x+\gamma$.

- Διατυπώσετε στην τάξη ένα συμπέρασμα σχετικό με την εύρεση πολυωνυμικής συνάρτησης που να διέρχεται από ένα ή δυο ή περισσότερα σημεία;
- Συζητήστε στη τάξη για τον τρόπο που εργαστήκατε στις διερευνήσεις.
- Συζητήστε για τον τρόπο εύρεσης της πολυωνυμικής συνάρτησης ώστε να διέρχεται από ένα, δυο ή περισσότερα σημεία.
- Συζητήστε για το πόσες συναρτήσεις μπορείτε να βρείτε ώστε να διέρχονται από ένα σημείο ή από δυο ή από τρία σημεία.

ΘΕΜΑ 2: Επανακαθορίστε τη συνάρτηση

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης. Διερευνήστε πώς πρέπει να επαναπροσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης ώστε η γραφική της παράσταση να μετακινείται παράλληλα με τον εαυτόν της ή να μετακινείται σε θέση συμμετρική ως προς τους άξονες ή το κέντρο του συστήματος των αξόνων;

Διερευνήσεις:

1. Τι θα αλλάξει στην εξίσωση της συνάρτησης αν μετακινήσετε με το ποντίκι σας την καμπύλη οριζόντια ή κατακόρυφα προς τις δυο κατευθύνσεις;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε την καμπύλη με τον δείκτη του ποντικιού σας οριζόντια προς τα δεξιά και παρατηρήστε ποιού συντελεστές της εξίσωσης μεταβάλλονται και πώς. Επαναλάβετε το ίδιο και για την κατακόρυφη κίνηση. Σε ποιιά συμπεράσματα καταλήγετε;

2. Τι θα συμβεί στην καμπύλη της συνάρτησης αν στη θέση του συντελεστή 1 του χ στον αριθμητή και στον παρονομαστή πληκτρολογήσετε άλλο αριθμό; Τι μεταβάλλεται στην καμπύλη όταν αυξάνετε ή ελαττώνετε αυτόν τον συντελεστή;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Πληκτρολογήστε στη θέση του αριθμού 1 διαδοχικά τους αριθμούς 3,4,5 κ.ο.κ. Τι αλλάζει στη μορφή της καμπύλης;

Επαναλάβετε τη διαδικασία πληκτρολογώντας στη θέση του 1 τους αριθμούς 1, 0.5, 0.3, 0.1, κ.ο.κ. Τι αλλάζει στη μορφή της καμπύλης;

3. Τι θα συμβεί στην καμπύλη όταν στη θέση του αριθμού 2 πληκτρολογήσετε άλλο αριθμό;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Πληκτρολογήστε στη θέση του αριθμού 2 διαδοχικά τους αριθμούς 3,4,5 κ.ο.κ. Τι αλλάζει στη μορφή της καμπύλης;

Επαναλάβετε τη διαδικασία πληκτρολογώντας στη θέση του 2 τους αριθμούς 1, 0.5, 0.3, 0.1, -1, -2 κ.ο.κ. Τι αλλάζει στη μορφή της καμπύλης;

4. Μπορείτε να διατυπώσετε κανόνες μετασχηματισμού της συνάρτησης ώστε το γράφημα αυτής (1) να μετακινείται παράλληλα με τον εαυτό του και (2) να προκύπτει η συμμετρική καμπύλη ως προς τον άξονα χ'χ (3) η συμμετρική καμπύλη ως προς τον άξονα ψ'ψ (4) η συμμετρική καμπύλη ως προς την αρχή των αξόνων;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Πληκτρολογήστε στον τύπο της συνάρτησης, στη θέση του συντελεστή 1 το -1. Τι θα συμβεί στο γράφημα; Επαναλάβετε την ίδια διαδικασία και για άλλα ζεύγη αντίθετων αριθμών. Προσοχή! Στον παρονομαστή ο συντελεστής του χ πρέπει να είναι μέσα σε παρένθεση. Π.χ.
 $f(x) = 5(-x - 2) / ((-x)^2 + 2)$

Πληκτρολογήστε στη θέση του 2 το -2. Δηλαδή $f(x) = -2(x - 1) / (x^2 + 1)$. Τι θα συμβεί στο γράφημα;

Τι θα συμβεί στο γράφημα αν κάνετε ταυτόχρονα και στους δυο συντελεστές τις παραπάνω αλλαγές

Ανακεφαλαίωση:

- Συζητήστε στη τάξη για τον τρόπο που εργαστήκατε στις προηγούμενες διερευνήσεις.
- Ανακοινώστε στη τάξη τα συμπεράσματά σας τα σχετικά με τους μετασχηματισμούς στους οποίους υποβάλλατε την συνάρτηση.
- Ανακοινώστε στη τάξη τους αλγεβρικούς κανόνες που διατυπώσατε στις προηγούμενες διερευνήσεις.

ΘΕΜΑ 3: Ο μετασχηματισμός της ημιτονοειδούς καμπύλης

Στην επιφάνεια εργασίας έχουμε σχεδιάσει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu\chi$, δηλαδή $[f(x) = \sin(x)]$;

Διερευνήστε πώς μετασχηματίζεται η καμπύλη της συνάρτησης όταν στη θέση της μεταβλητής χ πληκτρολογήσετε γραμμικούς συνδυασμούς του χ με το $\pi/2$, το π και το 2π .

Διερευνήσεις:

1. Τι θα συμβεί στο γράφημα αν στη θέση του χ πληκτρολογήσετε $\pi/2-\chi$; Μπορείτε, στον ειδικό χώρο "Εισαγωγή" να πληκτρολογήσετε μια άλλη συνάρτηση ώστε η γραφική της παράσταση να ταυτίζεται με την γραφική παράσταση της $f(x)$;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Παρατηρήστε προσεκτικά την καμπύλη που προκύπτει από τον μετασχηματισμό του γραφήματος. Ονομάστε τη συνάρτηση $g(x)$ και πληκτρολογήστε τον τύπο που απαιτείται ώστε το γράφημά της να ταυτίζεται με αυτό της $f(x)$. Για την εύρεση του τύπου της $g(x)$ θα χρειαστεί να θυμηθείτε τα γραφήματα και των άλλων τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

2. Τι θα συμβεί στο γράφημα αν στη θέση του χ πληκτρολογήσετε $\pi-\chi$; Μπορείτε, στον ειδικό χώρο "Εισαγωγή" να πληκτρολογήσετε μια άλλη συνάρτηση ώστε η γραφική της παράσταση να ταυτίζεται με την γραφική παράσταση της $f(x)$;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Ονομάστε $g(x)$ την συνάρτηση και προσδιορίστε τον τύπο της ώστε το γράφημά της να ταυτίζεται με αυτό της $f(x)=\sin(\pi-x)$. Θα σας βοηθήσουν σ' αυτό οι σχέσεις των τριγωνομετρικών αριθμών των παραπληρωματικών γωνιών.

Για τους τύπους των συναρτήσεων που μπορείτε να πληκτρολογήσετε στο πλαίσιο "Εισαγωγή" πληκτρολογήστε εδώ.

3. Τι θα συμβεί στο γράφημα αν στη θέση του χ πληκτρολογήσετε $2\pi-\chi$; Μπορείτε, στον ειδικό χώρο "Εισαγωγή" να πληκτρολογήσετε μια άλλη συνάρτηση ώστε η γραφική της παράσταση να ταυτίζεται με την γραφική παράσταση της $f(x)$;

Επιλέξτε εδώ για οδηγίες σχετικές με τον τρόπο σύνταξης του τύπου της συνάρτησης που πρέπει να πληκτρολογήσετε στη θέση "Εισαγωγή".

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

4. Τι θα συμβεί στο γράφημα της συνάρτησης $f(x) = \sin(x)$ αν στη θέση της μεταβλητής x πληκτρολογήσετε (1) $\pi/2+x$, (2) $3\pi/2-x$, (3) $3\pi/2+x$; Μπορείτε, στον ειδικό χώρο "Εισαγωγή" να πληκτρολογήσετε μια άλλη συνάρτηση ώστε η γραφική της παράσταση να ταυτίζεται με την γραφική παράσταση της $f(x)$;

Χρησιμοποιήστε την γνώση σας για τη σχέση των τριγωνομετρικών αριθμών για γωνίες που διαφέρουν κατά $\pi/2$ ή $3\pi/2$ ή έχουν άθροισμα $3\pi/2$.

Επιλέξτε εδώ για οδηγίες σχετικές με τον τρόπο σύνταξης του τύπου της συνάρτησης που πρέπει να πληκτρολογήσετε στη θέση «Εισαγωγή».

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Ανακεφαλαίωση:

Συζητήστε στη τάξη για τον τρόπο που εργαστήκατε στις διερευνήσεις που προηγήθηκαν.

- Διατυπώστε τα συμπεράσματά σας για τους μετασχηματισμούς της συνάρτησης που διερευνήσατε.
- Διατυπώστε τα συμπεράσματά σας για τις συναρτήσεις που οι γραφικές τους παραστάσεις ταυτίζονται με αυτές των μετασχηματισμών της $f(x)$.

ΘΕΜΑ 4: Η εκθετική και η λογαριθμική συνάρτηση

Στην επιφάνεια εργασίας έχουμε σχεδιάσει τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\exp(x)$ και $g(x) = \log(x)$, καθώς και δυο σημεία A και B. Το A είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$. Μπορείτε να επανακαθορίσετε τον τύπο της συνάρτησης $g(x)$ ώστε το σημείο B να κινείται στη γραφική της παράσταση;

Διερευνήσεις:

1. Κινείτε το σημείο A και παρατηρείστε πώς κινείται το B. Επιλέξτε το B να αφήνει το ίχνος του (Εντολή "Ίχνος ενεργό"). Μπορείτε να βρείτε την εξίσωση της συνάρτησης που έχει γράφημα την καμπύλη του ίχνους του σημείου B;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

2. Επαναπροσδιορίστε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$ πληκτρολογώντας στη θέση του 20 τον αριθμό -20. Ποιός θα είναι τώρα ο τύπος της $g(x)$ ώστε να διέρχεται από το σημείο B; Μπορείτε να διατυπώσετε ένα κανόνα σχετικό με τον προσδιορισμό της συνάρτησης του ίχνους του σημείου B;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Κάντε δεξί κλικ πάνω στο σημείο B και επιλέξτε την εντολή "Ίχνος ενεργό". Στη συνέχεια μετακινήστε το σημείο A και παρακολουθήστε το ίχνος του σημείου B. Με το αριστερό πλήκτρο του ποντικιού σας μετακινήστε την καμπύλη της συνάρτησης $g(x)$ έως ότου ταυτιστεί με την καμπύλη του ίχνους.
 Παρατηρήστε την εξίσωσή της. Επειδή η γραφική παράσταση της $g(x)$ μπορεί να μην διέρχεται ακριβώς από το B χρειάζεται να υπολογίσετε την εξίσωσή της και αλγεβρικά. Δηλαδή στην εξίσωση $\psi=20e^{\chi}$ ονομάστε με χ το ψ και με ψ το χ και στη συνέχεια λύστε την εξίσωση ως προς ψ .

Επαναλάβετε το πείραμα που κάνατε στην προηγούμενη διερεύνηση. Διερευνήστε ακόμα τον τρόπο με τον οποίο ορίζεται το σημείο B από το A. Υπάρχει κάποιος κανόνας προσδιορισμού της συνάρτησης που ορίζει το ίχνος του σημείου B;
 Ένας κανόνας θα μπορούσε να βρεθεί αν λαμβάνετε υπόψη τη σχέση που έχουν οι συντεταγμένες των δυο συμμετρικών σημείων A και B ως προς την αρχή των αξόνων. Σύμφωνα με αυτή τη σχέση η τετμημένη του A αντιστοιχεί στην τεταγμένη του B και η τεταγμένη του A στην τετμημένη του B.

3. Επαναπροσδιορίστε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$ πληκτρολογώντας $f(x)=\exp(x-4)$. Μπορείτε τώρα να επαναπροσδιορίσετε τον τύπο της $g(x)$ ώστε το γράφημά της να διέρχεται από το Β. Ποιόν κανόνα ακολουθήσατε;

Λάβετε υπόψη σας τις προηγούμενες διερευνήσεις καθώς και τις οδηγίες τους. Δηλαδή επαναπροσδιορίστε τον τύπο της $g(x)$ μέχρι να ταυτιστεί με την καμπύλη του ίχνους του σημείου Β.

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

4. Επαναπροσδιορίστε τον τύπο της $f(x)=\exp(x)$ ώστε αυτή να έχει τον τύπο $f(x)=20*\exp(x)-5$. Μπορείτε να προβλέψετε τον τύπο της συνάρτησης της $g(x)$ ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο Β; Υπάρχει κάποιος κανόνας που συνδέει τις δυο συναρτήσεις;

Η διαδικασία της πρόβλεψης θα σας βοηθήσει να σκεφτείτε πριν να δράσετε για τις ιδιότητες των συντεταγμένων των συμμετρικών σημείων καθώς και τον τρόπο με τον οποίο ορίζονται οι αντίστροφες συναρτήσεις.

Επαναλάβετε τις προηγούμενες διαδικασίες. Σκεφτείτε ότι το σημείο Β έχει οριστεί από τις συντεταγμένες του σημείου Α αλλά με αντίστροφη σειρά (η τετμημένη του Α = τεταγμένη του Β και τεταγμένη του Α = τετμημένη Β).

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Ανακεφαλαίωση:

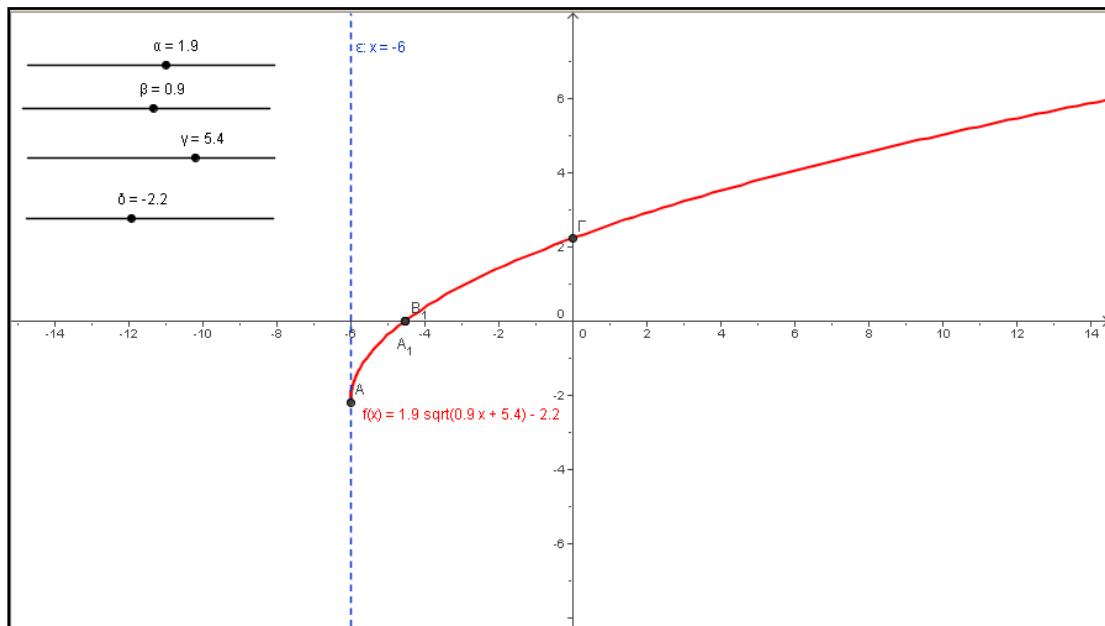
Με δεδομένο ότι το σημείο Β είναι το συμμετρικό του Α ως προς την αρχή των αξόνων, είναι φανερό ότι οι προηγηθείσες διερευνήσεις αφορούσαν τον επαναπροσδιορισμό της $g(x)$ ώστε να είναι αντίστροφη της $f(x)$.

Μπορείτε να βρείτε με αλγεβρικό τρόπο την αντίστροφη της $f(x) = \exp(x)$ καθώς και των $f(x)$ των άλλων διερευνήσεων;

Συζητήστε στην τάξη για τις αντίστροφες συναρτήσεις.

- Διατυπώστε ένα ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης.
- Διατυπώστε μια ιδιότητα των γραφικών παραστάσεων των αντίστροφων συναρτήσεων.
- Διατυπώστε τις ιδιότητες που πρέπει να έχει μια συνάρτηση ώστε η αντίστροφή της να είναι συνάρτηση. Εστιάστε στον τρόπο που καθορίζεται το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των αντιστρόφων συναρτήσεων.
- Εξηγήστε στους συμμαθητές σας πώς μπορείτε να υπολογίζετε την εξίσωση της αντίστροφης συνάρτησης μια δεδομένης συνάρτησης καθώς και το πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών της.

2.3 ΣΕΝΑΡΙΟ 3 : Μελέτη οικογενειών συναρτήσεων



ΘΕΜΑ 1: Η οικογένεια των συναρτήσεων $f(x) = a \cdot x^n + \beta \cdot x + \gamma$

Στην επιφάνεια εργασίας έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a \cdot x^n + \beta \cdot x + \gamma$. Διερευνήστε τι αλλάζει στο γράφημα και τι διατηρείται σταθερό όταν μεταβάλλετε τους συντελεστές της μέσω των μεταβολών.

Διερευνήσεις:

1. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον κέρσορα του δρομέα που αντιστοιχεί στον συντελεστή a ;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε τον κέρσορα στον δρομέα «α» ώστε οι τιμές του να είναι θετικές και να αυξάνονται. Τι συμβαίνει στο γράφημα;
 Μετακινήστε τώρα τον κέρσορα ώστε οι τιμές του συντελεστή a να είναι αρνητικές και να μειώνονται. Τι αλλάζει στο γράφημα;

2. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τις τιμές του συντελεστή β με τον αντίστοιχο δρομέα;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε τον κέρσορα στον δρομέα ώστε οι τιμές του β να είναι θετικές και να αυξάνονται. Τι συμβαίνει στο γράφημα;
 Μετακινήστε τώρα τον κέρσορα ώστε οι τιμές του β να είναι αρνητικές και να μειώνονται. Τι αλλάζει στο γράφημα;

3. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή γ με τον αντίστοιχο δρομέα;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε τον κέρσορα στον δρομέα ώστε οι τιμές του να είναι θετικές και να αυξάνονται. Τι συμβαίνει στο γράφημα;
 Μετακινήστε τώρα τον κέρσορα ώστε οι τιμές του γ να είναι αρνητικές και να μειώνονται. Τι αλλάζει στο γράφημα;

4. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τις τιμές του εκθέτη n με τον αντίστοιχο δρομέα; Τι θα συμβεί στο γράφημα όταν ο κέρσορας του δρομέα δείχνει 4 και επαναλάβετε τις αλλαγές στις τιμές των τριών άλλων συντελεστών;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Τι συμβαίνει στο γράφημα όταν οι τρεις συντελεστές a , b και c παίρνουν θετικές τιμές και τι συμβαίνει όταν παίρνουν αρνητικές τιμές;

Μετακινήστε τον κέρσορα στον δρομέα n ώστε οι τιμές του να είναι διαδοχικά 5,6 7 κ.ο.κ και επαναλάβετε τις μεταβολές των τιμών στους άλλους μεταβολείς. Τι συμβαίνει στο γράφημα;

Μετακινήστε τώρα τον κέρσορα ώστε οι τιμές του n να είναι αρνητικές και να μειώνονται. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τις τιμές στους άλλους μεταβολείς

Ανακεφαλαίωση:

Συζητήστε στην τάξη σας για τα αποτελέσματα των διερευνήσεων που κάνατε.

- Διατυπώστε ένα κανόνα για τις αλλαγές στο γράφημα της συνάρτησης όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή a για τις διάφορες τιμές του εκθέτη n . Διατυπώστε ένα κανόνα για τις αλλαγές στο γράφημα της συνάρτησης όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή b για τις διάφορες τιμές του εκθέτη n .
- Διατυπώστε ένα κανόνα για τις αλλαγές στο γράφημα της συνάρτησης όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή c για τις διάφορες τιμές του εκθέτη n .

ΘΕΜΑ 2: Η οικογένεια των συναρτήσεων $f(x) = \frac{a}{\beta \cdot x + \gamma} + \delta$

Στην επιφάνεια εργασίας έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a / (\beta \cdot x + \gamma) + \delta$. Διερευνήστε τι αλλάζει στο γράφημα και τι διατηρείται σταθερό όταν μεταβάλλετε τους συντελεστές της μέσω των μεταβολών.

Διερευνήσεις:

1. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον κέρσορα του δρομέα που αντιστοιχεί στον συντελεστή α;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε τον κέρσορα στον δρομέα ώστε οι τιμές του να είναι θετικές και να αυξάνονται. Τι συμβαίνει στο γράφημα; Μετακινήστε τώρα τον κέρσορα ώστε οι τιμές του α να είναι αρνητικές και να μειώνονται. Τι αλλάζει στο γράφημα;

2. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή β με τον αντίστοιχο μεταβολέα

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Τι συμβαίνει στο γράφημα όταν ο συντελεστής β παίρνει θετικές τιμές και τι συμβαίνει όταν παίρνει αρνητικές τιμές; Μετακινήστε τον κέρσορα στον μεταβολέα ώστε οι τιμές του να είναι θετικές και να αυξάνονται. Τι συμβαίνει στο γράφημα; Μετακινήστε τώρα τον κέρσορα ώστε οι τιμές του β να είναι αρνητικές και να μειώνονται. Τι αλλάζει στο γράφημα;

3. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή γ με τον αντίστοιχο μεταβολέα;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Τι συμβαίνει στο γράφημα όταν ο συντελεστής γ παίρνει θετικές τιμές και τι συμβαίνει όταν παίρνει αρνητικές τιμές; Μετακινήστε τον κέρσορα στον μεταβολέα ώστε οι τιμές του να είναι θετικές και να αυξάνονται. Τι συμβαίνει στο γράφημα; Μετακινήστε τώρα τον κέρσορα ώστε οι τιμές του γ να είναι αρνητικές και να μειώνονται. Τι αλλάζει στο γράφημα;

4. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή δ με τον αντίστοιχο μεταβολέα;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Τι συμβαίνει στο γράφημα όταν οι τρεις συντελεστές α , β και γ παίρνουν θετικές τιμές και τι συμβαίνει όταν παίρνουν αρνητικές τιμές; Μετακινήστε τον κέρσορα στον μεταβολέα δ ώστε οι τιμές του να είναι διαδοχικά 5, 6 7 κ.ο.κ και επαναλάβετε τις μεταβολές των τιμών στους άλλους μεταβολείς. Τι συμβαίνει στο γράφημα; Μετακινήστε τώρα τον κέρσορα ώστε οι τιμές του δ να είναι αρνητικές και να μειώνονται. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τις τιμές στους άλλους μεταβολείς.

Ανακεφαλαίωση:

Συζητήστε στην τάξη σας για τα αποτελέσματα των διερευνήσεων που κάνατε.

- Διατυπώστε ένα κανόνα για τις αλλαγές στο γράφημα της συνάρτησης όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή α .
- Διατυπώστε ένα κανόνα για τις αλλαγές στο γράφημα της συνάρτησης όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή β .
- Διατυπώστε ένα κανόνα για τις αλλαγές στο γράφημα της συνάρτησης όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή γ .
- Διατυπώστε ένα κανόνα για τις αλλαγές στο γράφημα της συνάρτησης όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή δ .

ΘΕΜΑ 3: Η οικογένεια των συναρτήσεων $f(x) = a \cdot \eta\mu(\beta \cdot x + \gamma) + \delta$

Στην επιφάνεια εργασίας έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a \cdot \sin(\beta \cdot x + \gamma) + \delta$. Διερευνήστε τι αλλάζει στο γράφημα και τι διατηρείται σταθερό όταν μεταβάλλετε τους συντελεστές της μέσω των δρομέων.

Διερευνήσεις:

1. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον κέρσορα του δρομέα που αντιστοιχεί στον συντελεστή a ;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

Μετακινήστε τον κέρσορα στον δρομέα « a » ώστε οι τιμές του να είναι θετικές και να αυξάνονται. Τι συμβαίνει στο γράφημα;
 Μετακινήστε τώρα τον κέρσορα ώστε οι τιμές του a να είναι αρνητικές και να μειώνονται. Τι αλλάζει στο γράφημα;

2. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή β με τον αντίστοιχο δρομέα;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

Μετακινήστε τον κέρσορα στον δρομέα « β », ώστε οι τιμές του να είναι θετικές και να αυξάνονται. Τι συμβαίνει στο γράφημα;
 Μετακινήστε τώρα τον κέρσορα ώστε οι τιμές του β να είναι αρνητικές και να μειώνονται. Τι αλλάζει στο γράφημα;

3. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή γ με τον αντίστοιχο δρομέα;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε τον κέρσορα στον δρομέα « γ » ώστε οι τιμές του να είναι θετικές και να αυξάνονται. Τι συμβαίνει στο γράφημα;

Μετακινήστε τώρα τον κέρσορα ώστε οι τιμές του γ να είναι αρνητικές και να μειώνονται. Τι αλλάζει στο γράφημα;

4. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή δ με τον αντίστοιχο δρομέα;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε τον κέρσορα στον δρομέα « δ » ώστε οι τιμές του να είναι θετικές και να αυξάνονται. Για κάθε τιμή του δ επαναλάβετε τις μεταβολές των τιμών στους άλλους μεταβολείς. Τι συμβαίνει στο γράφημα;

Μετακινήστε τώρα τον κέρσορα ώστε οι τιμές του δ να είναι αρνητικές και να μειώνονται. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τις τιμές στους άλλους μεταβολείς.

Ανακεφαλαίωση:

Συζητήστε στην τάξη σας για τα αποτελέσματα των διερευνήσεων που κάνατε.

- Διατυπώστε ένα κανόνα για τις αλλαγές στο γράφημα της συνάρτησης όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή a .
- Διατυπώστε ένα κανόνα για τις αλλαγές στο γράφημα της συνάρτησης όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή b .
- Διατυπώστε ένα κανόνα για τις αλλαγές στο γράφημα της συνάρτησης όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή γ .
- Διατυπώστε ένα κανόνα για τις αλλαγές στο γράφημα της συνάρτησης όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή δ .

ΘΕΜΑ 4: Η οικογένεια των συναρτήσεων $f(x) = \rho \cdot a^{(kx+\lambda)} + \mu$

Στην επιφάνεια εργασίας έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \rho \cdot a^{(kx+\lambda)} + \mu$. Διερευνήστε τι αλλάζει στο γράφημα και τι διατηρείται σταθερό όταν μεταβάλλετε τους συντελεστές της μέσω των μεταβολών.

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε μια συγκεκριμένη τιμή για την μεταβλητή a και διερευνήστε τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον κέρσορα του δρομέα « ρ ». Στη συνέχεια επιλέξτε άλλη τιμή για το a και επαναλάβετε τη διερεύνηση.

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

Μετακινήστε τον κέρσορα στον δρομέα " ρ " ώστε οι τιμές του να είναι θετικές και να αυξάνονται. Τι συμβαίνει στο γράφημα;

Μετακινήστε τώρα τον κέρσορα ώστε οι τιμές του ρ να είναι αρνητικές και να μειώνονται. Τι αλλάζει στο γράφημα;

2. Επιλέξτε μια συγκεκριμένη τιμή για την μεταβλητή a και διερευνήστε τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον κέρσορα του δρομέα « k »; Στη συνέχεια επιλέξτε άλλη τιμή για το a και επαναλάβετε τη διερεύνηση.

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

Μετακινήστε τον κέρσορα στον δρομέα " k " ώστε οι τιμές του να είναι θετικές και να αυξάνονται. Τι συμβαίνει στο γράφημα;

Μετακινήστε τώρα τον κέρσορα ώστε οι τιμές του k να είναι αρνητικές και να μειώνονται. Τι αλλάζει στο γράφημα;

3. Επιλέξτε μια συγκεκριμένη τιμή για την μεταβλητή a και διερευνήστε τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον κέρσορα του δρομέα «λ»; Στη συνέχεια επιλέξτε άλλη τιμή για το a και επαναλάβετε τη διερεύνηση.

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε τον κέρσορα στον δρομέα "λ" ώστε οι τιμές του να είναι θετικές και να αυξάνονται. Τι συμβαίνει στο γράφημα;

Μετακινήστε τώρα τον κέρσορα ώστε οι τιμές του λ να είναι αρνητικές και να μειώνονται. Τι αλλάζει στο γράφημα;

4. Επιλέξτε μια συγκεκριμένη τιμή για την μεταβλητή a και διερευνήστε τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον κέρσορα του δρομέα «μ»; Στη συνέχεια επιλέξτε άλλη τιμή για το a και επαναλάβετε τη διερεύνηση.

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε τον κέρσορα στον δρομέα "μ" ώστε οι τιμές του να αυξάνονται και να είναι θετικές. Για κάθε τιμή του μ μεταβάλλετε τις τιμές των άλλων δρομέων. Τι συμβαίνει στο γράφημα;

Μετακινήστε τώρα τον κέρσορα ώστε οι τιμές του μ να είναι αρνητικές και να μειώνονται. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τις τιμές στους άλλους δρομείς;

Συζητήστε στην τάξη σας για τα αποτελέσματα των διερευνήσεων που κάνατε.

- Διατυπώστε ένα κανόνα για τις αλλαγές στο γράφημα της συνάρτησης όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή ρ .
- Διατυπώστε ένα κανόνα για τις αλλαγές στο γράφημα της συνάρτησης όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή k .
- Διατυπώστε ένα κανόνα για τις αλλαγές στο γράφημα της συνάρτησης όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή λ .
- Διατυπώστε ένα κανόνα για τις αλλαγές στο γράφημα της συνάρτησης όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή μ .

ΘΕΜΑ 5: Η οικογένεια των συναρτήσεων $f(x) = a \cdot \sqrt{\beta x + \gamma} + \delta$

Στην επιφάνεια εργασίας έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a \cdot \sqrt{\beta x + \gamma} + \delta$. Διερευνήστε τι αλλάζει στο γράφημα και τι διατηρείται σταθερό όταν μεταβάλλετε τους συντελεστές της μέσω των δρομέων.

Διερευνήσεις:

1. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον κέρσορα του δρομέα που αντιστοιχεί στον συντελεστή a ;
Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε τον κέρσορα στον δρομέα "α" ώστε οι τιμές του να είναι θετικές και να αυξάνονται. Τι συμβαίνει στο γράφημα;

Μετακινήστε τώρα τον κέρσορα ώστε οι τιμές του a να είναι αρνητικές και να μειώνονται. Τι αλλάζει στο γράφημα;

2. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή β της συνάρτησης με τον αντίστοιχο μεταβολέα;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε τον κέρσορα στον δρομέα "β" ώστε οι τιμές του να είναι θετικές και να αυξάνονται. Τι συμβαίνει στο γράφημα;

Μετακινήστε τώρα τον κέρσορα ώστε οι τιμές του β να είναι αρνητικές και να μειώνονται. Τι αλλάζει στο γράφημα;

3. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή γ με τον αντίστοιχο μεταβολέα;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε τον κέρσορα στον δρομέα "γ" ώστε οι τιμές του να είναι θετικές και να αυξάνονται. Τι συμβαίνει στο γράφημα;

Μετακινήστε τώρα τον κέρσορα ώστε οι τιμές του γ να είναι αρνητικές και να μειώνονται. Τι αλλάζει στο γράφημα;

4. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή δ με τον αντίστοιχο μεταβολέα;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε τον κέρσορα στον δρομέα "δ" ώστε οι τιμές του να είναι θετικές και να αυξάνονται. Για κάθε τιμή του δ επαναλάβετε τις μεταβολές των τιμών στους άλλους μεταβολείς. Τι συμβαίνει στο γράφημα;

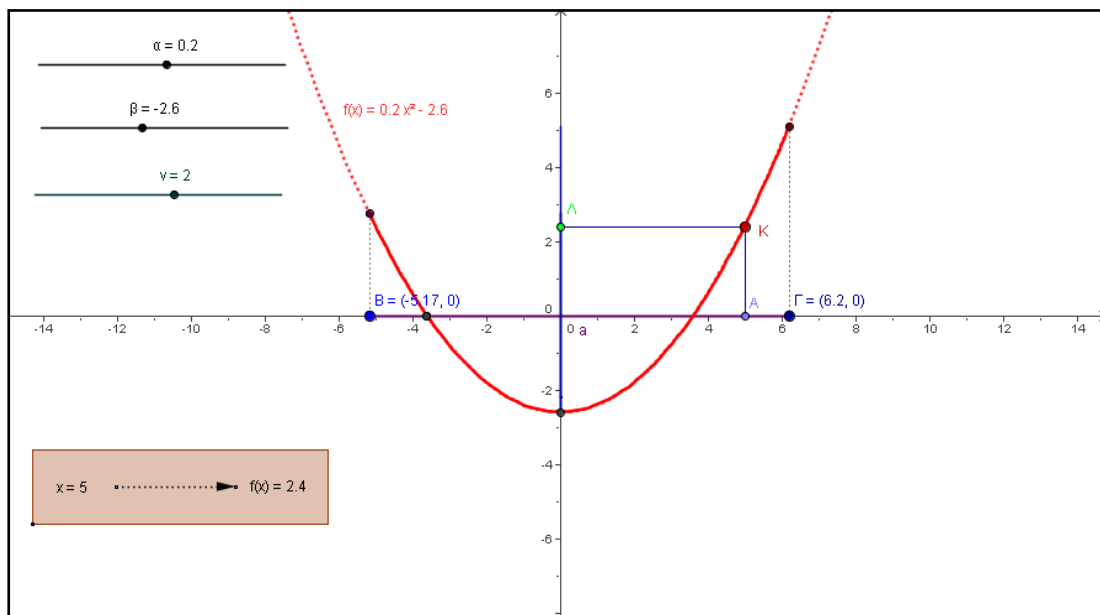
Μετακινήστε τώρα τον κέρσορα ώστε οι τιμές του δ να είναι αρνητικές και να μειώνονται. Τι αλλάζει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τις τιμές στους άλλους μεταβολείς.

Ανακεφαλαίωση:

Συζητήστε στην τάξη σας για τα αποτελέσματα των διερευνήσεων που κάνατε.

- Διατυπώστε ένα κανόνα για τις αλλαγές στο γράφημα της συνάρτησης όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή a .
- Διατυπώστε ένα κανόνα για τις αλλαγές στο γράφημα της συνάρτησης όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή b .
- Διατυπώστε ένα κανόνα για τις αλλαγές στο γράφημα της συνάρτησης όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή γ .
- Διατυπώστε ένα κανόνα για τις αλλαγές στο γράφημα της συνάρτησης όταν μεταβάλλετε τον συντελεστή δ .

2.4 ΣΕΝΑΡΙΟ 4 : Πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών των συναρτήσεων



ΘΕΜΑ 1: Βρείτε το κατάλληλο σύνολο τιμών

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a \cdot x^n + \beta$. Μπορείτε να προσδιορίζετε τον τύπο της μετακινώντας τον κέρσορα κάθε δρομέα. Μετακινήστε τα σημεία B και Γ για να επαναπροσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Σε κάθε περίπτωση ένα μέρος της καμπύλης χρωματίζεται έντονα (κόκκινο) και ένα μέρος του άξονα ψ'ψ επίσης (μπλε), το οποίο ορίζει το σχετικό σύνολο τιμών. Διερευνήστε τη σχέση μεταξύ του πεδίου ορισμού και του συνόλου τιμών αυτής.

Διερευνήσεις:

1. Ποιό είναι το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=0.3x^2-3$ όταν το πεδίο ορισμού της A είναι:

(1) $A = (-4,4)$ και (2) $A = (-3,5)$

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μπορείτε με τους δρομείς "α" και "β" να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης και στη συνέχεια να μετακινήσετε τα σημεία B και Γ στις κατάλληλες θέσεις. Σε κάθε περίπτωση μπορείτε να κινείτε το σημείο A κατά μήκος όλου του πεδίου ορισμού που ορίσατε και να παρατηρείτε πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης είτε στο γράφημα είτε στο ειδικό χώρο.

- Μπορείτε και στις δυο περιπτώσεις να εξηγήσετε γιατί το σημείο Δ περνά δυο φορές από κάθε σημείο του ευθυγράμμου τμήματος που ορίζει το σύνολο τιμών;
- Μπορείτε να επιβεβαιώσετε τις παρατηρήσεις σας και αλγεβρικά;

Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

2. Μπορείτε να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=-x^2+7$ ώστε αυτή να έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[-2,7]$;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μπορείτε με τους κέρσορες των δρομέων "α" και "β" να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης και στη συνέχεια να μετακινήσετε τα σημεία B και Γ ώστε το ευθύγραμμο τμήμα που αναπαριστά το σύνολο τιμών να καλύπτει ακριβώς το διάστημα $[-2,7]$.

3. Μπορείτε να συγκρίνετε τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων $f(x) = 0.2x^2 - 3$ και $f(x) = 0.2x^3 - 3$ όταν και στις δυο περιπτώσεις το πεδίο ορισμού είναι το $[-2, 3]$;

Μπορείτε να εξηγήσετε τις διαφορές και τις ομοιότητες (εφόσον υπάρχουν);

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μπορείτε με τους δρομείς "α" και "β" να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης και στη συνέχεια να μετακινήσετε τα σημεία Β και Γ στις κατάλληλες θέσεις. Σε κάθε περίπτωση μπορείτε να κινείτε το σημείο Α κατά μήκος όλου του πεδίου ορισμού που ορίσατε και να παρατηρείτε πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης είτε στο γράφημα είτε στο ειδικό χώρο.

- Μπορείτε και στις δυο περιπτώσεις να εξηγήσετε γιατί το σημείο Δ περνά δυο φορές από κάθε σημείο του ευθυγράμμου τμήματος που ορίζει το σύνολο τιμών;
- Μπορείτε να επιβεβαιώσετε τις παρατηρήσεις σας και αλγεβρικά;

Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

4. Μπορείτε να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = 1/x^2 - 3$ για διάφορα πεδία ορισμού της; Τι κοινό έχουν; Μπορείτε να επιβεβαιώνετε τα συμπεράσματά σας και αλγεβρικά;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μπορείτε να μετακινήσετε τα σημεία Β και Γ και να προσδιορίζετε το πεδίο ορισμού. Επιλέξτε (1) να είναι και τα δυο στην ίδιο ημιάξονα του χ'χ και (2) να είναι εκατέρωθεν του Ο. Σε κάθε περίπτωση κινήστε το σημείο Α και παρακολουθήστε πώς το Λ διαγράφει το αντίστοιχο σύνολο τιμών καθώς και τον τρόπο μεταβολής των τιμών της συνάρτησης. Αναζητήστε τα κοινά χαρακτηριστικά αλλά και τις διαφορές των διαφόρων συνόλων τιμών στις διάφορες περιπτώσεις.

Ανακεφαλαίωση:

Συζητήστε στην τάξη σας για τα αποτελέσματα των διερευνήσεων που κάνατε.

- Περιγράψτε διάφορες ειδικές περιπτώσεις μεταβολής του συνόλου τιμών όπως για παράδειγμα όταν αυξάνετε το δεξί άκρο στο πεδίο ορισμού στις συναρτήσεις που μελετήσατε.
- Δώστε μια εξήγηση (αν είναι δυνατόν και αλγεβρική) για τον τρόπο που εξαρτάται το σύνολο τιμών από το πεδίο ορισμού σε ειδικές περιπτώσεις συναρτήσεων, όπως τις $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^2 - 1$.

ΘΕΜΑ 2: Βρείτε το κατάλληλο σύνολο τιμών στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a \cdot \sin(\beta \cdot x + \gamma) + \delta$. Μπορείτε να προσδιορίζετε τον τύπο της μετακινώντας τον κέρσορα κάθε μεταβολέα και να μετακινείτε τα σημεία Β και Γ για να επαναπροσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Διερευνήστε τη σχέση μεταξύ του πεδίου ορισμού και του συνόλου τιμών αυτής.

Διερευνήσεις:

1. Ποιό είναι το σύνολο των τιμών της συνάρτησης $f(x) = 2 \cdot \sin(x) + 1$ όταν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι, (1) $A = [-\pi, \pi]$ και (2) $[-2\pi, 2\pi]$; Σε τι διαφέρουν τα δυο σύνολα τιμών και πώς αυτό εξηγείται;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

2. Τι θα αλλάξει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = 2 \cdot \sin(x) + 1$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-\pi, \pi]$ αν αλλάξετε τον συντελεστή 1 σε -1, 2, -2 κ.ο.κ. Μπορείτε να εξηγήσετε τις αλλαγές αυτές; Τι θα συμβεί αν αλλάξετε το πεδίο ορισμού σε $[-2\pi, 2\pi]$; Μπορείτε να εξηγήσετε αυτές τις αλλαγές;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

Μπορείτε με τους μεταβολείς α, β, γ και δ να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης και στη συνέχεια να μετακινείτε τα σημεία Β και Γ στις κατάλληλες θέσεις. Σε κάθε περίπτωση μπορείτε να κινείτε το σημείο Α κατά μήκος όλου του πεδίου ορισμού που ορίσατε και να παρατηρείτε πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης.

- Μπορείτε να περιγράψετε σε τι διαφέρουν τα δυο σύνολα τιμών;;
- Μπορείτε να επιβεβαιώσετε τις παρατηρήσεις σας και αλγεβρικά;

Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Μπορείτε με τους μεταβολείς α, β, γ και δ να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης και στη συνέχεια να μετακινείτε τα σημεία Β και Γ στις κατάλληλες θέσεις. Σε κάθε περίπτωση μπορείτε να κινείτε το σημείο Α κατά μήκος όλου του πεδίου ορισμού που ορίσατε και να παρατηρείτε πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης. Μπορείτε να μεταβάλετε τον κέρσορα του μεταβολέα δ για να προσδιορίσετε τον νέο τύπο της συνάρτησης.

- Μπορείτε να περιγράψετε σε τι διαφέρουν τα δυο σύνολα τιμών;
- Μπορείτε να επιβεβαιώσετε τις παρατηρήσεις σας και αλγεβρικά;

Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Τι θα συμβεί στο σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = 2 \cdot \sin(x+1)$ με πεδίο ορισμού το σύνολο $[-\pi, \pi]$, αν μεταβάλουμε την τιμή του συντελεστή 1; Πώς εξηγείτε το συμπέρασμά σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μπορείτε με τους μεταβολείς α, β, γ και δ να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης και στη συνέχεια να μετακινήτε τα σημεία Β και Γ στις κατάλληλες θέσεις. Σε κάθε περίπτωση μπορείτε να κινείτε το σημείο Α κατά μήκος όλου του πεδίου ορισμού που ορίσατε και να παρατηρείτε πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης. Μπορείτε να μεταβάλετε τον κέρσορα του μεταβολέα γ για να προσδιορίσετε τον νέο τύπο της συνάρτησης.

- Μπορείτε να περιγράψετε τι συμβαίνει με το σύνολο τιμών της συνάρτησης;
- Μπορείτε να επιβεβαιώσετε τις παρατηρήσεις σας και αλγεβρικά;

Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

4. Μπορείτε να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sin(2x - \pi/3) - 1$ ώστε αυτή να έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[0, 1]$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε το συμπέρασμά σας αλγεβρικά;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μπορείτε με την εντολή Μετονομασία και τους μεταβολείς α, β, γ και δ να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης. Μπορείτε για παράδειγμα να πληκτρολογήσετε τον τύπο $f(x) = \alpha \cdot \sin(\beta \cdot x + \gamma \cdot \pi/3) + \delta$. Στη συνέχεια μπορείτε να μετακινήτε τα σημεία Β και Γ στις κατάλληλες θέσεις μέχρι να έχετε το σύνολο τιμών που θέλετε. Σε κάθε περίπτωση μπορείτε να κινείτε το σημείο Α κατά μήκος όλου του πεδίου ορισμού που ορίσατε και να παρατηρείτε πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης. Μπορείτε να επιβεβαιώσετε τις παρατηρήσεις σας και αλγεβρικά; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

ΘΕΜΑ 3: Βρείτε το κατάλληλο σύνολο τιμών στις άρρητες συναρτήσεις

Στην επιφάνεια εργασίας έχουμε σχεδιάσει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=a \cdot \sqrt{\beta x + \gamma} + \delta$.

Μπορείτε να προσδιορίζετε τον τύπο της μετακινώντας τον κέρσορα κάθε μεταβολέα και να μετακινείτε τα σημεία Β και Γ για να επαναπροσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Διερευνήστε τη σχέση μεταξύ του πεδίου ορισμού και του συνόλου τιμών αυτής.

Διερευνήσεις:

1. Πώς μεταβάλλεται το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=-2\sqrt{x+1}+3$ σε σχέση με το πεδίο ορισμού της; Τι θα συμβεί στο σύνολο τιμών αν μετακινήσετε το Β στη θέση (1) (-2,0) , (2) (-1,0);

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Παρατηρήστε προσεκτικά το ευθύγραμμο τμήμα που αναπαριστά το σύνολο τιμών σε κάθε μετακίνηση των σημείων Β και Γ.
 Πώς εξηγείται το γεγονός ότι όταν το Β μετακινηθεί στη θέση (-2,0) και σε άλλες θέσεις αριστερά αυτής το σύνολο τιμών δεν μεταβάλλεται;

2. Μπορείτε να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης ώστε με πεδίο ορισμού το [1,5] να έχει σύνολο τιμών το [-1,3]; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε το αποτέλεσμα της διερεύνησης κα αλγεβρικά;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε τα σημεία Β και Γ στις κατάλληλες θέσεις και κάντε πειράματα με τους μεταβολείς. Σε κάθε αλλαγή των παραμέτρων της συνάρτησης παρατηρήστε προσεκτικά το ευθύγραμμο τμήμα που αναπαριστά το σύνολο τιμών. Πώς εξηγείται αλγεβρικά το αποτέλεσμα των πειραμάτων σας;

3. Επιλέξτε την συνάρτηση $f(x) = 5 - 2\sqrt{x-1}$. Μπορείτε να προβλέψετε το σύνολο τιμών της συνάρτησης στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού είναι το διάστημα $[1,10]$;

Προσδιορίστε το σύνολο τιμών χρησιμοποιώντας το χαρτί και το μολύβι σας και στη συνέχεια επιβεβαιώστε το με τη βοήθεια του λογισμικού.

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

4. Επιλέξτε την συνάρτηση $f(x) = 1 - 2\sqrt{3x+1}$. Μπορείτε να προβλέψετε το σύνολο τιμών της συνάρτησης στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού είναι το διάστημα $[1,5]$; Μπορείτε να προσδιορίσετε τις τιμές των συντελεστών της συνάρτησης $f(x)$ ώστε να έχει το σύνολο τιμών συμμετρικό του προηγούμενου ως προς την αρχή των αξόνων;

Προσδιορίστε το σύνολο τιμών χρησιμοποιώντας το χαρτί και το μολύβι σας και στη συνέχεια επιβεβαιώστε το με τη βοήθεια του λογισμικού. Για την εύρεση του τύπου της συνάρτησης ώστε να έχει σύνολο τιμών το συμμετρικό του προηγούμενου σκεφτείτε ότι αν το αρχικό είναι π.χ. το $[-3,-1]$ το συμμετρικό του ως προς την αρχή των αξόνων είναι το $[1,3]$.

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

ΘΕΜΑ 4: Το σύνολο τιμών σε συνάρτηση διπλού τύπου

Στην επιφάνεια εργασίας έχουμε σχεδιάσει τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\alpha x + \beta$, με πεδίο ορισμού το διάστημα $[x(A), x(M)]$ και $g(x)$

$$= \gamma x + \delta, \text{ με πεδίο ορισμού το διάστημα } [x(M), x(B)]. \quad \varphi(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, [x(A), x(M)] \\ \gamma x + \delta, [x(M), x(B)] \end{cases}$$

Μπορείτε να μετακινήτε τα τρία σημεία A, M και B καθώς και το σημείο K και να παρατηρήτε πώς μεταβάλλεται το πεδίο ορισμού, οι τιμές της κάθε συνάρτησης καθώς και το σύνολο των τιμών τους.

Μπορείτε να διερευνήσετε τη σχέση που έχουν τα δυο σύνολα τιμών σε σχέση με τα πεδία ορισμού τους;

Διερευνήσεις:

- Μπορείτε να καθορίσετε τον τύπο κάθε συνάρτησης καθώς και τα δυο πεδία ορισμού τους ώστε το κοινό σύνολο τιμών τους να είναι το διάστημα $[-2,4]$;

Υπάρχουν πολλές απαντήσεις για πολλές συναρτήσεις. Βρείτε και περιγράψτε τουλάχιστον δυο. Το σύνολο τιμών πρέπει να αφορά και τις δυο συναρτήσεις

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

- Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=0.8$, $\beta=1$, $\gamma=0.6$ και $\delta=0.6$. Μετακινήστε το σημείο A από τη θέση του B μέχρι τη θέση του Γ και περιγράψτε πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης $\varphi(x)$. Ποιό είναι το σύνολο τιμών της;

Παρατηρήστε και περιγράψτε τι ακριβώς συμβαίνει όταν το σημείο K μετακινείται από μια θέση πολύ κοντά του M και αριστερά του σε μια θέση μόλις δεξιά του. Πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης $\varphi(x)$; Ποιό είναι τελικά το σύνολο τιμών της συνάρτησης;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

3. Πώς πρέπει να επανακαθορίσουμε τους συντελεστές των επιμέρους τύπων της συνάρτησης της προηγούμενης διερεύνησης ώστε το σύνολο τιμών να είναι ένα διάστημα και όχι ένωση διαστημάτων;

Με το ποντίκι σας Μετακινήστε τους δείκτες των μεταβολέων καθώς και τη θέση του σημείου M. Υπάρχουν πολλές απαντήσεις. Βρείτε τουλάχιστον δυο

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

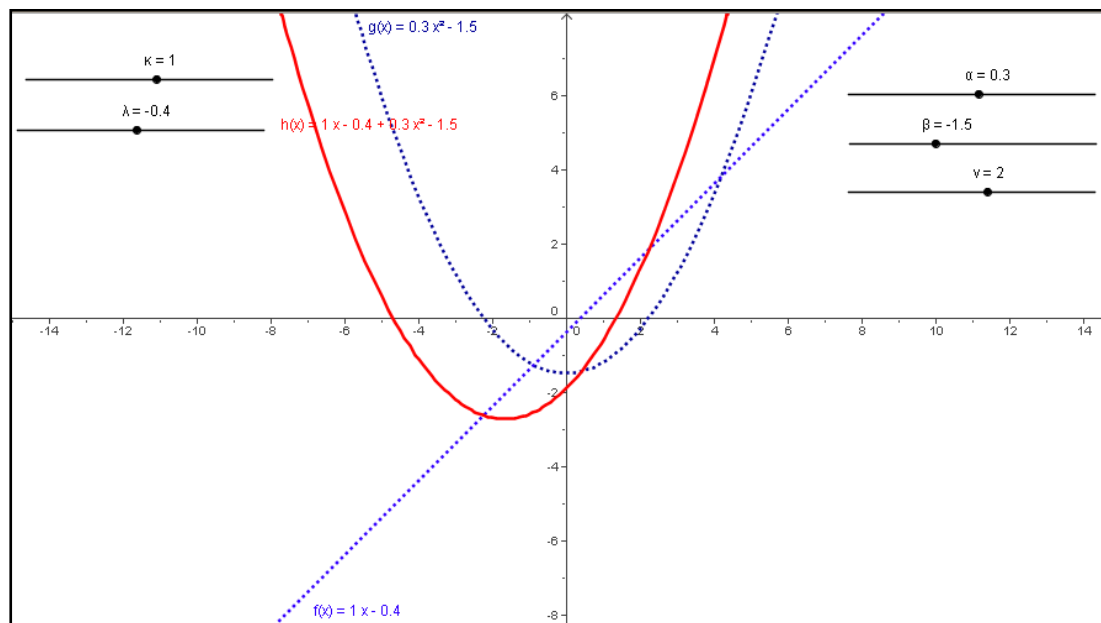
4. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=2$, $\beta=-1$, $\gamma=-2$ και $\delta=-1$. Πώς πρέπει να επιλέξετε τις θέσεις των σημείων A, B και M ώστε οι δυο γραφικές παραστάσεις να είναι συνεχόμενες; Ποιό είναι το σύνολο τιμών στην περίπτωση αυτή.

Με το ποντίκι σας Μετακινήστε τους δείκτες των μεταβολέων σύμφωνα με την διερεύνηση. Μετακινήστε ακόμα τα σημεία A, B και M ώστε οι δυο κλάδοι της συνάρτησης να είναι συνεχόμενοι. Ποιό είναι το σύνολο τιμών της συνάρτησης $\varphi(x)$; Υπάρχουν πολλές απαντήσεις. Βρείτε τουλάχιστον δυο.

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

2.5 ΣΕΝΑΡΙΟ 5 : Πράξεις συναρτήσεων



ΘΕΜΑ 1: Άθροισμα συναρτήσεων

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχουν σχεδιαστεί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = κ*x+λ$, $g(x)=α*x^2+β$ και $h(x)$ που είναι το άθροισμα αυτών. Μπορείτε να ερευνήσετε για τις ιδιότητες της συνάρτησης άθροισμα $h(x)$ που οφείλονται στις ιδιότητες της των $f(x)$ και $g(x)$;

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε για το $κ=1$, $λ=0$ και για το $α=1$. Τι αλλάζει στην συνάρτηση $h(x)$ καθώς μεταβάλλετε τον συντελεστή $β$; Τι αλλάζει στην συνάρτηση $h(x)$ καθώς μεταβάλλετε τον συντελεστή $ν$; Ποιές από τις ιδιότητες της $g(x)$ διατηρεί η $h(x)$

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

Επιλέξτε για το $ν$ την τιμή 2 και μεταβάλλετε τις τιμές του $β$. Παρατηρήστε ότι η $g(x)$ και η $h(x)$ έχουν τα κοίλα στραμμένα προς τα πάνω. Επίσης έχουν και οι δυο ελάχιστο. Ποιά διαφορά έχουν οι δύο συναρτήσεις ως προς αυτές τις ιδιότητες και που οφείλονται αυτές οι διαφορές; Πώς μεταβάλλεται το ελάχιστο της $h(x)$ αν ο συντελεστής $α$ πάρει την τιμή 2, 3, 4 κ.ο.κ. Μπορείτε να επιβεβαιώσετε τις παρατηρήσεις σας και αλγεβρικά; Επαναλάβετε τα παραπάνω επιλέγοντας την τιμή 3 για το $ν$. Πώς επιδρούν οι ιδιαίτερες ιδιότητες της $f(x)$ στις ιδιότητες του αθροίσματος των δυο συναρτήσεων; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

2. Επιλέξτε για το $κ=1$, $α=1$, $β=-2$ και $ν=4$. Τι αλλάζει στην συνάρτηση $h(x)$ καθώς μεταβάλλετε τον συντελεστή $λ$; Ποιές από τις ιδιότητες της $g(x)$ διατηρεί η $h(x)$;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

Επιλέξτε για το $ν$ την τιμή 4 και μεταβάλλετε τις τιμές του $λ$. Παρατηρήστε ποιιά γραφήματα μεταβάλλονται και πώς. Ακόμα παρατηρήστε ποιές ιδιότητες της $f(x)$ διατηρούνται και στην συνάρτηση άθροισμα $h(x)$ και ποιές όχι. Επιβεβαιώσετε τις παρατηρήσεις σας και αλγεβρικά. Επαναλάβετε τα παραπάνω επιλέγοντας διαφορετική τιμή για το $ν$. Πώς επιδρούν οι ιδιαίτερες ιδιότητες της $f(x)$ στις ιδιότητες του αθροίσματος των δυο συναρτήσεων; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Επιλέξτε για το $\lambda=0$, $\alpha=1$, $\beta=0$ και $\nu=-1$. Τι αλλάζει στην συνάρτηση $h(x)$ καθώς μεταβάλλετε τον συντελεστή κ ; Ποιές από τις ιδιότητες της $g(x)$ διατηρεί η $h(x)$;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Επιλέξτε με τους μεταβολείς τις δεδομένες τιμές για τους συντελεστές των συναρτήσεων. Παρατηρήστε ποιά γραφήματα μεταβάλλονται και πώς καθώς μετακινείτε τον δείκτη του μεταβολέα που αντιστοιχεί στο κ . Ακόμα παρατηρήστε ποιές ιδιότητες της $g(x)$ διατηρούνται και στην συνάρτηση άθροισμα $h(x)$ και ποιές όχι. Ποιά σχέση έχει η $f(x)$ και η $h(x)$;

Επαναλάβετε τα παραπάνω επιλέγοντας διαφορετική τιμή για το ν . Πώς επιδρούν οι ιδιαίτερες ιδιότητες της $f(x)$ στις ιδιότητες του αθροίσματος των δυο συναρτήσεων; Επιβεβαιώνονται οι παρατηρήσεις σας και για άλλες τιμές της μεταβλητής ν ;

Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

4. Με την εντολή Μετονομασία επανακαθορίστε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$ στην $f(x) = \kappa \cdot x^2 + \lambda$; Στη συνέχεια επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις. Ποιές ιδιότητες της $f(x)$ επιδρούν στη συνάρτηση άθροισμα $h(x)$;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Επιλέξτε με τους μεταβολείς διάφορες τιμές για τους συντελεστές των συναρτήσεων. Παρατηρήστε ποιά γραφήματα μεταβάλλονται και πώς καθώς μετακινείτε τον κάθε δείκτη του μεταβολέα που αντιστοιχεί σε ένα συντελεστή. Ακόμα παρατηρήστε ποιές ιδιότητες της $g(x)$ ή της $f(x)$ διατηρούνται και στην συνάρτηση άθροισμα $h(x)$ και ποιές όχι.

Επαναλάβετε τα παραπάνω επιλέγοντας διαφορετική τιμή για το ν . Π.χ. επιλέξτε για το ν την τιμή 3 ή -2. Πώς επιδρούν οι ιδιαίτερες ιδιότητες των επιμέρους συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ στις ιδιότητες του αθροίσματος των δυο συναρτήσεων;

Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

ΘΕΜΑ 2: Γινόμενο συναρτήσεων

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχουν σχεδιαστεί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = κ*x+λ$, $g(x)=α*x^n+β$ και $h(x)$ που είναι το γινόμενο αυτών. Μπορείτε να ερευνήσετε για τις ιδιότητες της συνάρτησης γινόμενο $h(x)$ και πώς επηρεάζεται από τις ιδιότητες της των $f(x)$ και $g(x)$;

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε για το $κ=1$, $λ=0$ και για το $α=1$. Τι αλλάζει στην συνάρτηση $h(x)$ καθώς μεταβάλλετε τον συντελεστή $β$; Πώς επιδρούν οι αλλαγές της $g(x)$ στις ιδιότητες της $h(x)$;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

2. Επιλέξτε για το $κ=1$, $α=1$, $β=-2$ και $ν=4$. Τι αλλάζει στην συνάρτηση $h(x)$ καθώς μεταβάλλετε τον συντελεστή $λ$; Ποιές από τις ιδιότητες της $g(x)$ διατηρεί η $h(x)$;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Επιλέξτε για το $ν$ την τιμή 2 και μεταβάλλετε τις τιμές του $β$. Παρατηρήστε, καθώς αυξάνετε τις τιμές του $β$, πώς μεταβάλλεται η $g(x)$ καθώς και τι είδους αλλαγές προκαλούνται στην $h(x)$. Περιγράψτε τις μεταβολές αυτές καθώς αυξάνετε τις τιμές του $β$. Επαναλάβετε τη διαδικασία και για αρνητικές τιμές του $β$. Περιγράψτε τις μεταβολές αυτές καθώς μειώνετε τις τιμές του $β$.
 Επαναλάβετε τα παραπάνω επιλέγοντας την τιμή 3 για το $ν$. Πώς επιδρούν οι ιδιαίτερες ιδιότητες της $g(x)$ στις ιδιότητες του γινομένου των δυο συναρτήσεων;
 Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Επιλέξτε για το $ν$ την τιμή 2 και μεταβάλλετε τις τιμές του $λ$. Παρατηρήστε, καθώς αυξάνετε τις τιμές του $λ$, πώς μεταβάλλεται η $f(x)$ καθώς και τι είδους αλλαγές προκαλούνται στην $h(x)$. Περιγράψτε τις μεταβολές αυτές καθώς αυξάνετε τις τιμές του $λ$. Επαναλάβετε τη διαδικασία και για αρνητικές τιμές του $λ$. Περιγράψτε τις μεταβολές αυτές καθώς μειώνετε τις τιμές του $λ$.
 Επαναλάβετε τα παραπάνω επιλέγοντας την τιμή 3 για το $ν$. Πώς επιδρούν οι ιδιαίτερες ιδιότητες της $f(x)$ στις ιδιότητες του γινομένου των δυο συναρτήσεων;
 Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Επιλέξτε για το $\lambda=0$, $\alpha=1$, $\beta=0$ και $\nu=-1$. Τι αλλάζει στην συνάρτηση $h(x)$ καθώς μεταβάλλετε τον συντελεστή κ ; Πώς εξηγούνται οι μεταβολές αυτές;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Επιλέξτε με τους μεταβολείς τις δεδομένες τιμές για τους συντελεστές των συναρτήσεων. Παρατηρήστε ποιά γραφήματα μεταβάλλονται και πώς καθώς μετακινείτε τον δείκτη του μεταβολέα που αντιστοιχεί στο κ . Ακόμα παρατηρήστε πώς επιδρά η $f(x)$ στη συνάρτηση γινόμενο $h(x)$.

Επαναλάβετε τα παραπάνω επιλέγοντας την τιμή -2, -3, -4 για το ν . Πώς επιδρούν οι ιδιαίτερες ιδιότητες της $f(x)$ στις ιδιότητες του γινομένου των δυο συναρτήσεων; Μπορείτε να εξηγήσετε αλγεβρικά τις παρατηρήσεις σας;

Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

4. Με την εντολή «Μετονομασία» επανακαθορίστε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$ στην $f(x) = \kappa \cdot x^2 + \lambda$; Στη συνέχεια επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις. Πώς μεταβάλλεται το γράφημα της συνάρτησης γινόμενο $h(x)$, σε σχέση με τις μεταβολές στα γραφήματα των $f(x)$ και $g(x)$;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Επιλέξτε με τους μεταβολείς διάφορες τιμές για τους συντελεστές των συναρτήσεων. Παρατηρήστε ποιά γραφήματα μεταβάλλονται και πώς καθώς μετακινείτε τον κάθε δείκτη του μεταβολέα που αντιστοιχεί στο σε ένα συντελεστή. Ακόμα παρατηρήστε και περιγράψτε πώς οι μεταβολές στις ιδιότητες της $g(x)$ ή της $f(x)$ επιδρούν στη συνάρτηση γινόμενο $h(x)$.

Επαναλάβετε τα παραπάνω επιλέγοντας διαφορετική τιμή για το ν . Π.χ. επιλέξτε για το ν την τιμή 3 ή -2. Πώς επιδρούν οι ιδιαίτερες ιδιότητες των επιμέρους συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ στις ιδιότητες του γινομένου των δυο συναρτήσεων;

Μπορείτε να εξηγήσετε τις μεταβολές που παρατηρήσατε;

Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

ΘΕΜΑ 3: Πηλίκο δυο συναρτήσεων

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχουν σχεδιαστεί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = κ \cdot x + λ$, $g(x) = α \cdot x^n + β$ και $h(x)$ που είναι το πηλίκο αυτών. Μπορείτε να ερευνήσετε για τις ιδιότητες της συνάρτησης πηλίκο $h(x)$ και πώς επηρεάζονται από τις ιδιότητες της των $f(x)$ και $g(x)$;

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε για το $κ=1$, $λ=0$ και για το $α=1$. Τι αλλάζει στην συνάρτηση $h(x)$ καθώς μεταβάλλετε τον συντελεστή $β$; Πώς επιδρούν οι αλλαγές της $g(x)$ στις ιδιότητες της $h(x)$;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

2. Επιλέξτε για το $κ=1$, $α=1$, $β=-1$ και $ν=2$. Τι αλλάζει στην συνάρτηση $h(x)$ καθώς μεταβάλλετε τον συντελεστή $λ$; Πώς επιδρούν οι αλλαγές της $f(x)$ στις ιδιότητες της $h(x)$;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Επιλέξτε για το $ν$ την τιμή 2 και μεταβάλλετε τις τιμές του $β$. Παρατηρήστε, καθώς αυξάνετε τις τιμές του $β$, πώς μεταβάλλεται η $g(x)$ καθώς και τι είδους αλλαγές προκαλούνται στην $h(x)$. Περιγράψτε τις μεταβολές αυτές καθώς αυξάνετε τις τιμές του $β$. Επαναλάβετε την διαδικασία και για αρνητικές τιμές του $β$. Περιγράψτε τις μεταβολές αυτές καθώς μειώνετε τις τιμές του $β$.

Επαναλάβετε τα παραπάνω επιλέγοντας την τιμή 3 για το $ν$. Πώς επιδρούν οι ιδιαίτερες ιδιότητες της $g(x)$ στις ιδιότητες του πηλίκου των δυο συναρτήσεων; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Επιλέξτε για το $ν$ την τιμή 2 και μεταβάλλετε τις τιμές του $λ$. Παρατηρήστε, καθώς αυξάνετε τις τιμές του $λ$, πώς μεταβάλλεται η $f(x)$ καθώς και τι είδους αλλαγές προκαλούνται στην $h(x)$. Περιγράψτε τις μεταβολές αυτές καθώς αυξάνετε τις τιμές του $λ$. Επαναλάβετε την διαδικασία και για αρνητικές τιμές του $λ$. Περιγράψτε τις μεταβολές αυτές καθώς μειώνετε τις τιμές του $λ$.

Επαναλάβετε τα παραπάνω επιλέγοντας την τιμή 3 για το $ν$. Πώς επιδρούν οι ιδιαίτερες ιδιότητες της $f(x)$ στις ιδιότητες του γινομένου των δυο συναρτήσεων; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Επιλέξτε για το $\lambda=0$, $\alpha=1$, $\beta=0$ και $\nu=-1$. Τι αλλάζει στην συνάρτηση $h(x)$ καθώς μεταβάλλετε τον συντελεστή κ ; Πώς εξηγούνται οι μεταβολές αυτές;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Επιλέξτε με τους μεταβολείς τις δεδομένες τιμές για τους συντελεστές των συναρτήσεων. Παρατηρήστε ποιά γραφήματα μεταβάλλονται και πώς καθώς μετακινείτε τον δείκτη του μεταβολέα που αντιστοιχεί στο κ . Ακόμα παρατηρήστε πώς επιδρά η $f(x)$ στη συνάρτηση πηλίκου $h(x)$.

Επαναλάβετε τα παραπάνω επιλέγοντας την τιμή -2, -3, -4 για το ν . Πώς επιδρούν οι ιδιαίτερες ιδιότητες της $f(x)$ στις ιδιότητες του πηλίκου των δυο συναρτήσεων; Μπορείτε να εξηγήσετε αλγεβρικά τις παρατηρήσεις σας;

Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

4. Με την εντολή «Μετονομασία» επανακαθορίστε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$ στην $f(x) = \kappa \cdot x^2 + \lambda$; Στη συνέχεια επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις. Πώς μεταβάλλεται το γράφημα της συνάρτησης γινόμενο $h(x)$, σε σχέση με τις μεταβολές στα γραφήματα των $f(x)$ και $g(x)$;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Επιλέξτε με τους μεταβολείς διάφορες τιμές για τους συντελεστές των συναρτήσεων. Παρατηρήστε ποιά γραφήματα μεταβάλλονται και πώς καθώς μετακινείτε τον κάθε δείκτη του μεταβολέα που αντιστοιχεί στο ν σε ένα συντελεστή. Ακόμα παρατηρήστε και περιγράψτε πώς οι μεταβολές στις ιδιότητες της $g(x)$ ή της $f(x)$ επιδρούν στη συνάρτηση πηλίκου $h(x)$.

Επαναλάβετε τα παραπάνω επιλέγοντας διαφορετική τιμή για το ν . Π.χ. επιλέξτε για το ν την τιμή 3 ή -2. Πώς επιδρούν οι ιδιαίτερες ιδιότητες των επιμέρους συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ στις ιδιότητες του πηλίκου των δυο συναρτήσεων; Μπορείτε να εξηγήσετε τις μεταβολές που παρατηρήσατε;

Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

ΘΕΜΑ 4: Σύνθεση δυο συναρτήσεων

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχουν σχεδιαστεί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = κ*x+λ$, $g(x)=a*x^n+β$ και $h(x)$ που είναι η σύνθεση $f(g(x))$ αυτών. Μπορείτε να ερευνήσετε για τις ιδιότητες της συνάρτησης $h(x)$ και πώς επηρεάζονται από τις ιδιότητες της των $f(x)$ και $g(x)$;

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε για το $κ=1$, $λ=0$ και για το $α=1$. Τι αλλάζει στην συνάρτηση $h(x)$ καθώς μεταβάλλετε τον συντελεστή $β$; Ποιές από τις ιδιότητες της $g(x)$ διατηρεί η $h(x)$;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

2. Επιλέξτε για το $κ=1$, $α=1$, $β=-2$ και $ν=4$. Τι αλλάζει στην συνάρτηση $h(x)$ καθώς μεταβάλλετε τον συντελεστή $λ$; Ποιές από τις ιδιότητες της $g(x)$ διατηρεί η $h(x)$;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

Επιλέξτε για το $ν$ την τιμή 2 και μεταβάλλετε τις τιμές του $β$. Παρατηρήστε ότι η $g(x)$ και η $h(x)$ έχουν τα κοίλα στραμμένα προς τα πάνω. Επίσης έχουν και οι δυο ελάχιστο. Ποιά διαφορά έχουν οι δύο συναρτήσεις ως προς αυτές τις ιδιότητες και που οφείλονται αυτές οι διαφορές; Πώς μεταβάλλεται το ελάχιστο της $h(x)$ αν ο συντελεστής $α$ πάρει την τιμή 2, 3, 4 κ.ο.κ.
 Μπορείτε να επιβεβαιώσετε τις παρατηρήσεις σας και αλγεβρικά; Επαναλάβετε τα παραπάνω επιλέγοντας την τιμή 3 για το $ν$. Πώς επιδρούν οι ιδιαίτερες ιδιότητες της $f(x)$ στις ιδιότητες της σύνθεσης $f(g(x))$ των δυο συναρτήσεων;
 Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Επιλέξτε με τους μεταβολείς τις δεδομένες τιμές για τους συντελεστές των συναρτήσεων. Παρατηρήστε ποιά γραφήματα μεταβάλλονται και πώς καθώς μετακινείτε τον δείκτη του μεταβολέα που αντιστοιχεί στο $κ$. Ακόμα παρατηρήστε ποιές ιδιότητες της $g(x)$ επηρεάζουν τις ιδιότητες της συνάρτησης $h(x)$ και ποιές όχι. Επαναλάβετε τα παραπάνω επιλέγοντας διαφορετική τιμή για το $ν$. Πώς επιδρούν οι ιδιαίτερες ιδιότητες της $f(x)$ στις ιδιότητες της σύνθεσης των δυο συναρτήσεων; Επιβεβαιώνονται οι παρατηρήσεις σας και για άλλες τιμές της μεταβλητής $ν$; ια να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Επιλέξτε για το $\lambda=0$, $\alpha=1$, $\beta=0$ και $\nu=-1$. Τι αλλάζει στην συνάρτηση $h(x)$ καθώς μεταβάλλετε τον συντελεστή κ ; Ποιές από τις ιδιότητες της $g(x)$ διατηρεί η $h(x)$;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Επιλέξτε με τους μεταβολείς διάφορες τιμές για τους συντελεστές των συναρτήσεων. Παρατηρήστε ποιά γραφήματα μεταβάλλονται και πώς καθώς μετακινείτε τον κάθε δείκτη του μεταβολέα που αντιστοιχεί στο σε ένα συντελεστή. Ακόμα παρατηρήστε και περιγράψτε πώς οι μεταβολές στις ιδιότητες της $g(x)$ ή της $f(x)$ επιδρούν στη συνάρτηση $h(x)$. Επαναλάβετε τα παραπάνω επιλέγοντας διαφορετική τιμή για το ν . Π.χ. επιλέξτε για το ν την τιμή 3 ή -2. Πώς επιδρούν οι ιδιαίτερες ιδιότητες των επιμέρους συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ στις ιδιότητες της σύνθεσης των δυο συναρτήσεων; Επαναλάβετε τα παραπάνω και για την συνάρτηση $s(x)$. Μπορείτε να εξηγήσετε τις μεταβολές που παρατηρήσατε; Ια να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

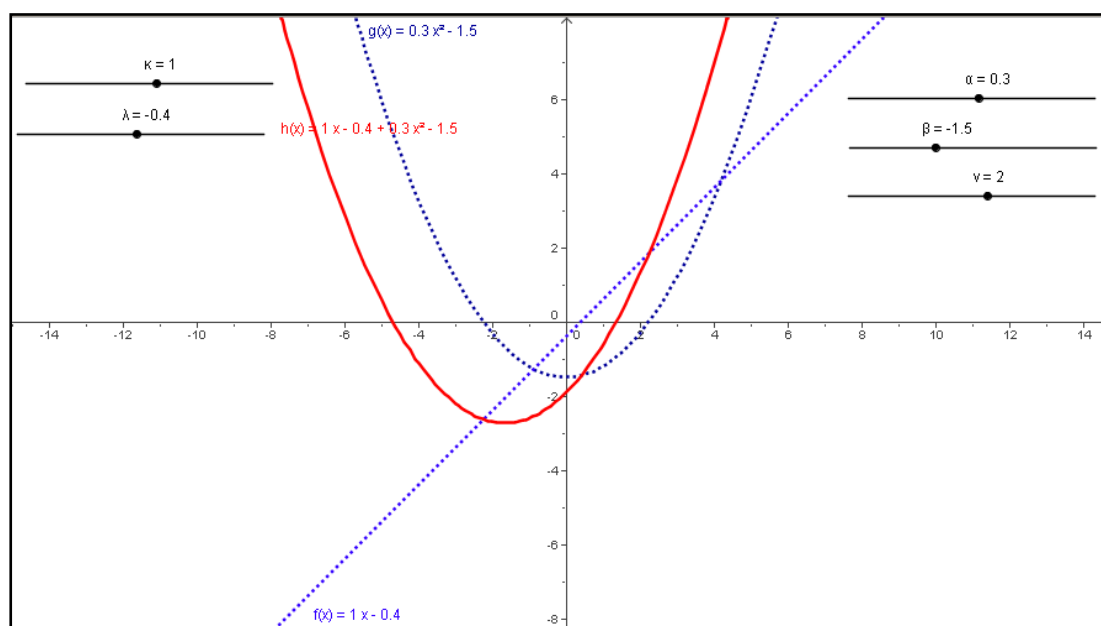
4. Με την εντολή Μετονομασία επανακαθορίστε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$ στην $f(x) = \kappa \cdot x^2 + \lambda$; Στη συνέχεια επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις. Ποιές ιδιότητες της $f(x)$ επιδρούν στη συνάρτηση σύνθεση $h(x)=f(g(x))$;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Με δεξί κλικ πάνω σε ένα αντικείμενο του μικρόκοσμου και στο μενού των εντολών που εμφανίζεται επιλέξτε "Ιδιότητες". Στο νέο μενού επιλέξτε το αντικείμενο "Συνάρτηση s" και στη συνέχεια την εντολή "Δείξε το αντικείμενο". Επαναλάβετε τις προηγούμενες δραστηριότητες και για την συνάρτηση $s(x)=g(f(x))$.

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

2.6 ΣΕΝΑΡΙΟ 6 : Ιδιότητες των συναρτήσεων



ΘΕΜΑ 1: Η μονοτονία πολυωνυμικής συνάρτησης

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a \cdot x^n + \beta$. Μπορείτε να ερευνήσετε για τον τρόπο που μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης;

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε ο δείκτης του μεταβολέα του n να δείχνει 2 και οι δείκτες των $a=1$ και $\beta=-2$. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης όταν το σημείο A κινείται προς μεγαλύτερες τιμές; Ποια είναι η μικρότερη τιμή της συνάρτησης;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

2. Επιλέξτε $a=1$, $\beta=-2$ και $n=3$. Πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης όταν μεταβάλλονται οι τιμές της μεταβλητής x ; Υπάρχει ελάχιστη ή μέγιστη τιμή; Μπορείτε να αποδείξετε την ισχύ των παρατηρήσεών σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μπορείτε να αποδείξετε τον τρόπο μεταβολής των τιμών της συνάρτησης; Μετακινήστε το σημείο A ώστε αυτό να κινείται προς τις θετικές τιμές. Παρατηρήστε τα δυο ευθύγραμμα τμήματα που αναπαριστούν τις τιμές της μεταβλητής x και της συνάρτησης $f(x)$ και παρακολουθήστε τον τρόπο μεταβολής των τιμών της συνάρτησης καθώς οι τιμές της μεταβλητής x αυξάνουν.
 Μπορείτε να επιβεβαιώσετε τις παρατηρήσεις σας και αλγεβρικά; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Μετακινήστε το σημείο A ώστε αυτό να κινείται προς τις θετικές τιμές. Παρατηρήστε τα δυο ευθύγραμμα τμήματα που αναπαριστούν τις τιμές της μεταβλητής x και της συνάρτησης $f(x)$ και παρακολουθήστε τον τρόπο μεταβολής των τιμών της συνάρτησης καθώς οι τιμές της μεταβλητής x αυξάνουν.
 Μπορείτε να επιβεβαιώσετε τις παρατηρήσεις σας και αλγεβρικά; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Επιλέξτε $\alpha=1$, $\beta=0$ και $\nu=-1$. Πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης όταν αυξάνονται οι τιμές της μεταβλητής x ; Υπάρχει ελάχιστη ή μέγιστη τιμή; Πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης όταν οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής μειώνονται; Μπορείτε να αποδείξετε την ισχύ των παρατηρήσεών σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

4. Επιλέξτε διάφορες τιμές για τους τρεις συντελεστές α , β και ν της συνάρτησης. Μπορείτε να περιγράψετε σε ποιές περιπτώσεις η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και σε ποιές περιπτώσεις είναι φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού του; Μπορείτε να περιγράψετε σε ποιές περιπτώσεις η συνάρτηση είναι κατά διαστήματα γνησίως αύξουσα και φθίνουσα; Μπορείτε να περιγράψετε σε ποιές περιπτώσεις η συνάρτηση έχει ελάχιστη και σε ποιές μέγιστη τιμή; Μπορείτε να αποδείξετε την ισχύ των παρατηρήσεών σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε το σημείο A ώστε αυτό να κινείται προς τις θετικές τιμές. Παρατηρήστε τα δυο ευθύγραμμα τμήματα που αναπαριστούν τις τιμές της μεταβλητής x και της συνάρτησης $f(x)$ και παρακολουθήστε τον τρόπο μεταβολής των τιμών της συνάρτησης καθώς οι τιμές της μεταβλητής x αυξάνουν.

Μπορείτε να επιβεβαιώσετε τις παρατηρήσεις σας και αλγεβρικά;

Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Επιλέξτε για το ν τις τιμές 1,3,5 κ.ο.κ. Μετακινήστε το σημείο A ώστε αυτό να κινείται προς τις θετικές τιμές και παρακολουθήστε τον τρόπο μεταβολής των τιμών της συνάρτησης καθώς οι τιμές της μεταβλητής x αυξάνουν.

Επαναλάβετε την διερεύνηση δίνοντας στο ν τις τιμές -1,-3,-5 κ.ο.κ. Ομοίως για τις τιμές 2,4,6,8 και μετά -2,-4, -6 κ.ο.κ. Μπορείτε να επιβεβαιώσετε τις παρατηρήσεις σας και αλγεβρικά; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5)

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

ΘΕΜΑ 2: Η μονοτονία τριγωνομετρικής συνάρτησης

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a \cdot \sin(\beta \cdot x + \gamma) + \delta$. Μπορείτε να ερευνήσετε για τον τρόπο που μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης;

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε ο δείκτης του μεταβολέα του a να δείχνει 1 και οι δείκτες των $\beta=1$, $\gamma=-2$ και $\delta=0$. Επιλέξτε ακόμα τα σημεία A και B να ορίζουν πεδίο ορισμού για τη συνάρτηση το διάστημα $[-\pi, \pi]$. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης όταν το σημείο M κινείται προς μεγαλύτερες τιμές; Ποια είναι η μικρότερη και ποια η μεγαλύτερη τιμή της συνάρτησης; Μπορείτε να αποδείξετε τον τρόπο μεταβολής των τιμών της συνάρτησης

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

2. Επιλέξτε ο δείκτης του μεταβολέα του a να δείχνει 1 και οι δείκτες των $\beta=1$, $\gamma=-2$ και $\delta=0$. Μπορείτε να καθορίσετε τη θέση των A και B ώστε στο διάστημα αυτό η συνάρτηση να είναι μόνο αύξουσα; Μπορείτε να καθορίσετε τη θέση των A και B ώστε στο διάστημα αυτό η συνάρτηση να έχει και ελάχιστη και μέγιστη τιμή (εξαιρουμένων των άκρων); Μπορείτε να αποδείξετε την ισχύ των παρατηρήσεών σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε το σημείο M ώστε αυτό να κινείται από το A προς το B . Παρατηρήστε τα δυο ευθύγραμμα τμήματα που αναπαριστούν τις τιμές της μεταβλητής x και της συνάρτησης $f(x)$ και παρακολουθήστε τον τρόπο μεταβολής των τιμών της συνάρτησης καθώς οι τιμές της μεταβλητής x αυξάνουν.

Μπορείτε να επιβεβαιώσετε τις παρατηρήσεις σας και αλγεβρικά; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Πειραματιστείτε με τις θέσεις των A και B . Σε κάθε περίπτωση Μετακινήστε το σημείο M ώστε αυτό να κινείται από το A προς το B και παρατηρήστε τα δυο ευθύγραμμα τμήματα που αναπαριστούν τις τιμές της μεταβλητής x και της συνάρτησης $f(x)$.

Μπορείτε να επιβεβαιώσετε τις παρατηρήσεις σας και αλγεβρικά; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Επιλέξτε, ο δείκτης του μεταβολέα του a να δείχνει -1 και οι δείκτες των $\beta=1$, $\gamma=-2$ και $\delta=0$. Επανακαθορίστε τη θέση των A και B που βρήκατε στην προηγούμενη διερεύνηση και εξετάστε τι αλλάζει στη μονοτονία και στα ακρότατα της συνάρτησης.
Μπορείτε να αποδείξετε την ισχύ των παρατηρήσεών σας

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

4. Επιλέξτε διάφορες τιμές για τους συντελεστές a , β , γ και δ της συνάρτησης. Επιλέξτε διάφορες θέσεις των A και B και διερευνήστε για τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης. Μπορείτε σε κάθε περίπτωση να περιγράψετε την μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης; Μπορείτε να αποδείξετε την ισχύ των παρατηρήσεών σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Επανατοποθετήστε τα σημεία A και B στις ίδιες θέσεις και πειραματιστείτε με τη μονοτονία της συνάρτησης. Σε κάθε περίπτωση Μετακινήστε το σημείο M ώστε αυτό να κινείται από το A προς το B και παρατηρήστε τα δυο ευθύγραμμα τμήματα που αναπαριστούν τις τιμές της μεταβλητής x και της συνάρτησης $f(x)$. Μπορείτε να διατυπώσετε κάποιο κανόνα όταν ο συντελεστής a παίρνει την αντίθετη τιμή; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε τις απαντήσεις σας και αλγεβρικά;
Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Σε κάθε επιλογή των τιμών των συντελεστών τοποθετείστε τα A και B σε διάφορες θέσεις και Μετακινήστε το σημείο M ώστε αυτό να κινείται πάντοτε από το A προς το B . Περιγράψτε και επιβεβαιώστε τις παρατηρήσεις σας και αλγεβρικά;
Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

ΘΕΜΑ 3: Η συνάρτηση 1 – 1

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a \cdot x^n + \beta$. Μπορείτε να ερευνήσετε σε ποιες περιπτώσεις η συνάρτηση έχει την ιδιότητα 1-1 ;

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε ο δείκτης του μεταβολέα του n να δείχνει 2 και οι δείκτες των $a=1$ και $\beta=-2$. Μπορείτε να περιγράψετε πόσες τιμές του x αντιστοιχούν σε κάθε τιμή της συνάρτησης όταν κινείτε το σημείο A; Είναι η συνάρτηση 1-1; Μπορείτε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε το σημείο A κατά μήκος του άξονα ψ/ψ . Παρατηρήστε τα σημεία τομής της οριζόντιας ευθείας όταν το A είναι στη θέση (0,1) με την συνάρτηση $f(x)$. Πόσες τιμές της μεταβλητής x μας δίνουν τιμή της συνάρτησης ίση με 1; Ισχύει το ίδιο και για άλλες θέσεις του σημείου A; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε τις παρατηρήσεις σας και αλγεβρικά; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

2. Επιλέξτε ο δείκτης του μεταβολέα του n να δείχνει 3 και οι δείκτες των $a=1$ και $\beta=-1$. Υπάρχει θέση του A που να τέμνει το γράφημα της συνάρτησης σε περισσότερα από ένα σημεία; Είναι η συνάρτηση 1-1; Μπορείτε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε το σημείο A σε διάφορες θέσεις. Παρατηρήστε τα σημεία τομής της οριζόντιας ευθείας $\psi=c$ με την συνάρτηση $f(x)$. Πόσες τιμές της μεταβλητής x μας δίνουν τιμή της συνάρτησης ίση με 1; Ισχύει το ίδιο και για άλλες θέσεις του σημείου A; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε τις παρατηρήσεις σας και αλγεβρικά; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Επιλέξτε ο δείκτης του μεταβολέα του v να δείχνει -1 και οι δείκτες των $\alpha=1$ και $\beta=0$. Υπάρχει θέση του A που να τέμνει το γράφημα της συνάρτησης σε περισσότερα από ένα σημεία; Είναι η συνάρτηση $1-1$; Μπορείτε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε το σημείο A σε διάφορες θέσεις. Παρατηρήστε τα σημεία τομής της οριζόντιας ευθείας $\psi=c$ με την συνάρτηση $f(x)$. Πόσες τιμές της μεταβλητής x μας δίνουν τιμή της συνάρτησης ίση με 1 ; Ισχύει το ίδιο και για άλλες θέσεις του σημείου A ; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε τις παρατηρήσεις σας και αλγεβρικά; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

4. Επιλέξτε $\alpha=1$, $\beta=0$ και ο δείκτης του μεταβολέα του v να δείχνει διάφορες τιμές. Μπορείτε να περιγράψετε σε ποιές περιπτώσεις έχουμε συνάρτηση $1-1$ και σε ποιες όχι; Μπορείτε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Επιλέξτε για το v τις τιμές $1,3,5$ κ.ο.κ. Μετακινήστε το σημείο A σε διάφορες θέσεις και παρατηρήστε τα σημεία τομής της γραφικής συνάρτησης με την ευθεία $\psi=c$. Επαναλάβετε την διερεύνηση δίνοντας στο v τις τιμές $-1,-3,-5$ κ.ο.κ. Μπορείτε να επιβεβαιώσετε τις παρατηρήσεις σας και αλγεβρικά; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5)

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

ΘΕΜΑ 4: Η αντίστροφη συνάρτηση

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha \cdot x^\nu + \beta$. Μπορείτε να ερευνήσετε σε ποιες περιπτώσεις η συνάρτηση έχει αντίστροφη;

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε οι δείκτες των τριών μεταβολέων να δείχνουν $\nu=2$, $\alpha=1$ και $\beta=1$. Μπορείτε να ορίσετε τη θέση των A και B ώστε το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ που ορίζουν να είναι 1-1 συνάρτηση; Είναι το συμμετρικό του τμήματος αυτού ως προς την ευθεία $\psi=\chi$ συνάρτηση; Μπορείτε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

2. Επιλέξτε οι δείκτες των τριών μεταβολέων να δείχνουν $\nu=3$, $\alpha=1$, $\beta=1$, το σημείο A να είναι στη θέση (-4,0) και το B στη θέση (4,0). Μετακινήστε το σημείο Γ από το A προς το B και αντιστρόφως. Μπορείτε να εξηγήσετε τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλονται τα σημεία K και Λ των δυο γραφημάτων; Σε ποια περίπτωση τα δυο αυτά σημεία ταυτίζονται; Μπορείτε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε τα σημεία A και B σε διάφορες θέσεις των αξόνων. Σε κάθε περίπτωση παρατηρήστε τα σημεία τομής της οριζόντιας ευθείας που διέρχεται από το E με το τμήμα της συνάρτησης $f(x)$ που ορίζεται από τη θέση των A και B. Είναι το τμήμα αυτό συνάρτηση 1-1; Παρατηρήστε ακόμα τα σημεία τομής της κατακόρυφης ευθείας που διέρχεται από το Δ με το συμμετρικό τμήμα. Είναι το συμμετρικό του ως προς την ευθεία $\psi=\chi$ συνάρτηση; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε τις παρατηρήσεις σας και αλγεβρικά;
 Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Μετακινήστε τα σημεία A και B στις δεδομένες θέσεις και κινήστε το σημείο Γ ανάμεσα σ' αυτά. Σε κάθε θέση του Γ παρατηρήστε τις θέσεις των K και Λ καθώς και των ευθύγραμμων τμημάτων που τα ενώνουν. Είναι τα K και Λ συμμετρικά ως προς την ευθεία $\psi=\chi$; Τα σημεία K και Λ ταυτίζονται στο κοινό σημείο των δυο συναρτήσεων.
 Ερευνήστε τις ιδιότητες που έχει το κοινό σημείο των δυο γραφημάτων. Μπορείτε να επιβεβαιώσετε τις παρατηρήσεις σας και αλγεβρικά;
 Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Επιλέξτε οι δείκτες των τριών μεταβολέων να δείχνουν $v=-1$, $a=1$, $\beta=1$, το σημείο A να είναι στη θέση $(-4,0)$ και το B στη θέση $(4,0)$. Μετακινήστε το σημείο Γ από το A προς το B και αντιστρόφως. Μπορείτε να εξηγήσετε τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλονται τα σημεία K και Λ των δυο γραφημάτων; Σε ποια περίπτωση τα δυο αυτά σημεία ταυτίζονται; Θα εξακολουθούν να ισχύουν οι προηγούμενες παρατηρήσεις σας αν μεταβάλετε τις θέσεις των A και B; Μπορείτε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

4. Επιλέξτε οι δείκτες των τριών μεταβολέων να δείχνουν $v=5$, $a=0.2$, $\beta=-0.2$, το σημείο A να είναι στη θέση $(-6,0)$ και το B στη θέση $(6,0)$. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί η καμπύλη (δ) είναι συνάρτηση; Μπορείτε να βρείτε τον τύπο της; Μπορείτε επίσης να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των δυο συναρτήσεων; Μπορείτε να εξηγήσετε πότε η συμμετρική καμπύλη μιας συνάρτησης ως προς τη ευθεία $\psi=\chi$ είναι συνάρτηση και πότε αυτές έχουν κοινά σημεία;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

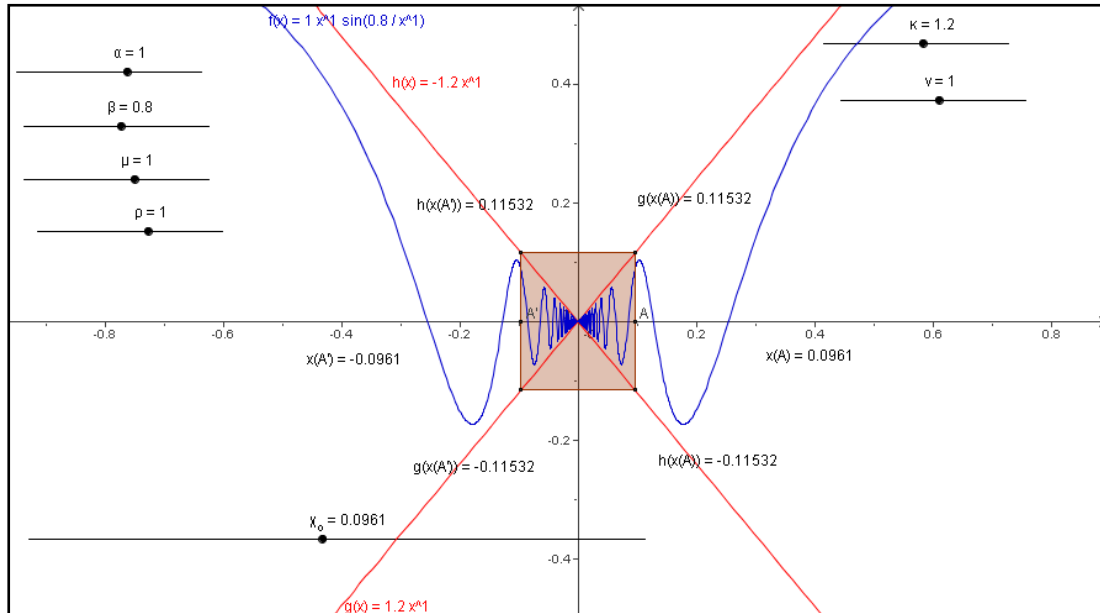
Μετακινήστε τα σημεία A και B στις δεδομένες θέσεις και κινείστε το σημείο Γ ανάμεσα σ' αυτά. Σε κάθε θέση του Γ παρατηρήστε τις θέσεις των K και Λ καθώς και των ευθύγραμμων τμημάτων που τα ενώνουν. Είναι τα K και Λ συμμετρικά ως προς την ευθεία $\psi=\chi$; Τα σημεία K και Λ ταυτίζονται στο κοινό σημείο των δυο συναρτήσεων. Ερευνήστε τις ιδιότητες που έχει το κοινό σημείο των δυο γραφημάτων. Μετακινήστε τα σημεία A και B σε άλλες θέσεις, π.χ. $(-2,0)$ και $(3,0)$ αντίστοιχα και επαναλάβετε τις ενέργειές σας. Ισχύουν τα ίδια συμπεράσματα που είχατε από την προηγούμενη θέση των A και B; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε τις παρατηρήσεις σας και αλγεβρικά; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Για να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης που αντιστοιχεί στην καμπύλη δ παρατηρήστε ότι το σημείο Λ που διατρέχει την δ είναι συμμετρικό του K που διατρέχει την συνάρτηση $f(x)$. Επίσης τα σημεία τομής θα έχουν κοινές συντεταγμένες ενώ ταυτόχρονα είναι και συμμετρικά ως προς την ευθεία $\psi=\chi$. Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αυτές τις παρατηρήσεις και αλγεβρικά; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5)

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

3 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 – Όριο και συνέχεια

3.1 ΣΕΝΑΡΙΟ 7 : Όριο συνάρτησης



ΘΕΜΑ 1: Ιδιότητες της συνάρτησης κοντά σ' ένα σημείο

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = κ*x^2 + λ*x + μ$ καθώς και ένα ορθογώνιο με κέντρο το σημείο **K** του οποίου όμως οι διαστάσεις μπορούν να μεταβάλλονται με τη βοήθεια των μεταβολέων $δ$ και $ε$. Μπορείτε να ερευνήσετε τι συμβαίνει γύρω από κάθε σημείο της καμπύλης;

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $κ=1, λ=-1$ και $μ=-1$. Μπορείτε να ορίσετε, με τη βοήθεια του ορθογωνίου μια περιοχή όσο το δυνατόν πιο κοντά στο σημείο $(1, f(1))$; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την περιοχή αυτή;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

2. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $κ=1, λ=-1$ και $μ=-1$. Μπορείτε να ορίσετε, με τη βοήθεια του ορθογωνίου, μια περιοχή με ακόμα μικρότερες διαστάσεις από αυτές που ορίσατε στην προηγούμενη διερεύνηση και να περιέχει το σημείο $(1, f(1))$; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την περιοχή αυτή;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

Μετακινήστε πρώτα το σημείο **A** στο $(1,0)$ και στη συνέχεια το σημείο **K** ώστε αυτό να συμπέσει με το σημείο **B**. Κινείστε τους δείκτες των μεταβολέων $ε$ και $δ$ ώστε να ορίσετε ένα ορθογώνιο με όσο το δυνατόν μικρότερες διαστάσεις που να περιέχει στο εσωτερικό του το σημείο **B**. Μπορείτε να περιγράψετε πόσο κοντά στο σημείο **B** βρίσκεστε; Κάντε δεξί κλικ πάνω στην επιφάνεια εργασίας, σε σημείο κοντά στο **B** και στο μενού που θα εμφανιστεί επιλέξτε την εντολή «Μεγέθυνση-Σμίκρυνση» και στον κατάλογο που θα ανοίξει επιλέξτε 200% μεγέθυνση. Μπορείτε τώρα να ορίσετε ένα ακόμα μικρότερο ορθογώνιο που να περιέχει το σημείο **B**; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Επαναλάβετε την διερεύνηση 1. Κινείστε τους δείκτες των μεταβολέων $ε$ και $δ$ ώστε να πάρουν την μικρότερη δυνατή τιμή. Κάντε δεξί κλικ πάνω στην επιφάνεια εργασίας σε ένα σημείο κοντά στο **B**, και στο μενού που θα εμφανιστεί επιλέξτε την εντολή «Μεγέθυνση-Σμίκρυνση» και στον κατάλογο που θα ανοίξει επιλέξτε 200% μεγέθυνση. Επαναλάβετε και άλλες φορές την διαδικασία αυτή. Μπορείτε τώρα να ορίσετε ένα ακόμα μικρότερο ορθογώνιο που να περιέχει το σημείο **B**; Αν κάνετε δεξί κλικ πάνω στους δυο μεταβολείς μπορείτε να επανακαθορίσετε το εύρος των τιμών κάθε μεταβολέα καθώς και το βήμα μεταβολής. Μπορείτε τώρα να ορίσετε ορθογώνιο με ακόμα μικρότερες διαστάσεις; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $k=1$, $\lambda=-2$ και $\nu=-1$. Μπορείτε να ορίσετε με τη βοήθεια του ορθογώνιου μια περιοχή με ακόμα μικρότερες διαστάσεις από αυτές που ορίσατε στην προηγούμενη διερεύνηση και να περιέχει το σημείο $(1, f(1))$; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την περιοχή αυτή;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

4. Επιλέξτε διάφορες τιμές για τους τρεις συντελεστές k , λ και ν της συνάρτησης. Μπορείτε να περιγράψετε μια διαδικασία με την οποία μπορείτε να ορίσετε ένα ορθογώνιο με όσο το δυνατόν μικρότερες διαστάσεις που να περιέχει ένα συγκεκριμένο σημείο της καμπύλης της συνάρτησης; Μπορείτε να προβλέψετε πώς πρέπει να ορίσετε τις τιμές των μεταβολέων δ και ϵ ώστε να ορίσετε το εν λόγω ορθογώνιο;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Επαναλάβετε τις εργασίες που κάνατε στις προηγούμενες διερευνήσεις. Κινείστε τους δείκτες των μεταβολέων ϵ και δ ώστε να πάρουν την μικρότερη δυνατή τιμή. Κάντε δεξί κλικ πάνω στην επιφάνεια εργασίας σε ένα σημείο κοντά στο B, και στο μενού που θα εμφανιστεί επιλέξτε την εντολή «Μεγέθυνση-Σμίκρυνση» και στον κατάλογο που θα ανοίξει επιλέξτε 200% μεγέθυνση. Επαναλάβετε και άλλες φορές την διαδικασία αυτή. Μπορείτε τώρα να ορίσετε ένα ακόμα μικρότερο ορθογώνιο που να περιέχει το σημείο B; Αν κάνετε δεξί κλικ πάνω στους δυο μεταβολείς μπορείτε να επανακαθορίσετε το εύρος των τιμών κάθε μεταβολέα καθώς και το βήμα μεταβολής. Μπορείτε τώρα να ορίσετε ορθογώνιο με ακόμα μικρότερες διαστάσεις; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Επιλέξτε για το ν τις τιμές $-2, -3, 3, 4$ κτλ. Επιλέξτε ένα σημείο B της καμπύλης μετακινώντας το σημείο A. Μπορείτε να ορίσετε ένα ορθογώνιο με διαστάσεις $\delta=\epsilon=0.0001$; Μπορείτε να περιγράψετε αλγεβρικά την διαδικασία που σκοπεύετε να ακολουθήσετε; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5)

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

ΘΕΜΑ 2: Το ε και το δ του ορίου

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = κ \cdot x^λ + λ$ καθώς και οι ευθείες $ψ=L$ και $χ = χ_ο$. Ένα ορθογώνιο που δημιουργείται από τις ευθείες $ψ=L-ε$, $ψ=L+ε$, $χ=χ_ο -δ$ και $χ=χ_ο +δ$ μπορεί να κινείται ελεύθερα σύροντας το σημείο $χ_ο$ αλλά και να μεταβάλλονται οι διαστάσεις του μέσω των μεταβολέων των $δ$ και $ε$. Μπορείτε για κάθε $χ_ο$ να ερευνήσετε για το όριο της συνάρτησης στο σημείο αυτό;

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $κ=1$, $λ=-2$ και $ν=1$. Επιλέξτε ακόμα το σημείο $χ_ο$ να είναι στη θέση $(1,0)$ και ο δείκτης του μεταβολέα $ε$ να δείχνει 0,3. Μπορείτε να ορίσετε με τη βοήθεια του μεταβολέα $δ$ μια κατάλληλη τιμή ώστε το ορθογώνιο που θα ορίσετε να δίνει μια ικανοποιητική προσέγγιση στο όριο της συνάρτησης στο $χ_ο$; Μπορείτε να επαναλάβετε τον ορισμό του $δ$ όταν μικραίνετε την τιμή του $ε$;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο $χ_ο$ στο $(2,0)$ και στη συνέχεια το σημείο L ώστε οι ευθείες $χ=χ_ο$ και $ψ=L$ να τέμνονται πάνω σε σημείο της καμπύλης. Στη συνέχεια μετακινήστε τον δείκτη του μεταβολέα $ε$ ώστε να δείχνει 0,3. Κινείστε τον δείκτη του μεταβολέα $δ$ μέχρι να ορίσετε ένα ορθογώνιο του οποίου οι δυο απέναντι κορυφές να ανήκουν στην καμπύλη. Μπορείτε να περιγράψετε μια αλγεβρική σχέση μεταξύ των $δ$ και $ε$; Τι θα συμβεί αν μειώσετε ακόμα την τιμή του $δ$; Κάντε δεξί κλικ πάνω στην επιφάνεια εργασίας, σε σημείο κοντά στο B και στο μενού που θα εμφανιστεί επιλέξτε την εντολή «Μεγέθυνση-Σμίκρυνση» και στον κατάλογο που θα ανοίξει επιλέξτε 200% μεγέθυνση. Μπορείτε τώρα να ορίσετε ένα ακόμα μικρότερο ορθογώνιο με δεδομένο το $ε=0.3$; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

2. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\kappa=1$, $\lambda=-2$ και $\nu=1$. Μπορείτε να ερευνήσετε για τις τιμές του δ που ορίζουν μια καλή προσέγγιση του ορίου της συνάρτησης στα σημεία $\chi_0 = 2$, όταν το ε δείχνει 0,03; Μπορείτε να εξηγήσετε αλγεβρικά αυτή την προσέγγιση του ορίου;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Κάντε δεξί κλικ πάνω στον μεταβολέα ε και στο μενού που θα εμφανιστεί επιλέξτε "Ιδιότητες". Στη συνέχεια στο πλαίσιο "Διάστημα" επιλέξτε Ελάχιστο = 0.001 και Μέγιστο = 0.005. Ακόμα στο πλαίσιο "Αύξηση" επιλέξτε τιμή 0.001. Επαναλάβετε το ίδιο και για τον μεταβολέα του δ . Κάντε δεξί κλικ πάνω στην επιφάνεια εργασίας σε ένα σημείο κοντά στο ορθογώνιο, και στο μενού που θα εμφανιστεί επιλέξτε την εντολή «Μεγέθυνση-Σμίκρυνση» και στον κατάλογο που θα ανοίξει επιλέξτε 200% μεγέθυνση. Επαναλάβετε και άλλες φορές την διαδικασία αυτή. Μπορείτε τώρα να ορίσετε ένα κατάλληλο ορθογώνιο που να δίνει μια αξιόπιστη προσέγγιση του ορίου της συνάρτησης στο χ_0 ;

Μπορείτε να επαναλάβετε την παραπάνω διαδικασία και για ακόμα μικρότερες τιμές του ε . Σε κάθε περίπτωση προσπαθήστε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τους ισχυρισμούς σας λύνοντας τις ανισότητες, $|f(x)-L| < \varepsilon$ και $|x-\chi_0| < \delta$.

Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Με την επιλογή «Επαναπροσδιορισμός» επανακαθορίστε τον τύπο της συνάρτησης ως εξής: $f(x) = κ*(x-1)^{ν+λ}$. Στη συνέχεια επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $κ=2$, $λ=1$ και $ν=0.5$. Μπορείτε να ερευνήσετε για το όριο της συνάρτησης στα διάφορα σημεία της καμπύλης; Τι συμβαίνει στο αριστερό άκρο της καμπύλης; Μπορείτε να εξηγήσετε αλγεβρικά την προσέγγιση του ορίου με το ορθογώνιο;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Κάντε δεξί κλικ πάνω στον μεταβολέα $ε$ και στο μενού που θα εμφανιστεί επιλέξτε "Ιδιότητες". Στη συνέχεια στο πλαίσιο "Διάστημα" επιλέξτε Ελάχιστο = 0.001 και Μέγιστο = 0.005. Ακόμα στο πλαίσιο "Αύξηση" επιλέξτε τιμή 0.001. Επαναλάβετε το ίδιο και για τον μεταβολέα $δ$. Κάντε δεξί κλικ πάνω στην επιφάνεια εργασίας σε ένα σημείο κοντά στο ορθογώνιο, και στο μενού που θα εμφανιστεί επιλέξτε την εντολή "Μεγέθυνση-Σμίκρυνση" και στον κατάλογο που θα ανοίξει επιλέξτε 200% μεγέθυνση. Επαναλάβετε και άλλες φορές την διαδικασία αυτή. Μπορείτε τώρα να ορίσετε ένα κατάλληλο ορθογώνιο που να δίνει μια αξιόπιστη προσέγγιση του ορίου της συνάρτησης στο $χ_0$; Μπορείτε να επαναλάβετε την παραπάνω διαδικασία και για ακόμα μικρότερες τιμές του $ε$. Σε κάθε περίπτωση προσπαθήστε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τους ισχυρισμούς σας λύνοντας τις ανισότητες, $|f(x)-L| < ε$ και $|x-χ_0| < δ$. Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

4. Μπορείτε να υπολογίσετε το όριο της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{3x - 5}{\sqrt{x^2 - 10x + 25}} \text{ στο } x_0=5;$$

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Επιλέξτε οι τρεις δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\kappa=1, \lambda=0$ και $\nu=1$. Στη συνέχεια επιλέξτε την εντολή «Επαναπροσδιορισμός» και πληκτρολογήστε τον τύπο

$$g(x) = \kappa \cdot (3 \cdot x - 5)^{\nu} / \sqrt{x^2 - 10 \cdot x + 25} + \lambda.$$

Μετακινήστε το σημείο x_0 στη θέση (5,0). Επιλέξτε για $\epsilon=1$ ή και μικρότερες τιμές και βρείτε το δ ώστε να κατασκευάσετε ένα προσαρμοσμένο ορθογώνιο. Μπορείτε με την εντολή «Μεγέθυνση-Σμίκρυνση» να επιλέξετε σμίκρυνση της καμπύλης στο 50% ή και μικρότερη. Γιατί δεν μπορείτε να ορίσετε ένα προσαρμοσμένο ορθογώνιο; Μπορείτε να περιγράψετε αλγεβρικά την διαδικασία που σκοπεύετε να ακολουθήσετε; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5)

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

ΘΕΜΑ 3: Το όριο συνάρτησης διπλού τύπου στο χ_0

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & x < \chi_0 \\ \kappa x + \lambda, & x > \chi_0 \end{cases}$$

Μπορείτε να ερευνήσετε για το όριο της συνάρτησης (1) στα διάφορα σημεία της καμπύλης και (2) στο σημείο χ_0 ;

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=1, \beta=0, \kappa=-0.4, \lambda=3, \mu=-1$ και $\nu=2$. Ακόμα επιλέξτε το σημείο A να είναι στη θέση (2,0) και το σημείο χ_0 να είναι στη θέση (1,0). Αν ο δείκτης του μεταβολέα ϵ να δείχνει 0,3 μπορείτε να ορίσετε με τη βοήθεια του μεταβολέα δ μια κατάλληλη τιμή ώστε το ορθογώνιο που θα ορίσετε να δίνει μια ικανοποιητική προσέγγιση στο όριο της συνάρτησης στο χ_0 ; Μπορείτε να επαναλάβετε τον ορισμό του δ όταν μικραίνετε την τιμή του ϵ ; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την περιοχή αυτή;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στο (2,0) και το χ_0 στο (1,0). Στη συνέχεια μετακινήστε το σημείο L ώστε οι ευθείες $x=\chi_0$ και $y=L$ να τέμνονται πάνω σε σημείο της καμπύλης. Ακολούθως μετακινήστε τον δείκτη του μεταβολέα ϵ ώστε να δείχνει 0,3. Κινείστε τον δείκτη του μεταβολέα δ μέχρι να ορίσετε ένα ορθογώνιο του οποίου οι δυο απέναντι κορυφές να ανήκουν στην καμπύλη. Μπορείτε να περιγράψετε μια αλγεβρική σχέση μεταξύ των δ και ϵ ; Τι θα συμβεί αν μειώσετε ακόμα την τιμή του δ ; Κάντε δεξί κλικ πάνω στην επιφάνεια εργασίας, σε σημείο κοντά στο B και στο μενού που θα εμφανιστεί επιλέξτε την εντολή Zoom και στον κατάλογο που θα ανοίξει επιλέξτε 200% μεγέθυνση. Μπορείτε τώρα να ορίσετε ένα ακόμα μικρότερο ορθογώνιο με δεδομένο το $\epsilon=0.3$;
 Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

2. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=1$, $\beta=0$, $\kappa=-0.4$, $\lambda=3$, $\mu=-1$ και $\nu=2$. Ακόμα επιλέξτε το σημείο A να είναι στη θέση (2,0) και το σημείο χ_0 να είναι στη θέση (3,0). Αν ο δείκτης του μεταβολέα ε δείχνει 0,1 μπορείτε να ορίσετε με τη βοήθεια του μεταβολέα δ μια κατάλληλη τιμή ώστε το ορθογώνιο που θα ορίσετε να δίνει μια ικανοποιητική προσέγγιση στο όριο της συνάρτησης στο χ_0 ; Μπορείτε να επαναλάβετε τον ορισμό του δ όταν μικραίνετε την τιμή του ε ; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την περιοχή αυτή;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

3. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=1$, $\beta=0$, $\kappa=-0.4$, $\lambda=3$, $\mu=-1$ και $\nu=2$. Ακόμα επιλέξτε το σημείο A να είναι στη θέση (2,0) και το σημείο χ_0 να είναι στη θέση (2,0). Μπορείτε με τους δείκτες των μεταβολέων ε και δ να ορίσετε ένα κατάλληλα προσαρμοσμένο ορθογώνιο που να δίνει μια προσέγγιση στο όριο της συνάρτησης στο χ_0 ; Μπορείτε να εξηγήσετε την κατάσταση αυτή αλγεβρικά;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στο (2,0) και το χ_0 στο (3,0). Στη συνέχεια μετακινήστε το σημείο L ώστε οι ευθείες $\chi=\chi_0$ και $y=L$ να τέμνονται πάνω σε σημείο της καμπύλης. Ακολουθώντας μετακινήστε τον δείκτη του μεταβολέα ε ώστε να δείχνει 0,1. Κινείστε τον δείκτη του μεταβολέα δ μέχρι να ορίσετε ένα ορθογώνιο του οποίου οι δυο απέναντι κορυφές να ανήκουν στην καμπύλη. Μπορείτε να περιγράψετε μια αλγεβρική σχέση μεταξύ των δ και ε ; Τι θα συμβεί αν μειώσετε ακόμα την τιμή του δ ; Κάντε δεξί κλικ πάνω στην επιφάνεια εργασίας, σε σημείο κοντά στο B και στο μενού που θα εμφανιστεί επιλέξτε την εντολή Zoom και στον κατάλογο που θα ανοίξει επιλέξτε 200% μεγέθυνση. Μπορείτε τώρα να ορίσετε ένα ακόμα μικρότερο ορθογώνιο με δεδομένο το $\varepsilon=0.1$; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στο (2,0) και το χ_0 στο (2,0). Στη συνέχεια μετακινήστε το σημείο L ώστε οι ευθείες $\chi=\chi_0$ και $y=L$ να τέμνονται πάνω σε σημείο της καμπύλης. Ακολουθώντας μετακινήστε τον δείκτη του μεταβολέα ε ώστε να δείχνει 0,3. Μπορείτε με τον δείκτη του μεταβολέα δ να ορίσετε ένα ορθογώνιο του οποίου οι δυο απέναντι κορυφές να ανήκουν στην καμπύλη. Μπορείτε να περιγράψετε τι συμβαίνει γύρω από το σημείο χ_0 ; Κάντε δεξί κλικ πάνω στην επιφάνεια εργασίας, σε σημείο κοντά στο B και στο μενού που θα εμφανιστεί επιλέξτε την εντολή «Μεγέθυνση-Σμίκρυνση» και στον κατάλογο που θα ανοίξει επιλέξτε μεγέθυνση ή σμίκρυνση. Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

4. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=1$, $\beta=0$, $\kappa=-0.4$, $\lambda=3$, $\mu=-1$ και $\nu=2$. Ακόμα επιλέξτε το σημείο A να είναι στη θέση (2,0) και το σημείο χ_0 να είναι στη θέση (2,0). Τι πρέπει να μεταβάλετε στον ορισμό της συνάρτησης ώστε αυτή να έχει όριο στο σημείο χ_0 . Μπορείτε με τους δείκτες των μεταβολέων ϵ και δ να ορίσετε τώρα ένα κατάλληλα προσαρμοσμένο ορθογώνιο που να δίνει μια προσέγγιση στο όριο της συνάρτησης στο χ_0 ; Μπορείτε να εξηγήσετε την κατάσταση αυτή αλγεβρικά;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στο (2,0) και το χ_0 στο (2,0). Στη συνέχεια μεταβάλετε κατάλληλα όποιους από τους δείκτες των α , β , κ , λ ή μ χρειάζεται ώστε να πετύχετε την συνάρτηση που θα σας επιτρέψει να ορίσετε με τους δείκτες των ϵ και δ ένα κατάλληλα προσαρμοσμένο ορθογώνιο.
 Μπορείτε να περιγράψετε τι συμβαίνει γύρω από το σημείο χ_0 ;
 Κάντε δεξί κλικ πάνω στην επιφάνεια εργασίας, σε σημείο κοντά στο B και στο μενού που θα εμφανιστεί επιλέξτε την εντολή Zoom και στον κατάλογο που θα ανοίξει επιλέξτε μεγέθυνση ή σμίκρυνση. Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

ΘΕΜΑ 4: Το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha \cdot x^\rho \cdot \sin(\beta/x^\mu)$ καθώς και των συναρτήσεων $g(x)=\kappa \cdot x^\nu$ και $h(x) = -\kappa \cdot x^\nu$. Μπορείτε να ερευνήσετε σε ποιες περιπτώσεις η συνάρτηση $f(x)$ είναι για κάθε x ανάμεσα στις $g(x)$ και $h(x)$;

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=1, \beta=1, \mu=1, \rho=1$ και $\nu=1$. Ποιά είναι η ελάχιστη τιμή του κ ώστε η συνάρτηση $f(x)$ να βρίσκεται πάντοτε ανάμεσα στις συναρτήσεις $g(x)$ και $h(x)$. Τι συμβαίνει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τον δείκτη του μεταβολέα β ; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την περιοχή αυτή;

Μετακινήστε τον δείκτη του μεταβολέα κ μέχρι να βρείτε την ελάχιστη τιμή για την οποία η συνάρτηση $f(x)$ να βρίσκεται ανάμεσα στις συναρτήσεις $g(x)$ και $h(x)$. Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα των ενεργειών σας; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

2. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=1, \beta=2, \mu=1$ και $\rho=2$. Ποιά είναι η ελάχιστη τιμή του κ και του ν ώστε η συνάρτηση $f(x)$ να βρίσκεται πάντοτε ανάμεσα στις συναρτήσεις $g(x)$ και $h(x)$. Τι συμβαίνει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τους δείκτες των μεταβολέων β και μ ; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την περιοχή αυτή;

Μετακινήστε τους δείκτες των μεταβολέων κ και ν μέχρι να βρείτε την ελάχιστη τιμή για την οποία η συνάρτηση $f(x)$ να βρίσκεται ανάμεσα στις συναρτήσεις $g(x)$ και $h(x)$. Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα των ενεργειών σας; Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί το γράφημα της συνάρτησης $f(x)$ παραμένει πάντοτε ανάμεσα στις $h(x)$ και $g(x)$ καθώς μεταβάλλετε τις τιμές των παραμέτρων β και μ ; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

3. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=0.3$, $\beta=1$, $\rho=0,5$ και $\mu=2$. Ποιά είναι η ελάχιστη τιμή του κ και του ν ώστε η συνάρτηση $f(x)$ να βρίσκεται πάντοτε ανάμεσα στις συναρτήσεις $g(x)$ και $h(x)$. Τι συμβαίνει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τους δείκτες των μεταβολέων β και μ ; Μπορείτε να εξηγήσετε την κατάσταση αυτή αλγεβρικά;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

4. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=0.5$, $\mu=-1$ και $\rho=1$. Ποιά είναι η ελάχιστη τιμή του κ και του ν ώστε η συνάρτηση $f(x)$ να βρίσκεται πάντοτε ανάμεσα στις συναρτήσεις $g(x)$ και $h(x)$. Τι συμβαίνει στο γράφημα όταν μεταβάλλετε τους δείκτες των μεταβολέων β και μ ; Μπορείτε να εξηγήσετε την κατάσταση αυτή αλγεβρικά;

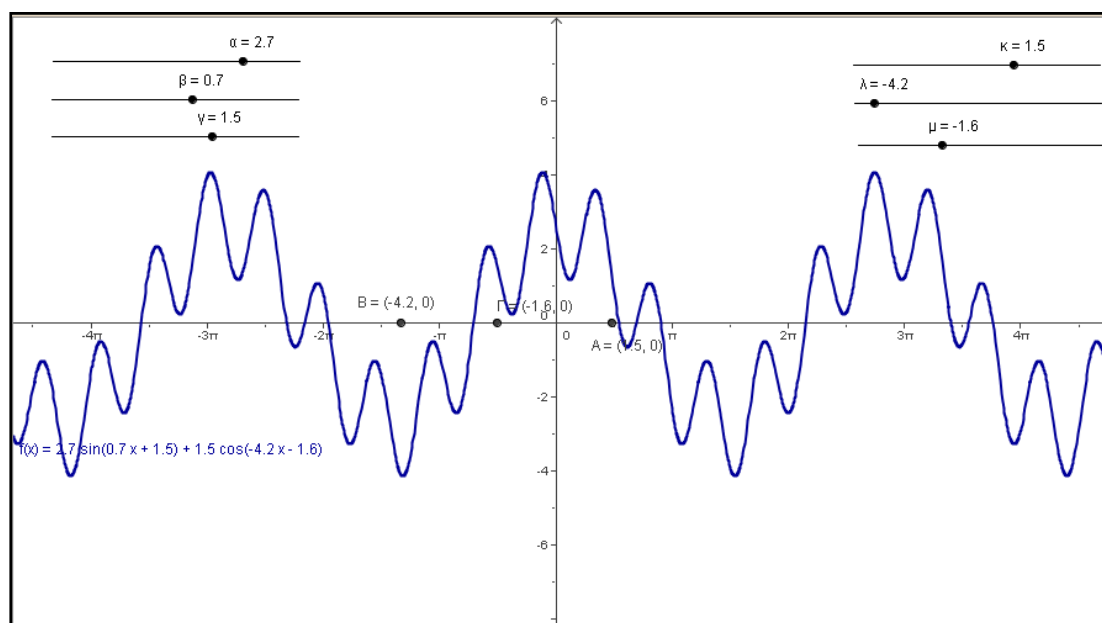
Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε τους δείκτες των μεταβολέων κ και ν μέχρι να βρείτε την ελάχιστη τιμή για την οποία η συνάρτηση $f(x)$ να βρίσκεται ανάμεσα στις συναρτήσεις $g(x)$ και $h(x)$. Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα των ενεργειών σας; Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί το γράφημα της συνάρτησης $f(x)$ παραμένει πάντοτε ανάμεσα στις $h(x)$ και $g(x)$ καθώς μεταβάλλετε τις τιμές των παραμέτρων β και μ ; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Μετακινήστε τους δείκτες των μεταβολέων κ και ν μέχρι να βρείτε την ελάχιστη τιμή για την οποία η συνάρτηση $f(x)$ να βρίσκεται ανάμεσα στις συναρτήσεις $g(x)$ και $h(x)$. Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα των ενεργειών σας; Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί το γράφημα της συνάρτησης $f(x)$ παραμένει πάντοτε ανάμεσα στις $h(x)$ και $g(x)$ καθώς μεταβάλλετε τις τιμές των παραμέτρων β και μ ; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

3.2 ΣΕΝΑΡΙΟ 8 : Συνέχεια συνάρτησης και εφαρμογές



ΘΕΜΑ 1: Προσέγγιση των ριζών συνάρτησης

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha*x+\beta*\cos(\gamma*x)+\delta$. Μπορείτε να διερευνήσετε αν έχει ρίζες και να τις προσδιορίσετε;

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=1$ και $\delta=-4$. Μπορείτε να προσδιορίσετε ένα διάστημα στο οποίο να ανήκει μια ρίζα της συνάρτησης; Μπορείτε να εκφράσετε και να εξηγήσετε αλγεβρικά την ύπαρξη της ρίζας καθώς και τη διαδικασία προσέγγισης αυτής;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Ρίζα της συνάρτησης είναι η τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής x που μηδενίζει την συνάρτηση. Δηλαδή κάθε σημείο του γραφήματος που έχει συντεταγμένες $(x,0)$.
 Κάντε δεξί κλικ πάνω στην επιφάνεια εργασίας, σε σημείο κοντά στο Β και στο μενού που θα εμφανιστεί επιλέξτε την εντολή «Μεγέθυνση-Σμίκρυνση» και στον κατάλογο που θα ανοίξει επιλέξτε 400% μεγέθυνση. Μπορείτε να επαναλάβετε την διαδικασία της μεγέθυνσης πολλές φορές. Πόσο κοντά στη ρίζα της συνάρτησης μπορείτε να βρεθείτε; Μπορείτε να προσδιορίσετε ένα διάστημα με όσο το δυνατόν μικρότερο εύρος στο οποίο να περιέχεται η ρίζα;
 Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

2. Μπορείτε να προσδιορίσετε τους συντελεστές της συνάρτησης ώστε αυτή να έχει ακριβώς δυο ρίζες στο διάστημα $[\pi,2\pi]$;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Επιλέξτε αρχικά $\alpha=1$, $\delta=-4$ και στη συνέχεια Μετακινήστε τον δείκτη β ή τον δείκτη γ ώστε η καμπύλη να τέμνει τον άξονα x' , στο διάστημα $[\pi, 2\pi]$ σε δυο σημεία. Μπορείτε τώρα να προσδιορίσετε δυο διαστήματα με όσο το δυνατόν μικρότερο εύρος όπου σε καθένα από αυτά να ανήκει μια από τις δυο ρίζες;
 Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Μπορείτε να ορίσετε τις τιμές των συντελεστών της συνάρτησης ώστε αυτή στο διάστημα $[\pi, 2\pi]$ να περιέχει ακριβώς πέντε ρίζες; Μπορείτε να τις προσδιορίσετε με μια ικανοποιητική προσέγγιση; Μπορείτε να εξηγήσετε ποιός συντελεστής της εξίσωσης ευθύνεται για το πλήθος των ριζών σε ένα διάστημα;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Επιλέξτε αρχικά $\alpha=1$, $\delta=-4$ και στη συνέχεια Μετακινήστε τον δείκτη β ή τον δείκτη γ ώστε η καμπύλη να τέμνει τον άξονα x' , στο διάστημα $[\pi, 2\pi]$ σε πέντε σημεία. Μπορείτε τώρα να προσδιορίσετε πέντε διαστήματα με όσο το δυνατόν μικρότερο εύρος όπου σε καθένα από αυτά να ανήκει μια από τις πέντε ρίζες; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

4. Επιλέξτε $\delta=0$ και $\beta=5$. Μπορείτε να ορίσετε τις τιμές των άλλων συντελεστών της συνάρτησης ώστε αυτή στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ να περιέχει ακριβώς δέκα ρίζες; Μπορείτε να τις προσδιορίσετε με μια ικανοποιητική προσέγγιση; Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί οι δυο συντελεστές α και γ της συνάρτησης ευθύνονται για το πλήθος των ριζών της σε ένα διάστημα;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Επιλέξτε αρχικά $\beta=5$, $\delta=0$ και στη συνέχεια Μετακινήστε τον δείκτη α ή τον δείκτη γ ώστε η καμπύλη να τέμνει τον άξονα x' , στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ σε δέκα σημεία. Μπορείτε τώρα να προσδιορίσετε δέκα διαστήματα με όσο το δυνατόν μικρότερο εύρος όπου σε καθένα από αυτά να ανήκει μια από τις δέκα ρίζες; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

ΘΕΜΑ 2: Συνέχεια και ρίζες συνάρτησης

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$h(x) = \begin{cases} \alpha x^\gamma + \beta, & x \leq x_0 \\ \kappa x^\mu, & x > x_0 \end{cases}$$

Μπορείτε να ερευνήσετε την συνέχεια της συνάρτησης σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0 και τότε στο διάστημα αυτό περιέχει μια τουλάχιστον ρίζα;

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=1, \beta=1, \gamma=1, \nu=2, \kappa=1$ και $\mu=2$. Μπορείτε να ορίσετε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της στο οποίο να περιέχεται το σημείο x_0 και να είναι συνεχής σ' αυτό; Μπορείτε να εξηγήσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Μετακινήστε το σημείο x_0 και παρατηρήστε πώς μεταβάλλεται η απόσταση μεταξύ των δυο άκρων της καμπύλης. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί δεν είναι δυνατόν να συμπίπτουν τα άκρα των δυο τμημάτων της καμπύλης σε κάποιο x_0 ; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

2. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=1, \beta=1, \gamma=1, \nu=2$ και $\kappa=2$. Μπορείτε να ορίσετε την τιμή του μ και ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της συνάρτησης στο οποίο να περιέχεται το σημείο x_0 και να είναι συνεχής σ' αυτό; Μπορείτε να εξηγήσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Επιλέξτε για παράδειγμα $\mu=3$. Μετακινήστε το σημείο x_0 και παρατηρήστε πώς μεταβάλλεται η απόσταση μεταξύ των δυο άκρων της καμπύλης. Μπορείτε να μετακινήσετε το σημεί B ώστε να ταυτίζεται με το x_0 και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσετε τους μεταβολείς ϵ και δ για να ορίσετε ένα όσο μικρών διαστάσεων ορθογώνιο σας επιτρέπει το πρόγραμμα. Μην ξεχνάτε να κάνετε "Μεγέθυνση" της περιοχής κοντά στο x_0 . Εξηγήστε και αλγεβρικά τη συνέχεια στο x_0 ; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=-1$, $\beta=3$, $\nu=2$, $\kappa=2$ και $\mu=-2$. Μπορείτε να εξετάσετε αν υπάρχει ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της στο οποίο η συνάρτηση είναι συνεχής, περιέχει το σημείο χ_0 , και έχει μια τουλάχιστον ρίζα σ' αυτό; Μπορείτε να εξηγήσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε το σημείο χ_0 και παρατηρήστε πώς μεταβάλλεται η απόσταση μεταξύ των δυο άκρων των δυο τμημάτων της καμπύλης. Για να δικαιολογήσετε την ύπαρξη του σημείου χ_0 στο οποίο αυτή είναι συνεχής θα χρειαστεί να εξετάσετε αν τα πλευρικά όρια στο σημείο αυτό είναι ίσα. Για να ορίσετε διάστημα που να περιέχει το χ_0 και να έχει μια τουλάχιστον ρίζα σ' αυτό θα χρειαστεί να εξετάσετε αν στα άκρα του διαστήματος η συνάρτηση βρίσκεται εκατέρωθεν του $\chi\chi'$. Προσπαθήστε να αποδείξετε την απάντησή σας. Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

4. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=-3$ και $\nu=-0.5$. Μπορείτε να ορίσετε τιμές για τους υπόλοιπους συντελεστές και ένα διάστημα στο οποίο να περιέχεται το σημείο χ_0 και η συνάρτηση να έχει τουλάχιστον μια ρίζα σ' αυτό; Μπορείτε να εξηγήσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Επιλέξτε για παράδειγμα, $\beta=2,5$, $\kappa=1.7$ και $\mu=-0.5$. Μετακινήστε στη συνέχεια το σημείο χ_0 και παρατηρήστε πώς μεταβάλλεται η απόσταση μεταξύ των δυο άκρων της καμπύλης. Για να δικαιολογήσετε την ύπαρξη του σημείου χ_0 στο οποίο αυτή είναι συνεχής θα χρειαστεί να εξετάσετε αν τα πλευρικά όρια στο σημείο αυτό είναι ίσα. Δηλαδή θα χρειαστεί να εξετάσετε αν η εξίσωση που προκύπτει έχει μια ρίζα σε διάστημα που να περιέχει το χ_0 . Μπορείτε τώρα να ορίσετε τώρα ένα διάστημα το οποίο να περιέχει το χ_0 και η αρχική συνάρτηση να έχει μια τουλάχιστον ρίζα σ' αυτό; Πώς αποδεικνύεται η απάντησή σας; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

Θέμα 3: Το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών συνάρτησης

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^v + \beta, & x < x_A \\ \psi_A, & x = x_A \\ \frac{\kappa x + \lambda}{\sqrt{x + \mu}}, & x > x_A \end{cases}$$

Μπορείτε να ερευνήσετε για τα διαστήματα τιμών της συνάρτησης ως προς το πεδίο ορισμού της;

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=0.4$, $\beta=0$, $v=2$, $\kappa=1$, $\lambda=-2$ και $\mu=1$. Μπορείτε να ορίσετε θέσεις των A, B και Γ καθώς και μια τιμή του y_A ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού (x_B, x_G) που ορίζουν τα σημεία B και Γ; Μπορείτε να εξηγήσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Κινήστε τα σημεία B, Γ και ψ_A και παρατηρήστε πώς μεταβάλλονται οι δυο κλάδοι της συνάρτησης καθώς και το σημείο K. Εξηγήστε αλγεβρικά γιατί είναι συνεχής στο διάστημα που ορίσατε. Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

2. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=0.4$, $\beta=0$, $v=2$, $\kappa=1$, $\lambda=-2$ και $\mu=1$. Μπορείτε να ορίσετε θέσεις των A, B και Γ καθώς και μια τιμή του ψ_A , ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού (x_B, x_G) και το σύνολο τιμών της που αντιστοιχεί σ' αυτό να είναι ένα διάστημα και όχι ένωση διαστημάτων; Μπορείτε να εξηγήσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Το σύνολο τιμών προφανώς εξαρτάται από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης καθώς και από τις υπόλοιπες παραμέτρους που την ορίζουν. Επιλέξτε κατάλληλα τα A, B, Γ και ψ_A ώστε το σύνολο τιμών να είναι ένα διάστημα και όχι ένωση δυο διαστημάτων. Στο γράφημα δηλαδή να μην παρουσιάζεται κενό μεταξύ των δυο διαστημάτων που αναπαριστώνται από τα δυο ευθύγραμμα τμήματα που έχουν κόκκινο και κίτρινο χρώμα. Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

3. Πώς πρέπει να επιλεγούν οι τιμές των παραμέτρων της συνάρτησης καθώς και το πεδίο ορισμού της (x_B, x_G), ώστε κάθε σημείο του συνόλου τιμών της να είναι εικόνα ενός σημείου του πεδίου ορισμού της;
Μπορείτε να εξηγήσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Υπάρχουν περισσότερες από μια σωστές απαντήσεις. Κάντε δοκιμές και πειράματα κινώντας τους δείκτες των μεταβολέων καθώς και τα σημεία A, B και Γ. Εξετάστε τις περιπτώσεις όπου υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο στο σύνολο τιμών που δεν αντιστοιχεί σε σημείο του πεδίου ορισμού. Σκεφτείτε, ποιές προϋποθέσεις πρέπει να πληρούνται για να ισχύει το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών.

Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5)

4. Επαναλάβετε την προηγούμενη δραστηριότητα και για άλλες τιμές των παραμέτρων της συνάρτησης και διατυπώστε το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών για κάθε περίπτωση. Ισχύει το θεώρημα στην περίπτωση που το σημείο $(0, \psi_A)$ δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης;
Μπορείτε να εξηγήσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Επιλέξτε για παράδειγμα, $\alpha=0,2, \beta=-1,4, \nu=3, \kappa=1, \lambda=-5$ και $\mu=-0.9$. Το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών ισχύει στην περίπτωση που το σύνολο τιμών είναι ένα διάστημα και όχι σύνολο διαστημάτων και επιπλέον κάθε αριθμός του συνόλου τιμών είναι εικόνα μιας τιμής του πεδίου ορισμού. Δηλαδή θα χρειαστεί να επιλέξετε έτσι την συνάρτηση και το πεδίο ορισμού ώστε να έχει ένα διάστημα για σύνολο τιμών και επιπλέον να είναι συνεχής σ' αυτό. Πώς αποδεικνύεται ότι η επιλογή της συνάρτησης και του πεδίου ορισμού σας έχει τις προϋποθέσεις του θεωρήματος; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

Θέμα 4: Εφαρμογές των θεωρημάτων

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha*(x-\kappa)*(x-\lambda)+\beta*(x-\lambda)*(x-\mu)+\gamma*(x-\mu)*(x-\kappa)$. Μπορείτε (1) να ερευνήσετε για τις ρίζες της συνάρτησης καθώς και για το πρόσημο των τιμών της στα διαστήματα του πεδίου ορισμού της και (2) να επαναλάβετε την έρευνα και για άλλες συναρτήσεις;

Διερευνήσεις:

1. Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha*(x-\kappa)*(x-\lambda)+\beta*(x-\lambda)*(x-\mu)+\gamma*(x-\mu)*(x-\kappa)$. Μπορείτε να ερευνήσετε: (1) Σε ποιες περιπτώσεις η συνάρτηση έχει δυο ρίζες και σε ποια διαστήματα. (2) Ποιοί είναι το πρόσημο των τιμών της στα αντίστοιχα διαστήματα του πεδίου ορισμού της.

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

Επιλέξτε να έχετε τιμές για τους δείκτες α, β, γ θετικές και για τους δείκτες κ, λ, μ τιμές τέτοιες ώστε $\kappa < \lambda < \mu$. Τι παρατηρείτε σχετικά με το πλήθος των ριζών καθώς και με τα διαστήματα (κ, λ) και (λ, μ) . Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα των ενεργειών σας; Τι ισχύει για τις άλλες περιπτώσεις των τιμών των παραμέτρων; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

2. Επιλέξτε την εντολή «Επαναπροσδιορισμός» και πληκτρολογήστε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha*\sin(\beta*x+\gamma)+\kappa*x+\lambda$. Επιλέξτε οι δείκτες των παραμέτρων να δείχνουν $\alpha=1, \beta=1, \gamma=0, \kappa=1$ και $\lambda=-1$. Πόσες ρίζες έχει η συνάρτηση στη διάστημα $(0,\pi)$; Μπορείτε να αποδείξετε αλγεβρικά τον ισχυρισμό σας; Ερευνήστε για την ύπαρξη ριζών στο διάστημα $(0,\pi)$ και για άλλες τιμές των παραμέτρων και αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

Επιλέξτε διάφορες τιμές για τους δείκτες $\alpha, \beta, \gamma, \kappa$ και λ . Τι παρατηρείτε σχετικά με το πλήθος των ριζών στο διάστημα $(0,\pi)$; Έχει πάντοτε μια τουλάχιστο ρίζα στο διάστημα $(0,\pi)$; Επιλέξτε για παράδειγμα $\alpha=0.3, \beta=4, \gamma=3, \kappa= 0.8$ και $\lambda=2$. Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα των ενεργειών σας; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Επιλέξτε την εντολή «Επαναπροσδιορισμός» και πληκτρολογήστε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \tan(\beta \cdot x + \gamma) + \kappa \cdot \sqrt{x} + \lambda$. Μπορείτε να ερευνήσετε για το πλήθος των ριζών της στο διάστημα $(0, \pi)$ για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων της; Μπορείτε να εξηγήσετε και αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Επιλέξτε διάφορες τιμές για τους δείκτες $\alpha, \beta, \gamma, \kappa$ και λ . Επιλέξτε ακόμα η μονάδα του οριζόντιου άξονα να είναι το π . Τι παρατηρείτε σχετικά με το πλήθος των ριζών στο διάστημα $(0, \pi)$; Έχει σε κάθε περίπτωση μια τουλάχιστο ρίζα στο διάστημα αυτό; Επιλέξτε για παράδειγμα $\alpha=0.1, \beta=4, \gamma=3, \kappa=-3.7$ και $\lambda=-1$. Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το πλήθος των ριζών της στο διάστημα $(0, \pi)$;

Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

4. Επιλέξτε την εντολή «Επαναπροσδιορισμός» και πληκτρολογήστε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \sin(\beta \cdot x + \gamma) + \kappa \cdot \cos(\lambda \cdot x + \mu)$. Μπορείτε να ερευνήσετε για το πλήθος των ριζών της στο διάστημα $(0, \pi)$ για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων της; Μπορείτε να εξηγήσετε και αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

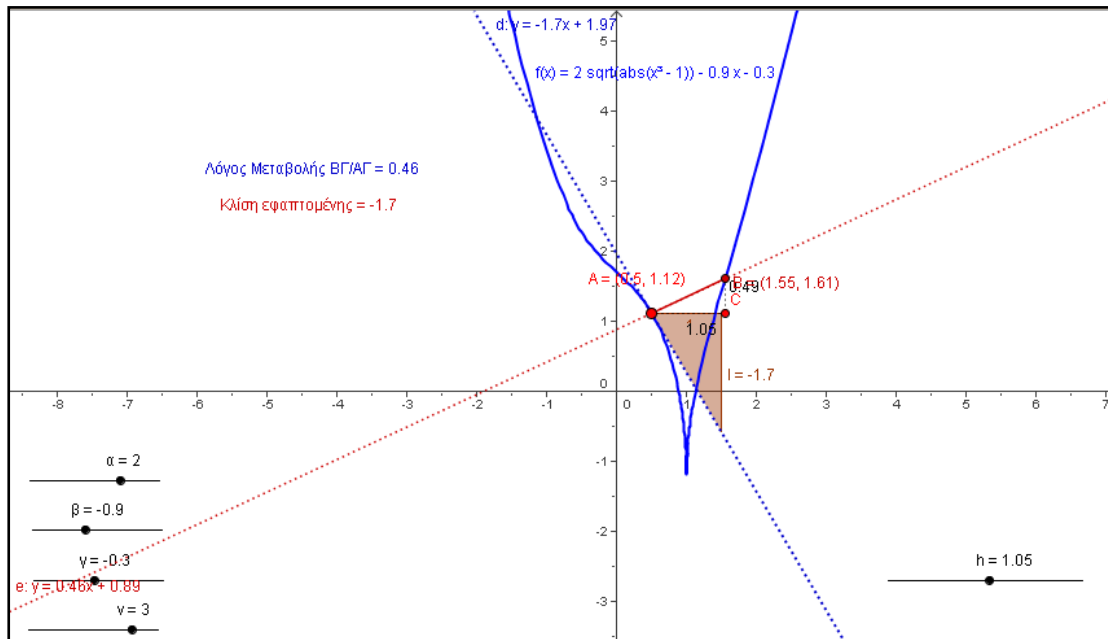
Επιλέξτε αρχικά $\alpha=1, \beta=1, \gamma=0, \kappa=1, \lambda=1$ και $\mu=0$ και ακόμα η μονάδα του οριζόντιου άξονα να είναι το π . Έχει η αντίστοιχη συνάρτηση μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, \pi)$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τον ισχυρισμό στο διάστημα $(0, \pi)$; Μπορείτε να επαναλάβετε την διερεύνηση και για άλλες τιμές για τους δείκτες $\alpha, \beta, \gamma, \kappa, \lambda$ και μ ; Τι παρατηρείτε σχετικά την μορφή του γραφήματος, τις τιμές της συνάρτησης και το πλήθος των ριζών στο διάστημα $(0, \pi)$;

Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

4 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 - Παράγωγος

4.1 ΣΕΝΑΡΙΟ 9 : Η έννοια της παραγώγου



Θέμα 1: Η έννοια της εφαπτομένης καμπύλης

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=a*x^n+\beta*x+\gamma$, δυο σημεία της A και B καθώς και η ευθεία AB. Μπορείτε να ερευνήσετε για τη θέση της ευθείας AB ως προς την γραφική παράσταση της συνάρτησης όταν το A παραμένει σταθερό στη θέση με τετμημένη 1 και το B πλησιάζει το A;

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=0.2$, $\beta=0$, $\gamma=0$ και $n=2$ και το A να είναι στη θέση με τετμημένη 1. Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο μεταβολής της ευθείας AB όταν το σημείο B πλησιάζει το σημείο A; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την μεταβολή αυτή;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στη θέση με τετμημένη 1 και στη συνέχεια το σημείο B ώστε αυτό να πλησιάζει το σημείο A. Μπορείτε να περιγράψετε πόσο κοντά στο σημείο A μπορεί να φτάσει το B; Κάντε δεξί κλικ πάνω στην επιφάνεια εργασίας, σε σημείο κοντά στο B και στο μενού που θα εμφανιστεί επιλέξτε την εντολή «Μεγέθυνση-Σμίκρυνση» και στον κατάλογο που θα ανοίξει επιλέξτε 200% μεγέθυνση. Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο μεταβολής της ευθείας AB παρατηρώντας την εξίσωσή της; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

2. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=0.2$, $\beta=1$, $\gamma=0$ και $n=1$. Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο μεταβολής της ευθείας AB όταν το σημείο B πλησιάζει το σημείο A; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την μεταβολή αυτή;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε το σημείο B ώστε αυτό να πλησιάζει το σημείο A. Μπορείτε να περιγράψετε πόσο κοντά στο σημείο A μπορεί να φτάσει το B; Κάντε δεξί κλικ πάνω στην επιφάνεια εργασίας, σε σημείο κοντά στο B και στο μενού που θα εμφανιστεί επιλέξτε την εντολή «Μεγέθυνση-Σμίκρυνση» και στον κατάλογο που θα ανοίξει επιλέξτε 200% μεγέθυνση. Μπορείτε να περιγράψετε και να εξηγήσετε τον τρόπο μεταβολής της ευθείας AB παρατηρώντας την εξίσωσή της; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=0.2$, $\beta=-1$, $\gamma=0$ και $\nu=3$. Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο μεταβολής της ευθείας AB όταν το σημείο B πλησιάζει το σημείο A; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την μεταβολή αυτή;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

Μετακινήστε το σημείο B ώστε αυτό να πλησιάζει το σημείο A. Μπορείτε να περιγράψετε και να εξηγήσετε τον τρόπο μεταβολής της ευθείας AB παρατηρώντας την εξίσωσή της; Μπορείτε να αποδείξετε γιατί η ευθεία AB τέμνει την καμπύλη της συνάρτησης σε ένα ακόμα σημείο καθώς το σημείο B πλησιάζει το σημείο A; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

4. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=0$ και $\nu=-2$. Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο μεταβολής της ευθείας AB όταν το σημείο B πλησιάζει το σημείο A; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την μεταβολή αυτή;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

Αρχικά επιλέξτε το σημείο A στη θέση (1,2). Μετακινήστε το σημείο B ώστε αυτό να πλησιάζει το σημείο A. Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο μεταβολής της ευθείας AB παρατηρώντας την εξίσωσή της; Μπορείτε να αποδείξετε γιατί η ευθεία AB τέμνει την καμπύλη της συνάρτησης σε ένα ακόμα σημείο καθώς το σημείο B πλησιάζει το σημείο A; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

Θέμα 2: Ο λόγος μεταβολής $[f(x_A+h)-f(x_A)]/h$

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha \cdot x^\nu + \beta \cdot x + \gamma$, δυο σημεία της A και B καθώς και η ευθεία AB. Το σημείο B έχει οριστεί να έχει συντεταγμένες $(x_A+h, f(x_A+h))$. Μπορείτε να ερευνήσετε για τον τρόπο μεταβολής του λόγου $[f(x_A+h)-f(x_A)]/h$ καθώς το h πλησιάζει το 0 ενώ το A παραμένει σταθερό στη θέση με τετμημένη 1;

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=0.2$, $\beta=1$, $\gamma=0$ και $\nu=2$. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται ο λόγος μεταβολής $[f(x_A+h)-f(x_A)]/h$ καθώς το h πλησιάζει το 0; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την μεταβολή αυτή και να βρείτε το όριο

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_A + h) - f(x_A)}{h} \right];$$

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

2. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=0.2$, $\beta=1$, $\gamma=0$ και $\nu=1$. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται ο ο λόγος μεταβολής $[f(x_A+h)-f(x_A)]/h$ καθώς το h πλησιάζει το 0; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την μεταβολή αυτή και να βρείτε το όριο του λόγου μεταβολής

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_A + h) - f(x_A)}{h} \right];$$

Πώς συνδέεται με την κλίση της καμπύλης;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στο (1,1.2) και στη συνέχεια τον δείκτη του μεταβολέα h ώστε το σημείο B να πλησιάζει στο σημείο A.

Μπορείτε να περιγράψετε πόσο κοντά στο σημείο A μπορεί να φτάσει το B; Κάντε δεξί κλικ πάνω στην επιφάνεια εργασίας, σε σημείο κοντά στο B και στο μενού που θα εμφανιστεί επιλέξτε την εντολή «Μεγέθυνση-Σμίκρυνση» και στον κατάλογο που θα ανοίξει επιλέξτε 200% μεγέθυνση. Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο μεταβολής του λόγου μεταβολής σε σχέση με την κλίση της ευθείας AB παρατηρώντας την εξίσωσή της;

Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στο (1,1.2) και στη συνέχεια τον δείκτη του μεταβολέα h ώστε το σημείο B να πλησιάζει στο σημείο A. Μπορείτε να περιγράψετε πόσο κοντά στο σημείο A μπορεί να φτάσει το B; Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο μεταβολής του λόγου μεταβολής σε σχέση με την κλίση της ευθείας AB παρατηρώντας την εξίσωσή της; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=0.2$, $\beta=-1$, $\gamma=2$ και $\nu=3$. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται ο λόγος μεταβολής $[f(x_A+h)-f(x_A)]/h$ καθώς το h πλησιάζει το 0;
Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την μεταβολή αυτή και να βρείτε το όριο του λόγου μεταβολής

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_A + h) - f(x_A)}{h} \right];$$

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

4. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=0$ και $\nu=-2$. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται ο λόγος μεταβολής $[f(x_A+h)-f(x_A)]/h$ καθώς το h πλησιάζει το 0;
Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την μεταβολή αυτή και να βρείτε το όριο του λόγου μεταβολής

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_A + h) - f(x_A)}{h} \right];$$

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στο (1,1.2) και στη συνέχεια τον δείκτη του μεταβολέα h ώστε το σημείο B να πλησιάζει στο σημείο A. Μπορείτε να περιγράψετε πόσο κοντά στο σημείο A μπορεί να φτάσει το B; Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο μεταβολής του λόγου μεταβολής σε σχέση με την κλίση της ευθείας AB παρατηρώντας την εξίσωσή της; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Αρχικά επιλέξτε το σημείο A στη θέση (1,2) και στη συνέχεια τον δείκτη του μεταβολέα h ώστε το σημείο B να πλησιάζει στο σημείο A. Μπορείτε να περιγράψετε πόσο κοντά στο σημείο A μπορεί να φτάσει το B; Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο μεταβολής του λόγου μεταβολής σε σχέση με την κλίση της ευθείας AB παρατηρώντας την εξίσωσή της; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

Θέμα 3: Ο ορισμός της εφαπτομένης καμπύλης σε σημείο της

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha \cdot x^{\nu}+\beta \cdot x+\gamma$, δυο σημεία της A και B, η εφαπτομένη της καμπύλης στο A καθώς και η ευθεία AB. Το σημείο B έχει οριστεί να έχει συντεταγμένες $(x_A+h, f(x_A+h))$. Μπορείτε να ερευνήσετε για τον τρόπο μεταβολής του λόγου $[f(x_A+h)-f(x_A)]/h$ καθώς το h πλησιάζει το 0 και να τον συσχετίσετε με την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο A, όταν το A είναι σταθερό στη θέση με τετμημένη 1;

Διερευνήσεις

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=0.2, \beta=1, \gamma=0$ και $\nu=2$. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται ο λόγος μεταβολής $[f(x_A+h)-f(x_A)]/h$ καθώς το h πλησιάζει το 0; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την μεταβολή αυτή και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο A;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

2. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=0.2, \beta=1, \gamma=0$ και $\nu=1$. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται ο λόγος μεταβολής $[f(x_A+h)-f(x_A)]/h$ καθώς το h πλησιάζει το 0; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την μεταβολή αυτή και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο A; Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στο (1,1.2) και στη συνέχεια τον δείκτη του μεταβολέα h ώστε το σημείο B να πλησιάζει στο σημείο A.

Μπορείτε να υπολογίσετε το όριο του λόγου μεταβολής

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_A + h) - f(x_A)}{h} \right]$$

και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο A;

Ταυτίζεται η εξίσωση που βρήκατε με την εξίσωση της εφαπτομένης στο A; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στο (1,1.2) και στη συνέχεια τον δείκτη του μεταβολέα h ώστε το σημείο B να πλησιάζει στο σημείο A. Μπορείτε να υπολογίσετε το όριο του λόγου μεταβολής

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_A + h) - f(x_A)}{h} \right]$$

και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο A; Εξετάστε αν η εξίσωση που βρήκατε ταυτίζεται με την εξίσωση της εφαπτομένης στο A; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=0.2$, $\beta=-1$, $\gamma=2$ και $\nu=3$. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται ο λόγος μεταβολής $[f(x_A+h)-f(x_A)]/h$ καθώς το h πλησιάζει το 0; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την μεταβολή αυτή και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο A;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

4. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=0$ και $\nu=-2$. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται ο λόγος μεταβολής $[f(x_A+h)-f(x_A)]/h$ καθώς το h πλησιάζει το 0; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την μεταβολή αυτή και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο A;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στο (1,1.2) και στη συνέχεια τον δείκτη του μεταβολέα h ώστε το σημείο B να πλησιάζει στο σημείο A.

Μπορείτε να υπολογίσετε το όριο του λόγου μεταβολής

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_A + h) - f(x_A)}{h} \right]$$

και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο A;

Εξετάστε αν η εξίσωση που βρήκατε ταυτίζεται με την εξίσωση της εφαπτομένης στο A;

Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5)

Αρχικά επιλέξτε το σημείο A στη θέση (1,2) και στη συνέχεια τον δείκτη του μεταβολέα h ώστε το σημείο B να πλησιάζει στο σημείο A. Μπορείτε να υπολογίσετε το όριο του λόγου μεταβολής

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_A + h) - f(x_A)}{h} \right]$$

και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο A;

Εξετάστε αν η εξίσωση που βρήκατε ταυτίζεται με την εξίσωση της εφαπτομένης στο A;

Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

Θέμα 4: Η εφαπτομένη σε ειδικά σημεία

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha*\sqrt{abs(x)}+\beta*x+\gamma$, δυο σημεία της A και B, η εφαπτομένη της καμπύλης στο A καθώς και η ευθεία AB. Το σημείο B έχει οριστεί να έχει συντεταγμένες $(x_A+h, f(x_A+h))$. Μπορείτε να ερευνήσετε για τον τρόπο μεταβολής του λόγου $[f(x_A+h)-f(x_A)]/h$ καθώς το h πλησιάζει το 0 και να τον συσχετίσετε με την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο A; Τι συμβαίνει στις κορυφές της καμπύλης;

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=2, \beta=0, \gamma=-1$ και $v=3$. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται ο λόγος μεταβολής $[f(x_A+h)-f(x_A)]/h$, καθώς το h πλησιάζει στο 0, όταν το σημείο A είναι στη θέση (1,-1); Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την μεταβολή αυτή και να προσδιορίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο A; Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί δεν υπάρχει εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο A(1,-1);

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

2. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=2, \beta=2, \gamma=-1$ και $v=4$. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται ο λόγος μεταβολής $[f(x_A+h)-f(x_A)]/h$ καθώς το h πλησιάζει στο σημείο A; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την μεταβολή αυτή και να προσδιορίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο A; Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί δεν υπάρχει εφαπτομένη της καμπύλης στις κορυφές (1,1) και (-1,-3);

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στη θέση (1,-1) και Μετακινήστε το h από αρνητικές τιμές προς το 0. Παρατηρήστε το πρόσημο και τον τρόπο μεταβολής της κλίσης της εφαπτομένης στο σημείο B. Ακόμα παρατηρήστε τον λόγο μεταβολής καθώς το h τείνει στο 0. Επαναλάβετε το ίδιο όταν το h τείνει στο 0 από δεξιά. Τέλος βρείτε το παρακάτω όριο και χρησιμοποιήστε το ως κλίση της εφαπτομένης AB.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_A + h) - f(x_A)}{h} \right]$$

Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί δεν υπάρχει εφαπτομένη της συνάρτησης στο σημείο A; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A πρώτα σε μια τυχαία θέση και βρείτε την εφαπτομένη της καμπύλης στην θέση αυτή. Δηλαδή βρείτε το παρακάτω όριο και χρησιμοποιήστε το ως κλίση της ευθείας AB.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_A + h) - f(x_A)}{h} \right]$$

Στη συνέχεια μετακινήστε το σημείο A στη θέση (1,1) και μετά στη θέση (-1,-3) και επαναλάβετε τα προηγούμενα. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί δεν υπάρχει εφαπτομένη της συνάρτησης στις δυο κορυφές; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=2$, $\beta=0$, $\gamma=-1$ και $\nu=-1$. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται ο λόγος μεταβολής $[f(x_A+h)-f(x_A)]/h$ καθώς το h πλησιάζει στο σημείο A ; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την μεταβολή αυτή και να προσδιορίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο A ; Μπορείτε να περιγράψετε και να εξηγήσετε τι συμβαίνει με την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο A όταν η τετμημένη του πλησιάζει στο 0 ;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

4. Επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις και για άλλες τιμές των παραμέτρων. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται ο λόγος μεταβολής $[f(x_A+h)-f(x_A)]/h$ καθώς το h πλησιάζει το 0 όταν το σημείο βρίσκεται σε μια τυχαία θέση;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A πρώτα σε μια τυχαία θέση και βρείτε την εφαπτομένη της καμπύλης στην θέση αυτή. Δηλαδή βρείτε το παρακάτω όριο και χρησιμοποιήστε το ως κλίση της ευθείας AB .

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_A + h) - f(x_A)}{h} \right]$$

Στη συνέχεια μετακινήστε το σημείο A ώστε η τετμημένη του να πλησιάζει στο 0 και επαναλάβετε τα προηγούμενα. Μπορείτε να εξηγήσετε πώς μεταβάλλεται η κλίση της εφαπτομένης στην περίπτωση αυτή; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

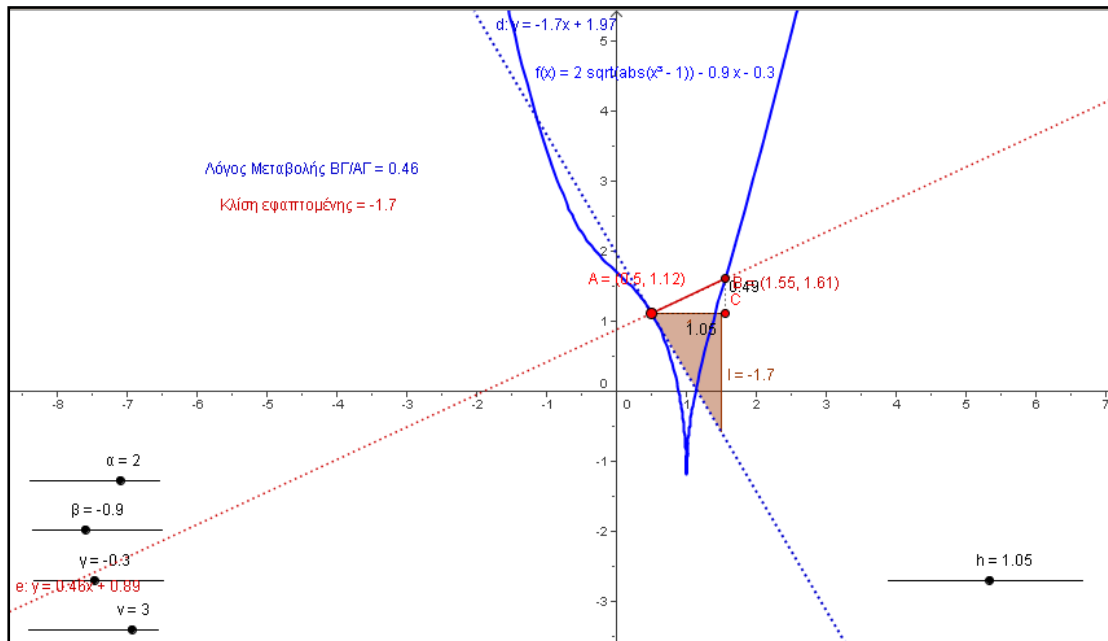
Επιλέξτε ο δείκτης ν να δείχνει τους ακέραιους αριθμούς και οδηγήστε το σημείο A στις θέσεις των κορυφών ή η τετμημένη του να πλησιάζει στο 0 . Στις περιπτώσεις αυτές υπολογίστε το παρακάτω όριο

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_A + h) - f(x_A)}{h} \right]$$

και στη συνέχεια εξετάστε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο A ; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

4.2 ΣΕΝΑΡΙΟ 10 : Η παράγωγος συνάρτηση



ΘΕΜΑ 1: Μεταβολή της κλίσης της εφαπτομένης

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha \cdot x^{\nu}+\beta \cdot x+\gamma$. Ακόμα έχει σχεδιαστεί η καμπύλη της κλίσης της εφαπτομένης. Δηλαδή έχει σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τύπος των σημείων που έχουν τετμημένη την τετμημένη του σημείου A και τεταγμένη την κλίση της εφαπτομένης στο σημείο A. Ερευνήστε τον τρόπο μεταβολής της κλίσης της εφαπτομένης.

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε "«Επαναπροσδιορισμός»" και πληκτρολογήστε τη συνάρτηση $f(x)=0.2 \cdot x^2$. Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο μεταβολής της κλίσης της εφαπτομένης στο σημείο A καθώς μεταβάλλετε τη θέση του στην καμπύλη; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την καμπύλη της κλίσης;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A και παρακολουθήστε τον τρόπο μεταβολής του σημείου B. Μπορείτε να περιγράψετε και να εξηγήσετε πότε η κλίση της εφαπτομένης στο A αυξάνει και πότε ελαττώνεται; Πότε η κλίση της εφαπτομένης είναι θετική και πότε αρνητική; Πότε η κλίση είναι 0; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

2. Επιλέξτε "«Επαναπροσδιορισμός»" και πληκτρολογήστε τη συνάρτηση $f(x)=\alpha \cdot x^{\nu}+\beta \cdot x+\gamma$ ώστε οι παράμετροι της να είναι $\alpha=0.2$, $\beta=0$, $\gamma=0$ και $\nu=1$. Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο μεταβολής της κλίσης της εφαπτομένης στο σημείο A καθώς μεταβάλλετε τη θέση του στην καμπύλη; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την καμπύλη της κλίσης; Τι θα συμβεί στην καμπύλη της κλίσης αν μεταβάλετε τους δείκτες των μεταβολέων β ή γ ;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A και παρακολουθήστε τον τρόπο μεταβολής του σημείου B. Μπορείτε να περιγράψετε και να εξηγήστε πώς μεταβάλλεται η κλίση της εφαπτομένης στο A; Τι μεταβάλλεται στην καμπύλη της κλίσης αν αλλάξετε τις τιμές των β ή γ ; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Πληκτρολογήστε τη συνάρτησης $f(x)=\alpha \cdot x^n + \beta \cdot x + \gamma$ ώστε οι παράμετροι της να είναι $\alpha=0.2$, $\beta=0$, $\gamma=0$ και $n=3$. Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο μεταβολής της κλίσης της εφαπτομένης στο σημείο A καθώς μεταβάλλετε τη θέση του στην καμπύλη; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την καμπύλη της κλίσης; Τι θα συμβεί στην καμπύλη της κλίσης αν μεταβάλλετε τους δείκτες των μεταβολέων β ή γ ;

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A και παρακολουθήστε τον τρόπο μεταβολής του σημείου B. Μπορείτε να περιγράψετε και να εξηγήσετε πότε η κλίση της εφαπτομένης στο A αυξάνει και πότε ελαττώνεται; Πότε η κλίση της εφαπτομένης είναι θετική και πότε αρνητική; Πότε η κλίση είναι 0; Τι μεταβάλλεται στην καμπύλη της κλίσης αν αλλάξετε τις τιμές των β ή γ ; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

4. Επιλέξτε κατά την πληκτρολόγηση διάφορες τιμές για τους δείκτες των μεταβολέων α , β , γ και n . Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο μεταβολής της κλίσης της εφαπτομένης στο σημείο A καθώς αυτό κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης; Πώς συνδέεται η μορφή της καμπύλης της μεταβολής με τη μορφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης;

Παρατηρήστε τη μορφή της καμπύλης όταν η τιμή της παραμέτρου n μεταβάλλεται από 1 σε 2, μετά σε 3, μετά σε 4, μετά σε 5 κ.ο.κ. Μπορείτε να συνδέσετε τη μορφή της καμπύλης με τη μορφή της συνάρτησης που έχει τιμή του n κατά 1 λιγότερο; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

Θέμα 2: Η συνάρτηση της κλίσης της εφαπτομένης καμπύλης

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=a*\sin(\beta*x+\gamma)+\delta$. Ακόμα έχει σχεδιαστεί η καμπύλη της κλίσης της εφαπτομένης. Δηλαδή έχει σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που έχουν τετμημένη την τετμημένη του σημείου A και τεταγμένη την κλίση της εφαπτομένης στο σημείο A. Ερευνήστε την συνάρτηση της κλίσης της εφαπτομένης.

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $a=2$, $\beta=1$, $\gamma=0$ και $\delta=0$. Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο μεταβολής της κλίσης της εφαπτομένης στο σημείο A καθώς αυτό μεταβάλλεται; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την καμπύλη της κλίσης;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A και παρακολουθήστε τον τρόπο μεταβολής του σημείου B. Μπορείτε να περιγράψετε και να εξηγήσετε πότε η κλίση της εφαπτομένης στο A αυξάνει και πότε ελαττώνεται; Πότε η κλίση της εφαπτομένης είναι θετική και πότε αρνητική; Πότε η κλίση είναι 0; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

2. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $a=-2$, $\beta=1$, $\gamma=0$ και $\delta=0$. Τι αλλάζει στον τρόπο μεταβολής της κλίσης της εφαπτομένης στο σημείο A καθώς αυτό μεταβάλλεται σε σχέση με την προηγούμενη διερεύνηση; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την καμπύλη της κλίσης;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A και παρακολουθήστε τον τρόπο μεταβολής του σημείου B. Μπορείτε να περιγράψετε και να εξηγήσετε πώς μεταβάλλεται η κλίση της εφαπτομένης στο A; Σε τι διαφέρει από τον τρόπο μεταβολής στην διερεύνηση 1; Τι μεταβάλλεται στην καμπύλη της κλίσης αν αλλάξετε τις τιμές των β ή γ ; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=2$, $\beta=1$, $\gamma=0$ και $\delta=0$. Μπορείτε να επανακαθορίσετε την συνάρτηση $\varphi(x) = \kappa \cdot (\lambda \cdot x + \mu) + \nu$ ώστε η γραφική της παράσταση να συμπίπτει με την καμπύλη της κλίσης της εφαπτομένης της $f(x)$ στο σημείο A; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την καμπύλη της κλίσης;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Επιλέξτε, η καμπύλη που θα πληκτρολογήσετε να περιέχει τους συντελεστές κ , λ , μ και ν της συνάρτησης $\varphi(x) = \kappa \cdot (\lambda \cdot x + \mu) + \nu$. Ακολουθώντας μεταβάλετε τους δείκτες των συντελεστών ώστε η καμπύλη της $\varphi(x)$ να ταυτίζεται με την καμπύλη της κλίσης της εφαπτομένης. Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5)

4. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=-2$, $\beta=1$, $\gamma=0$ και $\delta=0$. Μπορείτε να επανακαθορίσετε την συνάρτηση $\varphi(x) = \kappa \cdot (\lambda \cdot x + \mu) + \nu$ ώστε η γραφική της παράσταση να συμπίπτει με την καμπύλη της κλίσης της εφαπτομένης της $f(x)$ στο σημείο A; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την καμπύλη της κλίσης;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Επιλέξτε, η καμπύλη που θα πληκτρολογήσετε να περιέχει τους συντελεστές κ , λ , μ και ν της συνάρτησης $\varphi(x) = \kappa \cdot (\lambda \cdot x + \mu) + \nu$. Ακολουθώντας μεταβάλετε τους δείκτες των συντελεστών ώστε η καμπύλη της $\varphi(x)$ να ταυτίζεται με την καμπύλη της κλίσης της εφαπτομένης. Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

Θέμα 3: Η συνάρτηση της παραγώγου

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=a*\sqrt{\text{abs}(x^n-1)}+\beta*x+\gamma$ για ορισμένες τιμές των παραμέτρων της και του εκθέτη της δύναμης. Ακόμα έχει σχεδιαστεί η καμπύλη της παραγώγου (δηλαδή της κλίσης της εφαπτομένης). Έχει σχεδιαστεί δηλαδή η γραφική παράσταση των σημείων που έχουν τετμημένη την τετμημένη του σημείου A και τεταγμένη την κλίση της εφαπτομένης στο σημείο A. Ερευνήστε τον τρόπο μεταβολής της παραγώγου καθώς μεταβάλλονται οι τιμές των συντελεστών της συνάρτησης.

Διερευνήσεις:

1. Η συνάρτηση έχει $a=2$, $\beta=0$, $\gamma=-1$ και $n=3$. Μπορείτε να περιγράψετε την παράγωγο της συνάρτησης στα διάφορα σημεία της (δηλαδή την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στα διάφορα σημεία της); Πότε η παράγωγος είναι θετική και πότε αρνητική; Τι συμβαίνει στην κορυφή της καμπύλης; Γιατί η γραφική παράσταση της παραγώγου έχει δυο κλάδους; Μπορείτε να εξηγήσετε και αλγεβρικά τις απαντήσεις σας αφού πρώτα προσδιορίσετε την εξίσωση της παραγώγου; Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί δεν υπάρχει εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο A(1,0);

Μετακινήστε το σημείο A πάνω στη καμπύλη της συνάρτησης και παρακολουθήστε πώς μεταβάλλεται το αντίστοιχο σημείο στην καμπύλη της παραγώγου. Στη συνέχεια μετακινήστε το σημείο A στη θέση (1,0 και παρατηρήστε πώς μεταβάλλεται η παράγωγος γύρω από αυτό. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί δεν υπάρχει εφαπτομένη της συνάρτησης στο σημείο αυτό; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

2. Επιλέξτε "«Επαναπροσδιορισμός»" και πληκτρολογήστε την νέα συνάρτηση με τιμές των παραμέτρων $\alpha=2$, $\beta=2$, $\gamma=-1$ και του εκθέτη $\nu=3$.

Τι συμβαίνει στον τρόπο μεταβολής των τιμών της συνάρτησης στα διαστήματα που η παράγωγος είναι θετική ή αρνητική; Πώς συνδέεται η μονοτονία της συνάρτησης με το πρόσημο της παραγώγου; Τι συμβαίνει στο σημείο που η παράγωγος είναι 0; Μπορείτε να εξηγήσετε και αλγεβρικά τις απαντήσεις σας αφού πρώτα προσδιορίσετε την εξίσωση της παραγώγου;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

3. Επιλέξτε "«Επαναπροσδιορισμός»" και πληκτρολογήστε την νέα συνάρτηση με τιμές των παραμέτρων $\alpha=2$, $\beta=2$, $\gamma=-1$ και $\nu=4$. Τι συμβαίνει στον τρόπο μεταβολής των τιμών της συνάρτησης στα διαστήματα που η παράγωγος είναι θετική ή αρνητική; Πώς συνδέεται η μονοτονία της συνάρτησης με το πρόσημο της παραγώγου; Τι συμβαίνει στις κορυφές της καμπύλης; Υπάρχουν σημεία στα οποία η παράγωγος είναι 0; Μπορείτε να εξηγήσετε και αλγεβρικά τις απαντήσεις σας αφού πρώτα προσδιορίσετε την εξίσωση της παραγώγου.

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε το σημείο A από αριστερά προς τα δεξιά. Δηλαδή μετακινήστε το έτσι ώστε οι τιμές της μεταβλητής x να αυξάνουν. Παρατηρήστε ταυτόχρονα πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης καθώς και το σημείο B. Στη συνέχεια μετακινήστε το σημείο A στη θέση (0,1). Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί δεν εμφανίζεται να υπάρχει εφαπτομένη της συνάρτησης στο σημείο αυτό; Και τι ακριβώς συμβαίνει με την εφαπτομένη της συνάρτησης όταν το A είναι πολύ κοντά στο σημείο αυτό; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Μετακινήστε το σημείο A από αριστερά προς τα δεξιά. Δηλαδή μετακινήστε το έτσι ώστε οι τιμές της μεταβλητής x να αυξάνουν. Παρατηρήστε ταυτόχρονα πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης καθώς και το σημείο B. Στη συνέχεια μετακινήστε το σημείο A στις κορυφές της συνάρτησης, δηλαδή στα σημεία (1,1) και (-1,-3). Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί δεν υπάρχει εφαπτομένη της συνάρτησης στα σημεία αυτά; Και τι ακριβώς συμβαίνει με την εφαπτομένη της συνάρτησης όταν το A είναι πολύ κοντά στο σημείο αυτό; Μπορείτε να επιλέξετε την εντολή «Μεγέθυνση-Σμίκρυνση» και να κάνετε σμίκρυνση της συνάρτησης. Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5)

4. Επιλέξτε "«Επαναπροσδιορισμός»" και πληκτρολογήστε την νέα συνάρτηση με τιμές των παραμέτρων $\alpha=2$, $\beta=0$, $\gamma=-1$ και $\nu=-1$ και επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις. Πώς εξηγείται το γεγονός ότι η παράγωγος της συνάρτησης έχει τρεις κλάδους;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε το σημείο A από αριστερά προς τα δεξιά και παρατηρήστε ταυτόχρονα πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης καθώς και το σημείο B. Τι συμβαίνει με την παράγωγο της συνάρτησης στα σημεία με τετμημένες 0 και 1. Υπάρχει σημείο της συνάρτησης στο οποίο η παράγωγος μα είναι 0; Και τι ισχύει για την εφαπτομένη στο σημείο αυτό;

Για να επανέλθετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

Θέμα 4: Η παράγωγος συνάρτησης διπλού τύπου

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^v + x + \beta^2, & -100 < x \leq x_A \\ \kappa x^\mu + \beta x + \lambda, & x_A < x < 100 \end{cases}$$

Ακόμα έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της παραγώγου αυτής. Ερευνήστε τον τρόπο μεταβολής της παραγώγου καθώς μεταβάλλονται οι τιμές των συντελεστών της συνάρτησης.

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=1$, $v=2$, $\kappa=1$, $\lambda=1$ και $\mu=3$. Μπορείτε να περιγράψετε την παράγωγο της συνάρτησης στα διάφορα σημεία της; Πότε η παράγωγος είναι θετική και πότε αρνητική; Γιατί η γραφική παράσταση της παραγώγου έχει δυο κλάδους; Μπορείτε να επιλέξετε τη θέση του σημείου A καθώς και την τιμή του β ώστε η συνάρτηση να έχει παράγωγο στο σημείο με τετμημένη x_A ; Μπορείτε να εξηγήσετε και αλγεβρικά τις απαντήσεις σας αφού πρώτα προσδιορίσετε την εξίσωση της παραγώγου;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

2. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=1$, $v=3$, $\kappa=1$, $\lambda=0$ και $\mu=3$. Μπορείτε να περιγράψετε την παράγωγο της συνάρτησης στα διάφορα σημεία της; Πότε η παράγωγος είναι θετική και πότε αρνητική; Γιατί η γραφική παράσταση της παραγώγου έχει δυο κλάδους; Μπορείτε να επιλέξετε τη θέση του σημείου A καθώς και την τιμή του β ώστε η συνάρτηση να έχει παράγωγο στο σημείο με τετμημένη x_A ; Μπορείτε να εξηγήσετε και αλγεβρικά τις απαντήσεις σας αφού πρώτα προσδιορίσετε την εξίσωση της παραγώγου;

Μετακινήστε το σημείο A σε μια κατάλληλη θέση και επιλέξτε την τιμή του β για την οποία η συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο με τετμημένη x_A . Μετακινήστε το σημείο B και παρακολουθήστε πώς μεταβάλλεται η εφαπτομένη της καμπύλης στα σημεία γύρω από το A. Διορθώστε τις επιλογές σας για το A και το β μέχρι να υπάρξει εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη x_A . Μπορείτε να επιλέξετε την εντολή «Μεγέθυνση-Σμίκρυνση» και να "δείτε" πιο κοντά στο σημείο x_A . Μπορείτε να εξηγήσετε τις απαντήσεις σας; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Μετακινήστε το σημείο A σε μια κατάλληλη θέση και επιλέξτε την τιμή του β για την οποία η συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο με τετμημένη x_A . Μετακινήστε το σημείο B και παρακολουθήστε πώς μεταβάλλεται η εφαπτομένη της καμπύλης στα σημεία γύρω από το A. Υπάρχει θέση για το A και τιμή για το β ώστε να υπάρχει η παράγωγος στο σημείο με τετμημένη x_A ; Μπορείτε να επιλέξετε την εντολή «Μεγέθυνση-Σμίκρυνση» και να "δείτε" πιο κοντά στο σημείο x_A . Μπορείτε να εξηγήσετε τις απαντήσεις σας; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

3. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=1$, $\nu=0.5$, $\kappa=1$, $\lambda=1.3$ και $\mu=1$. Μπορείτε να περιγράψετε την παράγωγο της συνάρτησης στα διάφορα σημεία της; Πότε η παράγωγος είναι θετική και πότε αρνητική; Γιατί η γραφική παράσταση της παραγώγου έχει δυο κλάδους; Μπορείτε να επιλέξετε την θέση του σημείου A καθώς και την τιμή του β ώστε η συνάρτηση να έχει παράγωγο στο σημείο με τετμημένη x_A ; Μπορείτε να εξηγήσετε και αλγεβρικά τις απαντήσεις σας αφού πρώτα προσδιορίσετε την εξίσωση της παραγώγου;

Μετακινήστε το σημείο A σε μια κατάλληλη θέση και επιλέξτε την τιμή του β για την οποία η συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο με τετμημένη x_A . Μετακινήστε το σημείο B και παρακολουθήστε πώς μεταβάλλεται η εφαπτομένη της καμπύλης στα σημεία γύρω από το A. Υπάρχει θέση για το A και τιμή για το β ώστε να υπάρχει η παράγωγος στο σημείο με τετμημένη x_A ; Μπορείτε να επιλέξετε την εντολή «Μεγέθυνση-Σμίκρυνση» και να "δείτε" πιο κοντά στο σημείο x_A . Μπορείτε να εξηγήσετε τις απαντήσεις σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

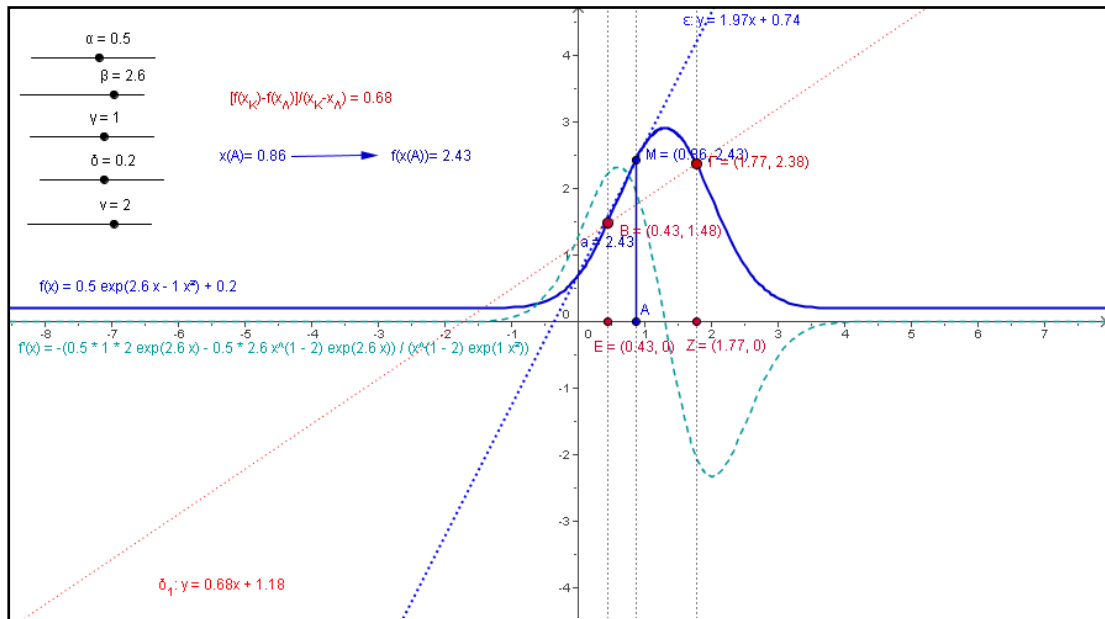
4. Επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις όταν οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=1$, $\nu=0.5$, $\kappa=1$, $\lambda=0$ και $\mu=2$.

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Προσπαθήστε να βρείτε μια θέση για το σημείο A και μια κατάλληλη τιμή για τον συντελεστή β για την οποία η συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο με τετμημένη x_A . Υπάρχει θέση για το A και τιμή για το β ώστε να υπάρχει η παράγωγος στο σημείο με τετμημένη x_A ; Μπορείτε να επιλέξετε την εντολή «Μεγέθυνση-Σμίκρυνση» και να "δείτε" πιο κοντά στο σημείο x_A . Μπορείτε να εξηγήσετε τις απαντήσεις σας; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

4.3 ΣΕΝΑΡΙΟ 11 : Θεωρήματα του διαφορικού λογισμού



ΘΕΜΑ 1: Θεώρημα Μέσης Τιμής

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha \cdot x^\nu + \beta \cdot x + \gamma$ και η εφαπτομένη της στο σημείο Μ. Ακόμα έχει σχεδιαστεί η ευθεία που διέρχεται από δυο τυχαία σημεία Α και Β της καμπύλης της συνάρτησης. Ερευνήστε την σχέση της εφαπτομένης στο σημείο Μ με την ευθεία ΑΒ.

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε δυο τυχαίες θέσεις των σημείων Α και Β. Μπορείτε να βρείτε μια θέση του σημείου Μ ώστε η εφαπτομένη της καμπύλης σ' αυτό να είναι παράλληλη στην ευθεία ΑΒ; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την διαδικασία εύρεσης;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

2. Επιλέξτε την συνάρτηση και με δεξί κλικ "«Επαναπροσδιορισμός»". Πληκτρολογήστε τον τύπο $f(x)=0.3 \cdot x^3 - 1 \cdot x - 0.5$. Επιλέξτε στη συνέχεια δυο τυχαίες θέσεις των σημείων Α και Β. Πόσες θέσεις του σημείου Μ μπορείτε να βρείτε ώστε η εφαπτομένη της καμπύλης σ' αυτά να είναι παράλληλη στην ευθεία ΑΒ; Μπορείτε να βρείτε δυο θέσεις των Α και Β ώστε να ισχύει το θεώρημα Rolle. Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την διαδικασία εύρεσης;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Επιλέξτε δυο θέσεις για τα Α και Β και μετακινήστε το σημείο Μ μέχρι η εφαπτομένη της καμπύλης σ' αυτό να γίνει παράλληλη προς την ΑΒ. Χρησιμοποιήστε το σχετικό εργαλείο του λογισμικού "Παράλληλη γραμμή" για να ελέγξετε διαισθητικά αν η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ΑΒ. Ακόμα μπορείτε να εξετάσετε τις κλίσεις των δυο ευθειών. Μπορείτε να περιγράψετε και να εξηγήσετε πότε η κλίση της εφαπτομένης στο Μ είναι ίση με την κλίση της ευθείας ΑΒ; Σε ποια θέση των σημείων Α και Β η εφαπτομένη είναι παράλληλη στη ΑΒ και ταυτόχρονα στην ευθεία χχ'; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Επιλέξτε δυο θέσεις για τα Α και Β και μετακινήστε το σημείο Μ μέχρι η εφαπτομένη της καμπύλης σ' αυτό να γίνει παράλληλη προς την ΑΒ. Ελέγξτε την παραλληλία εμφανίζοντας τις κλίσεις των δυο ευθειών. Αναζητήστε περιπτώσεις που υπάρχουν περισσότερες από μια θέσεις του Μ. Μπορείτε να εξηγήσετε την ύπαρξη περισσότερων από ένα σημείων στα οποία η κλίση της εφαπτομένης στο Μ είναι ίση με την κλίση της ευθείας ΑΒ; Σε ποια θέση των σημείων Α και Β η εφαπτομένη είναι παράλληλη στη ΑΒ και ταυτόχρονα στην ευθεία χχ'; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Επιλέξτε την συνάρτηση και με δεξί κλικ "«Επαναπροσδιορισμός»". Πληκτρολογήστε τον τύπο $f(x)=0.3*x^{(-1)}+1*x-0.5$. Μπορείτε να βρείτε θέσεις των σημείων A και B για τις οποίες ισχύει το θεώρημα της μέσης τιμής; Υπάρχουν θέσεις των A και B για τις οποίες δεν ισχύει το θεώρημα της μέσης τιμής ή το θεώρημα Rolle; Μπορείτε να εξηγήσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Επιλέξτε θέσεις για τα A και B ώστε όταν μετακινείτε το σημείο M η εφαπτομένη της καμπύλης σ' αυτό να είναι παράλληλη προς την AB. Εξετάστε την περίπτωση που το ένα σημείο να είναι στον ένα κλάδο και το άλλο στον άλλο. Σε ποια θέση των σημείων A και B η εφαπτομένη είναι παράλληλη στη AB και ταυτόχρονα στην ευθεία $\chi\chi'$; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

4. Επιλέξτε την συνάρτηση και με δεξί κλικ "«Επαναπροσδιορισμός»". Πληκτρολογήστε τον τύπο $f(x)=0.2*x^{(-2)}$. Επαναλάβετε τις προηγούμενες δραστηριότητες. Υπάρχουν θέσεις των A και B για τις οποίες δεν ισχύει το θεώρημα της μέσης τιμής; Μπορείτε να εξηγήσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Επιλέξτε θέσεις για τα A και B ώστε όταν μετακινείτε το σημείο M η εφαπτομένη της καμπύλης σ' αυτό να είναι παράλληλη προς την AB. Εξετάστε την περίπτωση που το ένα σημείο να είναι στον ένα κλάδο και το άλλο στον άλλο. Σε ποια θέση των σημείων A και B η εφαπτομένη είναι παράλληλη στη AB και ταυτόχρονα στην ευθεία $\chi\chi'$; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5)

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

ΘΕΜΑ 2: Μονοτονία - Ακρότατα

Στην παρακάτω επιφάνεια εργασίας έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=a*\exp(\beta*x+\gamma*x^\nu)+\delta$ ($f(x)=ae^{\beta x+\gamma x^\nu}+\delta$). Ακόμα έχουν σχεδιαστεί η παράγωγος αυτής, η εφαπτομένη σε ένα σημείο της A καθώς και ευθεία ΒΓ που διέρχεται από δυο σημεία της. Ερευνήστε για την μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων της και του εκθέτη ν .

Διερευνήσεις:

- Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο μεταβολής των τιμών της συνάρτησης καθώς κινείτε το σημείο A και να τον συνδυάσετε με το πρόσημο των τιμών της παραγώγου; Μπορείτε να βρείτε σε ποιο σημείο η συνάρτηση έχει τοπικό ακρότατο; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

- Επιλέξτε τη συνάρτηση και με δεξιά κλικ "«Επαναπροσδιορισμός»". Πληκτρολογήστε τον τύπο $0.5*\exp(2*\chi+\chi^3)+1$. Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο μεταβολής των τιμών της συνάρτησης και να τον συνδυάσετε με το πρόσημο των τιμών της παραγώγου; Μπορείτε να βρείτε σε ποιο σημείο η συνάρτηση έχει τοπικό ακρότατο; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας; Τι θα αλλάξει στην μονοτονία της συνάρτησης αν μεταβάλετε τις τιμές της παραμέτρου δ ;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε το σημείο A και παρακολουθήστε τον τρόπο μεταβολής του σημείου B.
 Μπορείτε να περιγράψετε και να εξηγήστε πότε η κλίση της εφαπτομένης στο A αυξάνει και πότε ελαττώνεται; Πότε η κλίση της εφαπτομένης είναι θετική και πότε αρνητική; Πότε η κλίση είναι 0; Πώς συνδέονται τα παραπάνω με το πρόσημο της παραγώγου; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Μετακινήστε το σημείο A και παρακολουθήστε τον τρόπο μεταβολής του σημείου B.
 Μπορείτε να περιγράψετε και να εξηγήστε την μονοτονία της συνάρτησης; Σε ποια διαστήματα είναι αύξουσα και σε ποια φθίνουσα; Πόσα ακρότατα έχει; Πώς συνδέονται τα παραπάνω με το πρόσημο της παραγώγου; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Επιλέξτε τη συνάρτηση και με δεξί κλικ "«Επαναπροσδιορισμός»".

Πληκτρολογήστε τον τύπο $0.5 \cdot \exp(2 \cdot x + x^2) + 1$. Μπορείτε να περιγράψετε την μονοτονία των τιμών της συνάρτησης και να τον συνδυάσετε με το πρόσημο των τιμών της παραγώγου; Σε τι διαφέρει η μονοτονία της συνάρτησης από την μονοτονία της συνάρτησης της πρώτης διερεύνησης που είχε $a=0,5$; Μπορείτε να εξηγήσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε το σημείο A και παρακολουθήστε τον τρόπο μεταβολής του σημείου A'. Εξετάστε το πρόσημο της παραγώγου και στις δυο περιπτώσεις που $a=0.5$ και $a=-0.5$. Πώς εξηγούνται οι διαφορές στο πρόσημο της παραγώγου; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

4. Επιλέξτε τη συνάρτηση και με δεξί κλικ "«Επαναπροσδιορισμός»".

Πληκτρολογήστε τον τύπο $0.5 \cdot \exp(2 \cdot x + x^2) + 1$. Μπορείτε να βρείτε δυο θέσεις για τα σημεία B και Γ ώστε να ισχύει το θεώρημα Rolle; Ισχύει το θεώρημα της μέσης τιμής σε κάθε διάστημα που ορίζουν τα B και Γ; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε τα σημεία B και Γ σε δυο θέσεις ώστε όταν το σημείο A κινείται ανάμεσα σε αυτά να υπάρχει θέση στην οποία η εφαπτομένη της καμπύλης στο A να είναι παράλληλη προς τον $\chi\chi'$. Εξετάστε σε διάφορες θέσεις των B και Γ αν ισχύει το θεώρημα της μέσης τιμής; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

ΘΕΜΑ 3: Κυρτότητα και σημεία καμπής της συνάρτησης

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha \cdot x^2+\beta \cdot x+\gamma$. Ακόμα έχουν σχεδιαστεί η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος αυτής. Ερευνήστε την κυρτότητα της συνάρτησης και συνδέστε την με τον τρόπο μεταβολής των δυο παραγώγων.

Διερευνήσεις:

- Μπορείτε να περιγράψετε την κυρτότητα της συνάρτησης και να την συνδυάσετε με τη θέση της εφαπτομένης της στο A καθώς μεταβάλλετε τη θέση του; Μπορείτε να περιγράψετε την μονοτονία της πρώτης παραγώγου και το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου σε σχέση με τη σχετική θέση της εφαπτομένης της συνάρτησης στο A; Επιλέξτε την συνάρτησης και με δεξί κλικ "«Επαναπροσδιορισμός»". Στη συνέχεια πληκτρολογήστε νέες τιμές των συντελεστών της συνάρτησης ώστε η δεύτερη παράγωγος έχει αρνητικές τιμές. Τι αλλάζει στη μορφή της συνάρτησης και της πρώτης παραγώγου; Μπορείτε να διατυπώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

.....

.....

.....

.....

Μετακινήστε το σημείο A πάνω στη καμπύλη της συνάρτησης και παρακολουθήστε πώς μεταβάλλεται το αντίστοιχο σημείο στην καμπύλη της πρώτης παραγώγου. Μπορείτε να παρακολουθείτε τις μεταβολές των τιμών της συνάρτησης και των δυο παραγώγων αν επιλέξετε τα τέσσερα κουμπιά της επιφάνειας εργασίας. Πώς εξηγείται το γεγονός ότι η πρώτη παράγωγος είναι αύξουσα; Μεταβάλετε τους συντελεστές της συνάρτησης ώστε η πρώτη παράγωγος να είναι φθίνουσα (δώστε αρνητική τιμή στον συντελεστή του x^2). Τι αλλάζει στη μορφή της συνάρτησης; Μπορείτε να εξηγήσετε τις μεταβολές αυτές; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

2. Επιλέξτε την συνάρτησης και με δεξί κλικ "«Επαναπροσδιορισμός»". Στη συνέχεια πληκτρολογήστε την συνάρτηση $0.2*x^3-2*x-1$. Μπορείτε να περιγράψετε την κυρτότητα της συνάρτησης και να την συνδυάσετε με την σχετική θέση της εφαπτομένης στο A, την μονοτονία της πρώτης παραγώγου και το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου; Υπάρχουν θέσεις των A και B όπου οι εφαπτόμενες σ' αυτά είναι παράλληλες; Τι συμβαίνει με τα σημεία στα οποία η δεύτερη παράγωγος είναι 0; Πώς μεταβάλλεται η κυρτότητα της συνάρτησης όταν μεταβάλλετε τις τιμές των συντελεστών της συνάρτησης; Πώς συνδέονται οι αλλαγές στην κυρτότητα με τις αλλαγές στο πρόσημο της δεύτερης παράγωγου. Τι αλλάζει στη μορφή της συνάρτησης και της πρώτης παραγώγου κατά τις αλλαγές αυτές; Μπορείτε να διατυπώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας;

Μετακινήστε το σημείο A πάνω στη καμπύλη της συνάρτησης και παρακολουθήστε πώς μεταβάλλεται το αντίστοιχο σημείο B στην καμπύλη της πρώτης παραγώγου. Μπορείτε να παρακολουθείτε τις μεταβολές των τιμών της συνάρτησης και των δυο παραγώγων αν επιλέξετε τα τέσσερα κουμπιά της επιφάνειας εργασίας. Μεταβάλλετε τους συντελεστές της συνάρτησης ώστε η πρώτη παράγωγος να είναι φθίνουσα. Τι αλλάζει στη μορφή της συνάρτησης; Μπορείτε να εξηγήσετε τις μεταβολές αυτές; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

3. Επιλέξτε την εντολή "«Επαναπροσδιορισμός»" και πληκτρολογήστε τον τύπο $f(x)=-0.1*x^4-0.2*x+1$. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται η κυρτότητα της καμπύλης και να βρείτε αν υπάρχουν σημεία στα οποία αυτή αλλάζει; Υπάρχουν σημεία στα οποία η δεύτερη παράγωγος είναι 0; Μπορείτε να εξηγήσετε και αλγεβρικά τις απαντήσεις σας αφού πρώτα προσδιορίσετε την εξίσωση της παραγώγου.

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Παρατηρήστε τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω και τότε προς τα κάτω. Παρατηρήστε τη μονοτονία της πρώτης παραγώγου στα διαστήματα που η δεύτερη παράγωγος είναι θετική κα σ' αυτά που είναι αρνητική. Μπορείτε να παρακολουθείτε τις μεταβολές των τιμών της συνάρτησης και των δυο παραγώγων αν επιλέξετε τα τέσσερα κουμπιά της επιφάνειας εργασίας. Σημείο καμπής είναι το σημείο στο οποίο αλλάζει η κυρτότητα. Τι συμβαίνει με τη παράγωγο στο σημείο αυτό; Μεταβάλλετε τους συντελεστές της συνάρτησης ώστε η πρώτη παράγωγος να είναι φθίνουσα. Τι αλλάζει στην κυρτότητα και στα σημεία καμπής της συνάρτησης; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5)

4. Επιλέξτε την εντολή "«Επαναπροσδιορισμός»" και πληκτρολογήστε τον τύπο $f(x)=0.3*x^4+x^3-2*x$. Κάντε δεξί κλικ πάνω στο γράφημα της συνάρτησης $f(x)$ και απενεργοποιήστε την εντολή "Δείξτε το αντικείμενο". Μπορείτε να περιγράψετε σε ποια διαστήματα στρέφει τα κοίλα πάνω ή κάτω και ποια σημεία είναι σημεία καμπής; Μπορείτε να περιγράψετε τι αλλάζει ως προς τα κοίλα όταν μεταβάλετε την τιμή του a σε -0.3 ;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε το σημείο A από αριστερά προς τα δεξιά και παρατηρήστε ταυτόχρονα πώς μεταβάλλονται οι τιμές της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου καθώς και οι κλίσεις των εφαπτόμενων στα σημεία A και B. Μπορείτε να παρακολουθείτε τις μεταβολές των τιμών της συνάρτησης και των δυο παραγώγων αν επιλέξετε τα τέσσερα κουμπιά της επιφάνειας εργασίας. Υπάρχει σημείο της συνάρτησης στο οποίο να αλλάζει η κυρτότητα; Και τι ισχύει για την εφαπτομένη της συνάρτησης κα της πρώτης παραγώγου στο σημείο αυτό; Για να επανέλθετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

ΘΕΜΑ 4: Ασύμπτωτες συνάρτησης

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = \frac{x^2 - \alpha}{x - \beta}$$

Ακόμα έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της ευθείας d: $y=kx+\lambda$. Ερευνήστε, για ποιές τιμές των κ και λ η ευθεία είναι ασύμπτωτη της συνάρτησης.

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων της συνάρτησης να δείχνουν $\alpha=2$ και $\beta=2$. Μπορείτε να ορίσετε τις τιμές των μεταβολέων κ και λ ώστε η ευθεία να είναι ασύμπτωτη της συνάρτησης; Μπορείτε να εξηγήσετε και αλγεβρικά τις απαντήσεις σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Επιλέξτε τις τιμές των δεικτών των κ και λ και στη συνέχεια μετακινήστε το σημείο A προκειμένου να επιβεβαιώσετε αν η ευθεία είναι ασύμπτωτη της συνάρτησης. Για να είναι ασύμπτωτη της συνάρτησης θα πρέπει το μήκος AB διαρκώς να μειώνεται καθώς το σημείο A κινείται προς μεγαλύτερες τιμές. Επιλέξτε κ=1 και λ=2 και στη συνέχεια μεταβάλλετε τη θέση του A προς μεγαλύτερες και προς μικρότερες τιμές. Μπορείτε να επιλέξετε την εντολή «Μεγέθυνση-Σμίκρυνση» και να "δείτε" την απόσταση AB σε μεγέθυνση ή σμίκρυνση. Για να είστε σίγουροι ότι αυτή είναι η ασύμπτωτη πρέπει να το εξηγήσετε και αλγεβρικά υπολογίζοντας τα σχετικά όρια; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

2. Επιλέξτε διάφορες τιμές για τους δείκτες των μεταβολέων της συνάρτησης. Μπορείτε να ορίσετε σε κάθε περίπτωση τις τιμές των μεταβολέων κ και λ ώστε η ευθεία να είναι ασύμπτωτη της συνάρτησης; Υπάρχει κάποιος κανόνας που αφορά την εξίσωση της ασύμπτωτης σε σχέση με τις τιμές των συντελεστών που ορίζουν την συνάρτηση; Μπορείτε να εξηγήσετε και αλγεβρικά τις απαντήσεις σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Επαναλάβετε την προηγούμενη διερεύνηση για κάθε επιλογή των τιμών των συντελεστών. Παρατηρήστε σε κάθε περίπτωση τους συντελεστές της συνάρτησης και αυτούς της ασύμπτωτης. Υπάρχει κάποια σχέση; Μπορείτε να επιλέξετε την εντολή «Μεγέθυνση-Σμίκρυνση» και να "δείτε" την απόσταση AB σε μεγέθυνση ή σμίκρυνση. Εξηγήστε και αλγεβρικά τις απαντήσεις σας; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Με την εντολή «Επαναπροσδιορισμός» επαναδιατυπώστε τον τύπο της συνάρτησης στον $g(x) = (x^3 - \alpha)/(x - \beta)$. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=1$ και $\beta=0$. Μπορείτε να προσδιορίσετε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης; Μπορείτε να εξηγήσετε και αλγεβρικά τις απαντήσεις σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Για τον προσδιορισμό της πλάγιας (ή πλάγιων) ασύμπτωτης επαναλάβετε τις εργασίες που κάνατε στις προηγούμενες διερευνήσεις. Για τον προσδιορισμό της κατακόρυφης ασύμπτωτης μετακινήστε το σημείο A στην κατάλληλη θέση και στη συνέχεια να μετακινήσετε τον δείκτη του μεταβολέα h. Μπορείτε να επιλέξετε την εντολή «Μεγέθυνση-Σμίκρυνση» και να "δείτε" την απόσταση AB σε μεγέθυνση ή σμίκρυνση. Εξηγήστε και αλγεβρικά τις απαντήσεις σας; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

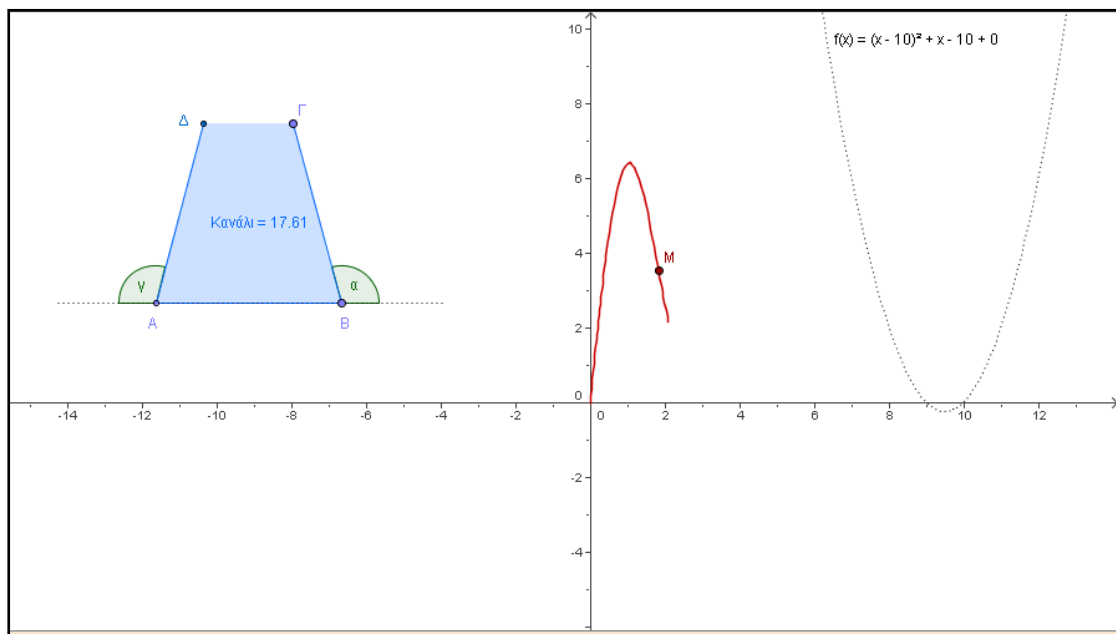
4. Με την εντολή «Επαναπροσδιορισμός» επαναδιατυπώστε τον τύπο της συνάρτησης στον $g(x) = \sqrt{x^2 + \alpha x + \beta}$. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=1$ και $\beta=0$. Μπορείτε να προσδιορίσετε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης; Έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη η συνάρτηση. Μπορείτε να εξηγήσετε και αλγεβρικά τις απαντήσεις σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Προσπαθήστε να βρείτε μια θέση για το σημείο A και μια κατάλληλη τιμή για τον συντελεστή β για την οποία η συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο με τετμημένη x_A . Υπάρχει θέση για το A και τιμή για το β ώστε να υπάρχει η παράγωγος στο σημείο με τετμημένη x_A ; Μπορείτε να επιλέξετε την εντολή «Μεγέθυνση-Σμίκρυνση» και να "δείτε" πιο κοντά στο σημείο x_A . Μπορείτε να εξηγήσετε τις απαντήσεις σας; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

4.4 ΣΕΝΑΡΙΟ 12 : Εφαρμογές του διαφορικού λογισμού



ΘΕΜΑ 1: Το κανάλι παροχής νερού

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η κάθετη τομή ενός καναλιού παροχής νερού. Επίσης έχει σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που έχουν τετμημένη το άνοιγμα της γωνίας α και τεταγμένη το $1/4$ του εμβαδού της τομής του καναλιού. Μπορείτε να κινήσετε το σημείο Γ για να μεταβάλλετε τη γωνία και το σημείο B για να μεταβάλλετε το μήκος των τριών πλευρών του. Ερευνήστε την σχέση μεταξύ της γωνίας και του εμβαδού για τις διάφορες τιμές του μήκους των τριών πλευρών του.

Διερευνήσεις:

1. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται το εμβαδόν του καναλιού καθώς μεταβάλλεται η γωνία α ; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την σχέση αυτής της συμμεταβολής;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

2. Μπορείτε να βρείτε για ποια τιμές της γωνίας το εμβαδόν γίνεται μέγιστο; Μπορείτε να εξηγήσετε και αλγεβρικά τη διαδικασία εύρεσης;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε το σημείο Γ ώστε η γωνία να μεγαλώνει και παρατηρήστε το εμβαδόν του στο σχήμα αλλά και το σημείο M της καμπύλης του γεωμετρικού τόπου. Μπορείτε να περιγράψετε και να εξηγήσετε την μορφή της καμπύλης; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Παρατηρήστε για ποια τιμή της γωνίας το εμβαδόν γίνεται μέγιστο και παρακολουθήστε τη θέση του σημείου. Εξηγήστε τι συμβαίνει όταν το σημείο M πλησιάζει από τα αριστερά την κορυφή της καμπύλης και τι συμβαίνει όταν την ξεπεράσει. Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Στην επιφάνεια εργασίας του μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=(x - 10)^2+(x-10)+0$. Μπορείτε να επαναδιατυπώσετε τον τύπο της συνάρτησης ώστε να ταιριάζει ακριβώς με την καμπύλη του γεωμετρικού τόπου; Μπορείτε να εξηγήσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Επιλέξτε την εντολή «Επαναπροσδιορισμός» και πληκτρολογήστε τον νέο τύπο. Μπορείτε να μεταφέρετε την καμπύλη και με το ποντίκι σας. Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

4. Επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις και για άλλες τιμές των πλευρών της τομής. Τι μεταβάλλεται καθώς κινείτε το σημείο B; Μπορείτε να ελέγξετε και να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τον τύπο που βρήκατε;

Σχεδιάστε στο χαρτί σας το σχήμα της τομής και χρησιμοποιήστε τις γεωμετρικές σας γνώσεις για να διατυπώσετε αλγεβρικά τη ζητούμενη σχέση. Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

ΘΕΜΑ 2: Απόσταση σημείου από καμπύλη συνάρτησης

Στην παρακάτω επιφάνεια εργασίας έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$. Ακόμα έχουν σχεδιαστεί ένα σημείο M στην καμπύλη της συνάρτησης και ένα σημείο A εκτός αυτής. Ακόμα έχουν σχεδιαστεί οι γεωμετρικοί τόποι των σημείων που ορίζονται από την τετμημένη του M και την απόσταση d των A και M καθώς και από την τεταγμένη του M και την απόσταση d των A και M . Ερευνήστε τον τρόπο μεταβολής της απόστασης d όταν το M κινείται στην καμπύλη της συνάρτησης..

Διερευνήσεις:

- Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται η απόσταση d καθώς κινείτε το σημείο M πάνω στην γραφική παράσταση της συνάρτησης; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την σχέση της συμμεταβολής;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

- Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται η απόσταση d συναρτήσει της τετμημένης του σημείου M ; Σε ποιά θέση η απόσταση d είναι ελάχιστη; Μπορείτε να εκφράσετε και αλγεβρικά την σχέση των δυο μεταβλητών και να επαναδιατυπώσετε τον τύπο της $g(x)$ ώστε να ταυτίζεται με τον γεωμετρικό τόπο του σημείου A ;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε το σημείο M ώστε να απομακρύνεται από το $O(0,0)$ και παρατηρήστε τον τρόπο μεταβολής της απόστασης d .

Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο μεταβολής;

Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Παρατηρήστε την καμπύλη του γεωμετρικού τόπου του σημείου A . Εξηγήστε τι συμβαίνει στην απόσταση d όταν το σημείο A πλησιάζει την κορυφή της καμπύλης και τι συμβαίνει όταν την ξεπεράσει. Επιλέξτε την εντολή «Επαναπροσδιορισμός» και πληκτρολογήστε τον νέο τύπο της $g(x)$. Μπορείτε να μεταφέρετε την καμπύλη κα με το ποντίκι σας. Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται η απόσταση d συναρτήσει της τεταγμένης του σημείου M ; Σε ποιά θέση η απόσταση d είναι ελάχιστη; Μπορείτε να εκφράσετε και αλγεβρικά την σχέση των δυο μεταβλητών και να επαναδιατυπώσετε τον τύπο της $g(x)$ ώστε να ταυτίζεται με τον γεωμετρικό τόπο του σημείου K ;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Παρατηρήστε την καμπύλη του γεωμετρικού τόπου του σημείου K . Εξηγήστε τι συμβαίνει στην απόσταση d όταν το σημείο K πλησιάζει την κορυφή της καμπύλης και τι συμβαίνει όταν την ξεπεράσει. Επιλέξτε την εντολή «Επαναπροσδιορισμός» και πληκτρολογήστε τον νέο τύπο της $g(x)$. Μπορείτε να μεταφέρετε την καμπύλη κα με το ποντίκι σας. Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

4. Επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις και για άλλες θέσεις του σημείου A . Πώς μεταβάλλεται η ελάχιστη απόσταση καθώς μεταβάλλετε τη θέση του σημείου A ; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τον τύπο που βρήκατε;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε το σημείο A και παρατηρήστε τον τρόπο αλλαγής της καμπύλης του σημείου Λ και του σημείου K . Περιγράψτε τις αλλαγές στη μορφή κάθε καμπύλης καθώς και τις αλλαγές στη θέση του M που έχει την ελάχιστη απόσταση. Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

ΘΕΜΑ 3: Ελάχιστη τιμή της διαφοράς δυο συναρτήσεων

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχουν σχεδιαστεί οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $f(x)=\exp(x)$, της συνάρτησης $g(x)=a \cdot x$ και της διαφοράς τους $h(x) = f(x)-g(x)$. Ακόμα έχουν σχεδιαστεί, η εφαπτομένη της $f(x)$ στο σημείο A , η ευθεία που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην $χχ'$ καθώς και το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία τομής της με τις δυο γραφικές παραστάσεις. Ερευνήστε για την σχέση των δυο συναρτήσεων καθώς και για τον τρόπο μεταβολής της απόστασης AB καθώς μεταβάλλετε είτε το σημείο A είτε την τιμή του a .

Διερευνήσεις:

1. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται η απόσταση AB καθώς κινείτε το σημείο A πάνω στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$; Μπορείτε να εκφράσετε αλγεβρικά την σχέση της συμμεταβολής;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε το σημείο A ώστε να απομακρύνεται από το $O(0,0)$ και παρατηρήστε τον τρόπο μεταβολής της απόστασης AB . Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο μεταβολής; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

2. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται η απόσταση AB συναρτήσει της τετμημένης του σημείου A ; Σε ποιά θέση η απόσταση είναι ελάχιστη; Τι σχέση έχει η εφαπτομένη στη θέση με την ελάχιστη τιμή με την συνάρτηση $g(x)$; Μπορείτε να εκφράσετε και αλγεβρικά την απόσταση των δυο σημείων;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Παρατηρήστε την καμπύλη της συνάρτησης $f(x)-g(x)$ και χρησιμοποιήστε την για να εξηγήσετε την μεταβολή της απόστασης. Μπορείτε στον ειδικό χώρο "Εισαγωγή" να πληκτρολογήσετε το σημείο $M=(x(A), b)$ και στη συνέχεια να επιλέξετε αυτό να αφήνει το ίχνος του. Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλεται η απόσταση AB καθώς μεταβάλλετε τον συντελεστή α ; Σε ποιά θέση η απόσταση AB είναι ελάχιστη; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε και αλγεβρικά τις απαντήσεις σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

4. Μπορείτε για τη μεγαλύτερη τιμή του α που βρήκατε στη προηγούμενη διερεύνηση να βρείτε τη θέση που η απόσταση AB είναι ελάχιστη. Ποια είναι η σχέση της συνάρτησης $g(x)$ με την εφαπτομένη της $f(x)$ στο σημείο αυτό; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε και αλγεβρικά τις απαντήσεις σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε τον δείκτη του μεταβολέα α και παρατηρήστε το γράφημα της διαφοράς των δυο συναρτήσεων. Σε ποιά θέση το γράφημα της $f(x)$ είναι εξ' ολοκλήρου πάνω από το γράφημα της $g(x)$; Μπορείτε να εξηγήσετε πώς διαμορφώνεται στη θέση αυτή η καμπύλη της διαφοράς; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Μετακινήστε τον δείκτη α του μεταβολέα προς τις μεγάλες τιμές του μέχρι το γράφημα της διαφοράς των δυο συναρτήσεων να είναι ολόκληρο πάνω από τον x' . Στη μέγιστη τιμή του α Μετακινήστε το σημείο A μέχρι να έχετε την ελάχιστη απόσταση AB. Εξετάστε τη θέση των $g(x)$ και εφαπτομένη της $f(x)$ στη θέση A. Μπορείτε να εξηγήσετε ότι η εφαπτομένη ταυτίζεται με την $g(x)$; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

ΘΕΜΑ 4: Η μέγιστη τιμή συγκέντρωσης ενός φαρμάκου

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x / (1 + (x/\beta)^2)$, $[0, 100]$ η οποία περιγράφει την συγκέντρωση $f(x)$ ενός φαρμάκου στο αίμα ενός ασθενούς μετά από χρόνο x ώρες όταν του χορηγήθηκε την χρονική στιγμή $x=0$.

Ερευνήστε, για τη μέγιστη τιμή συγκέντρωσης στο αίμα του ασθενούς σε σχέση με τις τιμές των παραμέτρων α και β .

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε $\alpha = 4$ και $\beta = 3$. Μπορείτε να περιγράψετε πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης $f(x)$; Πότε έχουμε μέγιστη τιμή συγκέντρωσης; Μπορείτε να υπολογίσετε αλγεβρικά την μέγιστη τιμή της συνάρτησης;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε το σημείο A και παρακολουθήστε πώς μεταβάλλεται η κλίση της εφαπτομένης. Μπορείτε να περιγράψετε τον τρόπο μεταβολής; Σε ποια θέση έχουμε τη μέγιστη τιμή; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

2. Με δεδομένο ότι η τιμή του β είναι 3 πώς πρέπει να ορίσετε την τιμή του α ώστε η μέγιστη συγκέντρωση να επιτυγχάνεται ακριβώς μετά από 3 ώρες και να είναι 9 μονάδες; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε και αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Παρατηρήστε την καμπύλη της συνάρτησης σε κάθε μεταβολή των α και β . Ελέγξτε την θέση του μέγιστου της καμπύλης. Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Πώς πρέπει να ορίστε τις τιμές των συντελεστών α και β ώστε η μέγιστη συγκέντρωση του φαρμάκου να επιτυγχάνεται ακριβώς μετά από 3 ώρες και ταυτόχρονα η τιμή της να είναι 6 μονάδες;
Μπορείτε να επιβεβαιώσετε και αλγεβρικά την απάντησή σας;

Παρατηρήστε την καμπύλη της συνάρτησης σε κάθε μεταβολή των α και β . Ελέγξτε την θέση του μέγιστου της καμπύλης καθώς και την μέγιστη τιμή της.
Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

4. Πώς πρέπει να ορίστε τις τιμές των συντελεστών α και β ώστε η μέγιστη συγκέντρωση του φαρμάκου να επιτυγχάνεται ακριβώς μετά από 6 ώρες και ταυτόχρονα η τιμή της να είναι 15 μονάδες;
Σύμφωνα με τις κλινικές μελέτες η ωφελιμότητα του φαρμάκου εξασφαλίζεται όταν η τιμή της συγκέντρωσής του στο αίμα να είναι τουλάχιστον 12 μονάδες και στο χρονικό αυτό διάστημα δεν χορηγείται άλλο φάρμακο. Μπορείτε να προσδιορίσετε το παράθυρο ωφελιμότητας του φαρμάκου στην περίπτωση που θέλουμε να έχουμε μέγιστη τιμή 12 μονάδες μετά από 5 ώρες;
Μπορείτε να επιβεβαιώσετε και αλγεβρικά τις απαντήσεις σας;

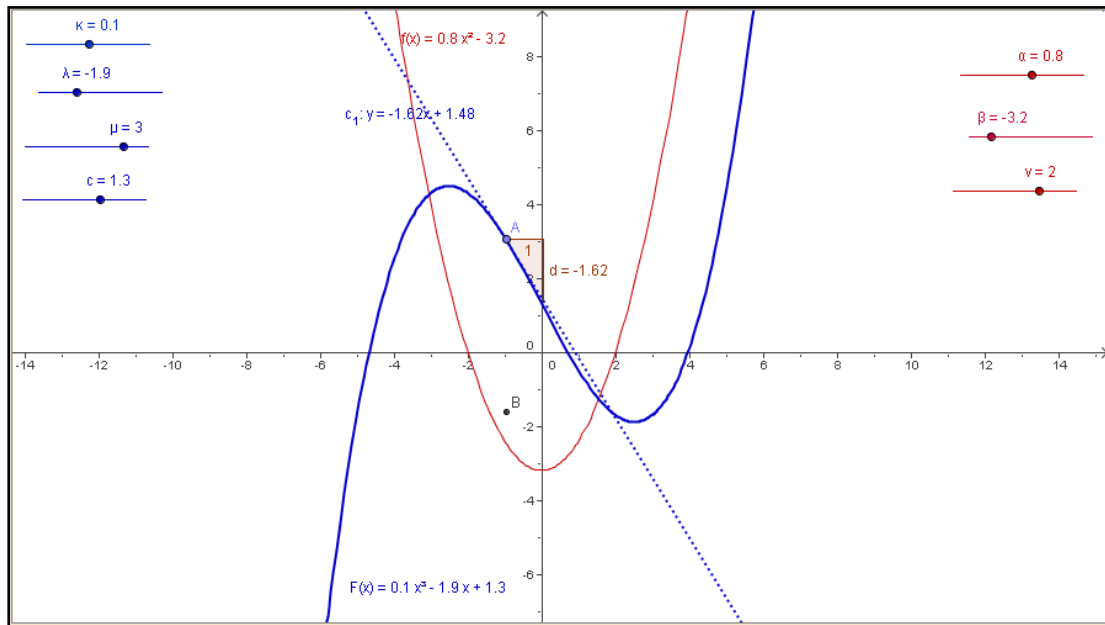
Παρατηρήστε την καμπύλη της συνάρτησης σε κάθε μεταβολή των α και β . Ελέγξτε την θέση του μέγιστου της καμπύλης καθώς και τη μέγιστη τιμή της. Μετακινήστε την ευθεία $h(x)=-10$ σε τέτοια θέση ώστε να βρείτε το παράθυρο ωφελιμότητας.
Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

5 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 - Ολοκλήρωμα

5.1 ΣΕΝΑΡΙΟ 13 : Αόριστο ολοκλήρωμα συνάρτησης



ΘΕΜΑ 1: Το αόριστο ολοκλήρωμα πολυωνυμικών συναρτήσεων

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x)=x^3+x+1$ ($F(x)=1*x^3+(-1)*x+1$), η εφαπτομένη σε ένα σημείο της A και ένα σημείο B με τετμημένη την τετμημένη του A και τεταγμένη την κλίση της εφαπτομένης. Ακόμα έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $f(x)=ax^n+\beta$. Μπορείτε να ορίσετε την F(x) ώστε η καμπύλη του ίχνους του σημείου B ταυτίζεται με την προκαθορισμένη f(x) (δηλαδή η F(x) είναι μια αρχική της f(x));

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $a=1$, $\beta=-2$ και $n=2$. Μπορείτε να επαναπροσδιορίσετε την συνάρτηση F(x) ώστε το σημείο B να κινείται πάνω στην f(x) καθώς μεταβάλλεται το σημείο A (δηλαδή η παράγωγος της F(x) να είναι η f(x) ή η F(x) να είναι μια αρχική της f(x));

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A και παρακολουθήστε την κίνηση του σημείου B. Μπορείτε να επιλέξετε για το B την εντολή "Ίχνος ενεργό" και έτσι να έχετε το ίχνος του όταν κινείτε το σημείο A. Επιλέξτε την F(x) και με δεξί κλικ "επαναπροσδιορισμός". Στη συνέχεια πληκτρολογήστε κατάλληλες τιμές για τους συντελεστές της F(x) ώστε το σημείο B να κινείται πάνω στη καμπύλη της f(x). Μπορείτε να βρείτε περισσότερες από μια συναρτήσεις F(x); Συσχετίσετε την παράγωγο της ζητούμενης F(x) με την δεδομένη f(x). Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

2. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $a=-1$, $\beta=4$ και $n=2$. Μπορείτε να προσδιορίσετε τη συνάρτηση F(x) ώστε να είναι μια αρχική της f(x); Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A και παρακολουθήστε την κίνηση του σημείου B. Μπορείτε να επιλέξετε για το B την εντολή "Ίχνος ενεργό" και έτσι να έχετε το ίχνος του όταν κινείτε το σημείο A. Συσχετίστε τις τιμές των συντελεστών της F(x) ώστε η παράγωγός της να ταυτίζεται με την δεδομένη f(x). Ελέγξτε αν το σημείο B κινείται πάνω στη καμπύλη της f(x). Μεταβάλλετε τον σταθερό όρο της F(x) και παρατηρήστε τις αλλαγές στη κίνηση του σημείου B. Μπορείτε να βρείτε περισσότερες από μια αρχικές; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\alpha=0.4$, $\beta=-1$ και $\nu=3$. Μπορείτε να προσδιορίσετε την συνάρτηση $F(x)$ ώστε να είναι μια αρχική της $f(x)$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A και παρακολουθήστε την κίνηση του σημείου B. Μπορείτε να επιλέξετε για το B την εντολή "Ίχνος ενεργό" και έτσι να έχετε το ίχνος του όταν κινείτε το σημείο A.

Επιλέξτε κατάλληλες τιμές για τους συντελεστές της $F(x)$ ώστε το σημείο B να κινείται πάνω στη καμπύλη της $f(x)$. Μπορείτε να βρείτε περισσότερες από μια αρχικές; Υπολογίστε την παράγωγο της $F(x)$. Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

4. Επιλέξτε διάφορες τιμές για τους δείκτες των μεταβολών α , β και ν . Μπορείτε να προσδιορίσετε την συνάρτηση $F(x)$ ώστε να είναι μια αρχική της $f(x)$; Υπάρχει κάποιος κανόνας για τον προσδιορισμό της $F(x)$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Επιλέξτε διάφορες τιμές για τα α , β και ν . Μπορείτε να βρείτε μια σχέση μεταξύ των συντελεστών (1) α και κ (2) λ και β και (3) μ και ν ; Τι αλλάζει όταν μεταβάλλετε την παράμετρο c ; Μπορείτε να διατυπώσετε έναν κανόνα για την εύρεση της αρχικής της $f(x)$; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

ΘΕΜΑ 2: Το αόριστο ολοκλήρωμα τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x)=κ*cos(λ*x)+μ$ [$F(x)=κ*συν(λx)+μ$], η εφαπτομένη σε ένα σημείο της A και ένα σημείο B με τετμημένη την τετμημένη του A και τεταγμένη την κλίση της εφαπτομένης. Ακόμα έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $f(x)=α*sin(β*x)$ [$f(x)=αημ(βx)$]. Μπορείτε να ερευνήσετε πότε η F(x) είναι μια αρχική της f(x);

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $α=2$ και $β=1$. Μπορείτε να προσδιορίσετε την συνάρτηση F(x) ώστε να είναι μια αρχική της f(x); Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A και παρακολουθήστε την κίνηση του σημείου B. Μπορείτε να επιλέξετε για το B την εντολή "Ίχνος ενεργό" και έτσι να έχετε την καμπύλη του ίχνους του όταν κινείται το σημείο A. Συγκρίνετε το γράφημα της f(x) και της καμπύλης του ίχνους. Επιλέξτε κατάλληλες τιμές για τους συντελεστές της F(x) ώστε το σημείο B να κινείται πάνω στη καμπύλη της f(x). Μπορείτε ακόμα να επαναπροσδιορίσετε τον τύπο της F(x) με την εντολή "Επαναπροσδιορισμός". Υπολογίστε την παράγωγο της F(x). Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

2. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $α=-2$ και $β=-1$ και επαναλάβετε την προηγούμενη δραστηριότητα. Μπορείτε να προσδιορίσετε περισσότερες από μια συναρτήσεις F(x) αρχικές της f(x); Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A και παρακολουθήστε την κίνηση του σημείου B. Μπορείτε να επιλέξετε για το B την εντολή "Ίχνος ενεργό" και έτσι να έχετε το ίχνος του όταν κινείται το σημείο A. Επιλέξτε κατάλληλες τιμές για τους συντελεστές της F(x) ώστε το σημείο B να κινείται πάνω στη καμπύλη της f(x). Μπορείτε ακόμα να επαναπροσδιορίσετε τον τύπο της F(x) με την εντολή Επαναπροσδιορισμός, πληκτρολογώντας στη θέση του x την μεταβλητή $π/2-x$. Μπορείτε να βρείτε περισσότερες από μια αρχικές; Υπολογίστε την παράγωγο της F(x). Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $a=2$ και $\beta=1$ και στη θέση της μεταβλητής x την μεταβλητή $\pi/2-x$ επιλέγοντας την εντολή «Επαναπροσδιορισμός» και πληκτρολογώντας $f(x)=a*\sin(\beta*(\pi/2-x))$. Στη συνέχεια επαναλάβετε την προηγούμενη δραστηριότητα. Μπορείτε να προσδιορίσετε περισσότερες από μια συναρτήσεις $F(x)$ αρχικές της $f(x)$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

4. Επιλέξτε διάφορες τιμές για τους δείκτες των μεταβολών a και β . Μπορείτε να προσδιορίσετε την συνάρτηση $F(x)$ ώστε να είναι μια αρχική της $f(x)$; Υπάρχει κάποιος κανόνας για τον προσδιορισμό της $F(x)$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A και παρακολουθήστε την κίνηση του σημείου B. Μπορείτε να επιλέξετε για το B την εντολή "Ίχνος on" και έτσι να έχετε το ίχνος του όταν κινείτε το σημείο A.
 Επιλέξτε κατάλληλες τιμές για τους συντελεστές της $F(x)$ ώστε το σημείο B να κινείται πάνω στη καμπύλη της $f(x)$. Μπορείτε να βρείτε περισσότερες από μια αρχικές; Υπολογίστε την παράγωγο της $F(x)$.
 Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Επιλέξτε διάφορες τιμές για τα a , β και v . Μπορείτε να βρείτε μια σχέση μεταξύ των συντελεστών a , β , κ και λ ; Τι αλλάζει όταν μεταβάλλετε την παράμετρο μ ;
 Μπορείτε να διατυπώσετε ένα κανόνα για την εύρεση της αρχικής της $f(x)$;
 Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

ΘΕΜΑ 3: Το αόριστο ολοκλήρωμα εκθετικών συναρτήσεων

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x)=a \cdot \beta^{(\rho \cdot x)+\gamma}$ [$F(x)=a\beta^{\rho x+\gamma}$], η εφαπτομένη σε ένα σημείο της A και ένα σημείο B με τετμημένη την τετμημένη του A και τεταγμένη την κλίση της εφαπτομένης. Ακόμα έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $f(x)=\kappa \cdot \ln(\lambda) \cdot \mu^{(\nu \cdot x)}$ [$f(x)=\kappa(\log \lambda)\mu^{\nu x}$]. Μπορείτε να ερευνήσετε πότε η F(x) είναι μια αρχική της f(x);

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\kappa=1$, $\lambda=2$, $\mu=2$ και $\nu=1$. Μπορείτε να προσδιορίσετε την συνάρτηση F(x) ώστε να είναι μια αρχική της f(x); Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A και παρακολουθήστε την κίνηση του σημείου B. Μπορείτε να επιλέξετε για το B την εντολή "Ίχνος ενεργό" και έτσι να έχετε το ίχνος του όταν κινείτε το σημείο A.
 Επιλέξτε κατάλληλες τιμές για τους συντελεστές της F(x) ώστε το σημείο B να κινείται πάνω στη καμπύλη της f(x). Μπορείτε να βρείτε περισσότερες από μια αρχικές; Υπολογίστε την παράγωγο της F(x).
 Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

2. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\kappa=2$, $\lambda=1.5$, $\mu=1.5$ και $\nu=1$. Μπορείτε να προσδιορίσετε την συνάρτηση F(x) ώστε να είναι μια αρχική της f(x); Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A και παρακολουθήστε την κίνηση του σημείου B. Μπορείτε να επιλέξετε για το B την εντολή "Ίχνος ενεργό" και έτσι να έχετε το ίχνος του όταν κινείτε το σημείο A.
 Επιλέξτε κατάλληλες τιμές για τους συντελεστές της F(x) ώστε το σημείο B να κινείται πάνω στη καμπύλη της f(x). Μπορείτε να βρείτε περισσότερες από μια αρχικές; Υπολογίστε την παράγωγο της F(x).
 Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολών να δείχνουν $\kappa=0.4$, $\lambda=2$, $\mu=2$ και $\nu=-2$. Μπορείτε να προσδιορίσετε την συνάρτηση $F(x)$ ώστε να είναι μια αρχική της $f(x)$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A και παρακολουθήστε την κίνηση του σημείου B. Μπορείτε να επιλέξετε για το B την εντολή "Ίχνος ενεργό" και έτσι να έχετε το ίχνος του όταν κινείτε το σημείο A.

Επιλέξτε κατάλληλες τιμές για τους συντελεστές της $F(x)$ ώστε το σημείο B να κινείται πάνω στη καμπύλη της $f(x)$. Μπορείτε να βρείτε περισσότερες από μια αρχικές; Υπολογίστε την παράγωγο της $F(x)$. Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

4. Επιλέξτε διάφορες τιμές για τους δείκτες των μεταβολών κ , λ , μ και ν . Μπορείτε να προσδιορίσετε την συνάρτηση $F(x)$ ώστε να είναι μια αρχική της $f(x)$; Υπάρχει κάποιος κανόνας για τον προσδιορισμό της $F(x)$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Επιλέξτε διάφορες τιμές για τα α, β και ν . Μπορείτε να βρείτε μια σχέση μεταξύ των συντελεστών των δυο συναρτήσεων; Μπορείτε να διατυπώσετε ένα κανόνα για την εύρεση της αρχικής της $f(x)$; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

ΘΕΜΑ 4: Το αόριστο ολοκλήρωμα άρρητων συναρτήσεων

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x)=κ*x^2*\sqrt{x}+λx+μ$, η εφαπτομένη σε ένα σημείο της A και ένα σημείο B με τετμημένη την τετμημένη του A κα τεταγμένη την κλίση της εφαπτομένης. Ακόμα έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $f(x)=α*x*\sqrt{x}+β$. Μπορείτε να ερευνήσετε πότε η F(x) είναι μια αρχική της f(x);

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $α=1$ και $β=2$. Μπορείτε να προσδιορίσετε την συνάρτηση F(x) ώστε να είναι μια αρχική της f(x); Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A και παρακολουθήστε την κίνηση του σημείου B. Μπορείτε να επιλέξετε για το B την εντολή "Ίχνος ενεργό" και έτσι να έχετε το ίχνος του όταν κινείτε το σημείο A.
 Επιλέξτε κατάλληλες τιμές για τους συντελεστές της F(x) ώστε το σημείο B να κινείται πάνω στη καμπύλη της f(x). Μπορείτε να βρείτε περισσότερες από μια αρχικές; Υπολογίστε την παράγωγο της F(x).
 Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

2. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $α=-5$ και $β=2$. Μπορείτε να προσδιορίσετε την συνάρτηση F(x) ώστε να είναι μια αρχική της f(x); Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A και παρακολουθήστε την κίνηση του σημείου B. Μπορείτε να επιλέξετε για το B την εντολή "Ίχνος ενεργό" και έτσι να έχετε το ίχνος του όταν κινείτε το σημείο A.
 Επιλέξτε κατάλληλες τιμές για τους συντελεστές της F(x) ώστε το σημείο B να κινείται πάνω στη καμπύλη της f(x). Μπορείτε να βρείτε περισσότερες από μια αρχικές; Υπολογίστε την παράγωγο της F(x).
 Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $a=-2$ και $\beta=0.6$. Ακόμα επαναδιατυπώστε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$ σε $f(x)=a*x*\sqrt{\text{abs}(x)}+\beta$. Μπορείτε να προσδιορίσετε την συνάρτηση $F(x)$ ώστε να είναι μια αρχική της $f(x)$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A και παρακολουθήστε την κίνηση του σημείου B. Μπορείτε να επιλέξετε για το B την εντολή "Ίχνος ενεργό" και έτσι να έχετε το ίχνος του όταν κινείτε το σημείο A.
 Επιλέξτε κατάλληλες τιμές για τους συντελεστές της $F(x)$ ώστε το σημείο B να κινείται πάνω στη καμπύλη της $f(x)$. Μπορείτε να επαναδιατυπώσετε και την συνάρτηση $F(x)$ και να υπολογίσετε την παράγωγό της.
 Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

4. Επιλέξτε διάφορες τιμές για τους δείκτες των μεταβολέων a και β . Μπορείτε να προσδιορίσετε την συνάρτηση $F(x)$ ώστε να είναι μια αρχική της $f(x)$; Υπάρχει κάποιος κανόνας για τον προσδιορισμό της $F(x)$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

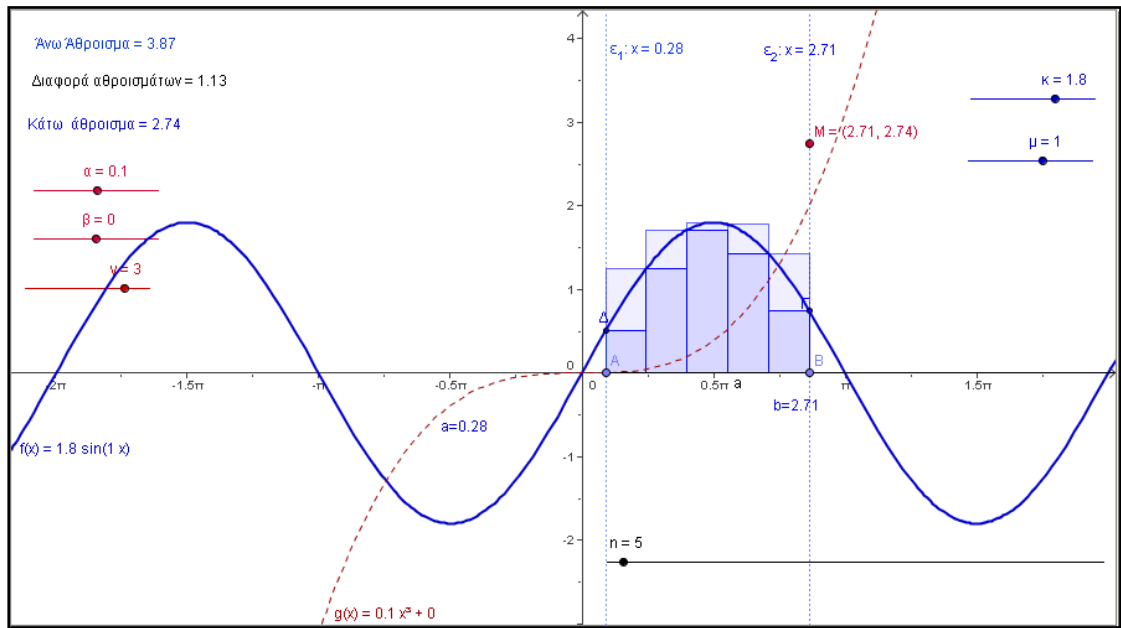
Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

Επιλέξτε διάφορες τιμές για τα a και β . Μπορείτε να βρείτε μια σχέση μεταξύ των συντελεστών των δυο συναρτήσεων; Μπορείτε να διατυπώσετε ένα κανόνα για την εύρεση της αρχικής της $f(x)$; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

5.2 ΣΕΝΑΡΙΟ 14 : Μέτρηση εμβαδού χωρίου



ΘΕΜΑ 1: Η μέτρηση του εμβαδού χωρίου κάτω από πολυωνυμική συνάρτηση

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=0.4 \cdot x^2$ και οι ευθείες $(\epsilon_1): x=x_A$ και $(\epsilon_2): x=x_B$ που διέρχονται από τα σημεία A και B. Με την χρήση του μεταβολέα n μπορείτε να χωρίζετε το χωρίο που προσδιορίζεται από τις ευθείες $x=x_A, x=x_B, y=f(x)$ και τον άξονα xx' σε n ορθογώνια ίσου πλάτους. Ένα σημείο M ορίζεται να έχει τετμημένη την τετμημένη του B και τεταγμένη το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων στα οποία χωρίζεται το χωρίο. Ερευνήστε πότε το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων προσεγγίζει ικανοποιητικά το εμβαδόν του χωρίου.

Διερευνήσεις:

- Μπορείτε να υπολογίσετε με ικανοποιητική προσέγγιση το εμβαδόν του χωρίου όταν οι ευθείες που το ορίζουν είναι οι $x=0$ και $x=2$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

- Μπορείτε να υπολογίσετε με ικανοποιητική προσέγγιση το εμβαδόν του χωρίου όταν οι ευθείες που το ορίζουν είναι οι $x=0$ και $x=2$, το σημείο A να είναι στη θέση (0,0) και το B στη θέση στο (2,0) χρησιμοποιώντας και το "Κάτω άθροισμα" και το "Άνω άθροισμα"; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στη θέση (0,0) και το B στη θέση (2,0). Στη συνέχεια επιλέξτε το n να έχει διαδοχικά τις τιμές 2 μετά 3 μετά 4 κ.ο.κ και παρακολουθήστε το άθροισμα των εμβαδών στην ένδειξη "Κάτω άθροισμα". Στη συνέχεια κάντε δεξί κλικ πάνω στο κουμπί "Άνω Άθροισμα" για να εμφανίσετε τα ορθογώνια που υπερβαίνουν την καμπύλη. Έτσι θα μπορείτε να παρατηρείτε το άθροισμα των πάνω ή των κάτω ορθογωνίων. Μπορείτε να επιλέξετε το κουμπί "Διαφορά" και να παρατηρείτε τη διαφορά των δυο εμβαδών. Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Ενεργοποιήστε τα κουμπιά "Άνω άθροισμα" "Κάτω Άθροισμα" και "Διαφορά". Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στη θέση (0,0) και το B στη θέση (2,0). Στη συνέχεια επιλέξτε το n να έχει διαδοχικά τις τιμές 2 μετά 3 μετά 4 κ.ο.κ και παρακολουθήστε (1) το άθροισμα των εμβαδών στην ένδειξη "Κάτω άθροισμα" (2) το άθροισμα των εμβαδών στην ένδειξη "Άνω άθροισμα" και (3) την κίνηση του σημείου M. Για να επανέλθετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Επιλέξτε τα σημεία A και B να είναι στις θέσεις (0,0) και (3,0) αντίστοιχα. Μπορείτε να προσδιορίσετε το πλήθος των ορθογωνίων που πρέπει να χωριστεί το χωρίο ώστε το σημείο B να ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x)$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στη θέση (0,0) και το B στη θέση (3,0). Στη συνέχεια επιλέξτε το n να έχει διαδοχικά τις τιμές 2 μετά 3 μετά 4 κ.ο.κ και παρακολουθήστε (1) το άθροισμα των εμβαδών στις ενδείξεις "Κάτω άθροισμα", "Άνω άθροισμα", (2) την διαφορά των δυο ενδείξεων και (3) την κίνηση του σημείου M. Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

4. Μπορείτε να επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις μετασχηματίζοντας την καμπύλη της συνάρτησης με το ποντίκι σας είτε επαναπροσδιορίζοντας τον τύπο της με την εντολή ««Επαναπροσδιορισμός»». Προσδιορίστε το εμβαδόν του χωρίου μετακινώντας το σημείο B ενώ το σημείο A να είναι στη θέση (0,0). Πώς συνδέεται το εμβαδόν του χωρίου με την συνάρτηση και την καμπύλη στην οποία ανήκει το σημείο M; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στη θέση (0,0) και το B σε μια τυχαία θέση. Στη συνέχεια επιλέξτε το n να έχει αρκετά μεγάλες τιμές και παρακολουθήστε (1) το άθροισμα των εμβαδών στην ένδειξη "Κάτω άθροισμα" και (2) την διαφορά των δυο ενδείξεων καθώς κινείτε το σημείο B. Επιλέξτε το σημείο M να αφήνει το ίχνος του καθώς μετακινείτε το σημείο B. Για να επανέλθετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

**ΘΕΜΑ 2: Η συνάρτηση του εμβαδού χωρίου που ορίζουν
πολυωνυμικές συναρτήσεις.**

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=kx^\mu$, οι ευθείες $x=x_A$ και $x=x_B$ που διέρχονται από τα σημεία **A** και **B** καθώς και η συνάρτηση $g(x)=ax^n+\beta$. Με την χρήση του μεταβολέα n μπορείτε να χωρίζετε το χωρίο που προσδιορίζεται από τις ευθείες $x=x_A$, $x=x_B$, $y=f(x)$ και τον άξονα xx' σε n ορθογώνια ίσου πλάτους. Ένα σημείο **M** ορίζεται να έχει τετμημένη την τετμημένη του **B** και τεταγμένη το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων στα οποία χωρίζεται το χωρίο. Ερευνήστε πότε το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων προσεγγίζει ικανοποιητικά το εμβαδόν του χωρίου καθώς και πώς πρέπει να οριστεί η συνάρτηση $g(x)$ ώστε το **M** να ανήκει σ' αυτή.

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε $a=0.3$ και $k=2$. Μπορείτε να υπολογίσετε με ικανοποιητική προσέγγιση το εμβαδόν του χωρίου όταν οι ευθείες που το ορίζουν είναι οι $x=0$ και $x=2$. Μπορείτε να προσδιορίσετε την $g(x)$ ώστε το σημείο **M** να ανήκει σ' αυτή καθώς κινείτε το σημείο **B**; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο **A** στη θέση $(0,0)$ και το **B** στη θέση $(2,0)$. Στη συνέχεια επιλέξτε το n να έχει διαδοχικά τις τιμές 2 μετά 3 μετά 4 κ.ο.κ και παρακολουθήστε (1) το άθροισμα των εμβαδών στην ένδειξη "Κάτω άθροισμα", (2) την ένδειξη "Άνω άθροισμα" και (3) την ένδειξη "Διαφορά Άνω άθροισμα - Κάτω άθροισμα". Για ποιές τιμές της μεταβλητής n έχουμε ικανοποιητική προσέγγιση του εμβαδού του χωρίου; Επιλέξτε επίσης κατάλληλες τιμές για τους μεταβολείς a , β και n ώστε το σημείο **M** να ανήκει στην συνάρτηση $g(x)$. Ελέγξτε την επιλογή σας αλλάζοντας θέση στο σημείο **B**. Μπορείτε να επιλέξετε το **M** να αφήνει ίχνος και να παρατηρείτε πότε η $g(x)$ ταυτίζεται με το ίχνος του **M**. Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

2. Επιλέξτε $\alpha = -0.3$ και $\kappa = 2$. Μπορείτε να υπολογίσετε με ικανοποιητική προσέγγιση το εμβαδόν του χωρίου όταν οι ευθείες που το ορίζουν είναι οι $x=0$ και $x=2$. Μπορείτε να προσδιορίσετε την $g(x)$ ώστε το σημείο M να ανήκει σ' αυτή καθώς κινείτε το σημείο B; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

3. Επιλέξτε $\alpha = 0.4$ και $\kappa = 3$. Μπορείτε να υπολογίσετε με ικανοποιητική προσέγγιση το εμβαδόν του χωρίου όταν οι ευθείες που το ορίζουν είναι οι $x=0$ και $x=2$. Μπορείτε να προσδιορίσετε την $g(x)$ ώστε το σημείο M να ανήκει σ' αυτή καθώς κινείτε το σημείο B; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στη θέση (0,0) και το B στη θέση (2,0). Στη συνέχεια επιλέξτε το n να έχει διαδοχικά τις τιμές 2 μετά 3 μετά 4 κ.ο.κ και παρακολουθήστε (1) το άθροισμα των εμβαδών στην ένδειξη "Κάτω άθροισμα", (2) την ένδειξη "Άνω άθροισμα" και (3) την ένδειξη "Διαφορά Άνω άθροισμα - Κάτω άθροισμα". Για ποιές τιμές της μεταβλητής n έχουμε ικανοποιητική προσέγγιση του εμβαδού του χωρίου; Επιλέξτε επίσης κατάλληλες τιμές για τους μεταβολείς α , β και ν ώστε το σημείο M να ανήκει στην συνάρτηση $g(x)$. Ελέγξτε την επιλογή σας αλλάζοντας θέση στο σημείο B. Μπορείτε να επιλέξετε το M να αφήνει ίχνος και να παρατηρείτε πότε η $g(x)$ ταυτίζεται με το ίχνος του M. Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στη θέση (0,0) και το B στη θέση (2,0). Στη συνέχεια επιλέξτε το n να έχει διαδοχικά τις τιμές 2 μετά 3 μετά 4 κ.ο.κ και παρακολουθήστε (1) το άθροισμα των εμβαδών στην ένδειξη "Κάτω άθροισμα", (2) την ένδειξη "Άνω άθροισμα" και (3) την ένδειξη "Διαφορά Άνω άθροισμα - Κάτω άθροισμα". Για ποιές τιμές της μεταβλητής n έχουμε ικανοποιητική προσέγγιση του εμβαδού του χωρίου; Επιλέξτε επίσης κατάλληλες τιμές για τους μεταβολείς α , β και ν ώστε το σημείο M να ανήκει στην συνάρτηση $g(x)$. Ελέγξτε την επιλογή σας αλλάζοντας θέση στο σημείο B. Μπορείτε να επιλέξετε το M να αφήνει ίχνος και να παρατηρείτε πότε η $g(x)$ ταυτίζεται με το ίχνος του M. Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

4. Μπορείτε να επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις μετασχηματίζοντας την καμπύλη της συνάρτησης $f(x)$ επιλέγοντας διάφορες τιμές για τις παραμέτρους κ και μ . Σε κάθε περίπτωση υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την συνάρτηση $f(x)$ τις ευθείες $x=0$ και $x=x_B$ και τον άξονα x' . Πώς συνδέεται το εμβαδόν του χωρίου με την συνάρτηση $g(x)$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στη θέση (0,0) και το B σε μια τυχαία θέση. Στη συνέχεια επιλέξτε το n να έχει αρκετά μεγάλες τιμές και παρακολουθήστε (1) το άθροισμα των εμβαδών στην ένδειξη "Κάτω άθροισμα" και (2) την διαφορά των δυο ενδείξεων καθώς κινείτε το σημείο M. Επιλέξτε σε κάθε περίπτωση τιμές για τους συντελεστές α , β και ν ώστε το σημείο M να ανήκει στην $g(x)$. Μπορείτε να βρείτε ένα κανόνα με τον οποίο να υπολογίζετε τον τύπο της $g(x)$ ώστε το σημείο M να ανήκει πάντοτε σ' αυτή για μεγάλες τιμές του n ;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

ΘΕΜΑ 3: Η συνάρτηση του εμβαδού χωρίου που ορίζουν τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=κ*\sin(μ*x)$, οι ευθείες $x=x_A$ και $x=x_B$ που διέρχονται από τα σημεία A και B καθώς και η συνάρτηση $g(x)=αx^n+β$. Με την χρήση του μεταβολέα n μπορείτε να χωρίζετε το χωρίο που προσδιορίζεται από τις ευθείες $x=x_A$, $x=x_B$, $y=f(x)$ και τον άξονα $χχ'$ σε n ορθογώνια ίσου πλάτους. Ένα σημείο M ορίζεται να έχει τετμημένη την τετμημένη του B και τεταγμένη το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων στα οποία χωρίζεται το χωρίο. Ερευνήστε πότε το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων προσεγγίζει ικανοποιητικά το εμβαδόν του χωρίου καθώς και πώς πρέπει να οριστεί η συνάρτηση $g(x)$ ώστε το M να ανήκει σ' αυτή.

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε $κ=2$ και $μ=1$. Μπορείτε να υπολογίσετε με ικανοποιητική προσέγγιση το εμβαδόν του χωρίου όταν οι ευθείες που το ορίζουν είναι οι $x=0$ και $x=π/2$. Μπορείτε να προσδιορίσετε την $g(x)$ ώστε το σημείο M να ανήκει σ' αυτή καθώς κινείτε το σημείο B; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στη θέση (0,0) και το B στη θέση (0.5π,0). Στη συνέχεια επιλέξτε το n να έχει διαδοχικά τις τιμές 2 μετά 3 μετά 4 κ.ο.κ και παρακολουθήστε (1) το άθροισμα των εμβαδών στην ένδειξη "Κάτω άθροισμα", (2) την ένδειξη "Άνω άθροισμα" και (3) την ένδειξη "Διαφορά αθροισμάτων". Για ποιές τιμές της μεταβλητής n έχουμε ικανοποιητική προσέγγιση του εμβαδού του χωρίου; Επαναδιατυπώστε τον τύπο της συνάρτησης $g(x)$ - π.χ. επιλέξτε το $\cos(x)$ - και επιλέξτε κατάλληλες τιμές για τους μεταβολείς $α$, $β$ και $γ$ ώστε το σημείο M να ανήκει στην συνάρτηση $g(x)$. Ελέγξτε την επιλογή σας αλλάζοντας θέση στο σημείο B. Μπορείτε να επιλέξετε το M να αφήνει ίχνος και να παρατηρείτε πότε η $g(x)$ ταυτίζεται με το ίχνος του M. Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

2. Επιλέξτε $\kappa=-1$ και $\mu=-2$. Μπορείτε να υπολογίσετε με ικανοποιητική προσέγγιση το εμβαδόν του χωρίου όταν οι ευθείες που το ορίζουν είναι οι $x=0$ και $x=\pi/2$. Μπορείτε να προσδιορίσετε την $g(x)$ ώστε το σημείο M να ανήκει σ' αυτή καθώς κινείτε το σημείο B ; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στη θέση $(0,0)$ και το B στη θέση $(0.5\pi,0)$. Στη συνέχεια επιλέξτε το n να έχει διαδοχικά τις τιμές 2 μετά 3 μετά 4 κ.ο.κ και παρακολουθήστε (1) το άθροισμα των εμβαδών στην ένδειξη "Κάτω άθροισμα", (2) την ένδειξη "Ανω άθροισμα" και (3) την ένδειξη "Διαφορά αθροισμάτων". Για ποιές τιμές της μεταβλητής n έχουμε ικανοποιητική προσέγγιση του εμβαδού του χωρίου; Επαναδιατυπώστε τον τύπο της συνάρτησης $g(x)$ - π.χ. επιλέξτε το $\cos(x)$ - και επιλέξτε κατάλληλες τιμές για τους μεταβολείς α , β και γ ώστε το σημείο M να ανήκει στην συνάρτηση $g(x)$. Ελέγξτε την επιλογή σας αλλάζοντας θέση στο σημείο B . Μπορείτε να επιλέξετε το M να αφήνει ίχνος και να παρατηρείτε πότε η $g(x)$ ταυτίζεται με το ίχνος του M . Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Επιλέξτε $\kappa=2$ και $\mu=2$. Μπορείτε να υπολογίσετε με ικανοποιητική προσέγγιση το εμβαδόν του χωρίου όταν οι ευθείες που το ορίζουν είναι οι $x=0$ και $x=\pi$. Μπορείτε να προσδιορίσετε την $g(x)$ ώστε το σημείο M να ανήκει σ' αυτή καθώς κινείτε το σημείο B ; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στη θέση $(0,0)$ και το B στη θέση $(\pi,0)$. Στη συνέχεια επιλέξτε το n να έχει διαδοχικά τις τιμές 2 μετά 3 μετά 4 κ.ο.κ και παρακολουθήστε (1) το άθροισμα των εμβαδών στην ένδειξη "Κάτω άθροισμα", (2) την ένδειξη "Ανω άθροισμα" και (3) την ένδειξη "Διαφορά αθροισμάτων". Για ποιές τιμές της μεταβλητής n έχουμε ικανοποιητική προσέγγιση του εμβαδού του χωρίου; Επαναδιατυπώστε τον τύπο της συνάρτησης $g(x)$ - π.χ. επιλέξτε το $\cos(x)$ - και επιλέξτε κατάλληλες τιμές για τους μεταβολείς α , β και γ ώστε το σημείο M να ανήκει στην συνάρτηση $g(x)$. Ελέγξτε την επιλογή σας αλλάζοντας θέση στο σημείο B . Μπορείτε να επιλέξετε το M να αφήνει ίχνος και να παρατηρείτε πότε η $g(x)$ ταυτίζεται με το ίχνος του M . Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

4. Μπορείτε να επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις μετασχηματίζοντας την καμπύλη της συνάρτησης $f(x)$ επιλέγοντας διάφορες τιμές για τις παραμέτρους κ και μ . Σε κάθε περίπτωση υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την συνάρτηση $f(x)$ τις ευθείες $x=0$ και $x=x_B$ και τον άξονα $x'x$. Πώς συνδέεται το εμβαδόν του χωρίου με την συνάρτηση $g(x)$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στη θέση (0,0) και το B σε μια τυχαία θέση. Στη συνέχεια επιλέξτε το n να έχει αρκετά μεγάλες τιμές και παρακολουθήστε (1) το άθροισμα των εμβαδών στην ένδειξη "Κάτω άθροισμα", "Άνω άθροισμα" και (2) την διαφορά των δυο ενδείξεων καθώς κινείτε το σημείο B. Επιλέξτε σε κάθε περίπτωση τον τύπο της συνάρτησης $g(x)$ και τις τιμές για τους συντελεστές α, β και γ ώστε το σημείο M να ανήκει στην $g(x)$. Μπορείτε να βρείτε ένα κανόνα με τον οποίο να υπολογίζετε τον τύπο της $g(x)$ ώστε το σημείο M να ανήκει πάντοτε σ' αυτή για μεγάλες τιμές του n ;
 Για να επανέλθετε στην αρχική κατάσταση μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

ΘΕΜΑ 4: Η συνάρτηση του εμβαδού χωρίου που ορίζουν άρρητες συναρτήσεις.

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=κ*\sqrt{μ*x}$, οι ευθείες $x=x_A$ και $x=x_B$ που διέρχονται από τα σημεία A και B καθώς και η συνάρτηση $g(x)=αx^γ+β$. Με την χρήση του μεταβολέα η μπορείτε να χωρίζετε το χωρίο που προσδιορίζεται από τις ευθείες $x=x_A$, $x=x_B$, $y=f(x)$ και τον άξονα $χχ'$ σε η ορθογώνια ίσου πλάτους. Ένα σημείο M ορίζεται να έχει τετμημένη την τετμημένη του B και τεταγμένη το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων στα οποία χωρίζεται το χωρίο. Ερευνήστε πότε το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων προσεγγίζει ικανοποιητικά το εμβαδόν του χωρίου καθώς και πώς πρέπει να οριστεί η συνάρτηση $g(x)$ ώστε το M να ανήκει σ' αυτή.

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε $κ=1$ και $μ=1$. Μπορείτε να υπολογίσετε με ικανοποιητική προσέγγιση το εμβαδόν του χωρίου όταν οι ευθείες που το ορίζουν είναι οι $x=0$ και $x=3$. Μπορείτε να προσδιορίσετε την $g(x)$ ώστε το σημείο M να ανήκει σ' αυτή καθώς κινείτε το σημείο B; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στη θέση (0,0) και το B στη θέση (3,0). Στη συνέχεια επιλέξτε το η να έχει διαδοχικά τις τιμές 2 μετά 3 μετά 4 κ.ο.κ και παρακολουθήστε (1) το άθροισμα των εμβαδών στην ένδειξη "Κάτω άθροισμα", (2) την ένδειξη "Άνω άθροισμα" και (3) την ένδειξη "Διαφορά αθροισμάτων". Για ποιές τιμές της μεταβλητής η έχουμε ικανοποιητική προσέγγιση του εμβαδού του χωρίου; Επαναδιατυπώστε τον τύπο της συνάρτησης $g(x)$ - π.χ. επιλέξτε το \sqrt{x} - και επιλέξτε κατάλληλες τιμές για τους μεταβολείς α, β και γ ώστε το σημείο M να ανήκει στην συνάρτηση $g(x)$. Ελέγξτε την επιλογή σας αλλάζοντας θέση στο σημείο B. Μπορείτε να επιλέξετε το M να αφήνει ίχνος και να παρατηρείτε πότε η $g(x)$ ταντίζεται με το ίχνος του M. Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

2. Επιλέξτε $\kappa=0.5$ και $\mu=3$. Μπορείτε να υπολογίσετε με ικανοποιητική προσέγγιση το εμβαδόν του χωρίου όταν οι ευθείες που το ορίζουν είναι οι $x=0$ και $x=3$. Μπορείτε να προσδιορίσετε την $g(x)$ ώστε το σημείο M να ανήκει σ' αυτή καθώς κινείτε το σημείο B; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

3. Επιλέξτε $\kappa=-0.5$ και $\mu=3$. Μπορείτε να υπολογίσετε με ικανοποιητική προσέγγιση το εμβαδόν του χωρίου όταν οι ευθείες που το ορίζουν είναι οι $x=0$ και $x=3$. Μπορείτε να προσδιορίσετε την $g(x)$ ώστε το σημείο M να ανήκει σ' αυτή καθώς κινείτε το σημείο B; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στη θέση (0,0) και το B στη θέση (3,0). Στη συνέχεια επιλέξτε το n να έχει διαδοχικά τις τιμές 2 μετά 3 μετά 4 κ.ο.κ και παρακολουθήστε (1) το άθροισμα των εμβαδών στην ένδειξη "Κάτω άθροισμα", (2) την ένδειξη "Άνω άθροισμα" και (3) την ένδειξη "Διαφορά αθροισμάτων". Για ποιές τιμές της μεταβλητής n έχουμε ικανοποιητική προσέγγιση του εμβαδού του χωρίου; Επαναδιατυπώστε τον τύπο της συνάρτησης $g(x)$ - π.χ. επιλέξτε το \sqrt{x} - και επιλέξτε κατάλληλες τιμές για τους μεταβολείς α , β και γ ώστε το σημείο M να ανήκει στην συνάρτηση $g(x)$. Ελέγξτε την επιλογή σας αλλάζοντας θέση στο σημείο B. Μπορείτε να επιλέξετε το M να αφήνει ίχνος και να παρατηρείτε πότε η $g(x)$ ταυτίζεται με το ίχνος του M. Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στη θέση (0,0) και το B στη θέση (3,0). Στη συνέχεια επιλέξτε το n να έχει διαδοχικά τις τιμές 2 μετά 3 μετά 4 κ.ο.κ και παρακολουθήστε (1) το άθροισμα των εμβαδών στην ένδειξη "Κάτω άθροισμα", (2) την ένδειξη "Άνω άθροισμα" και (3) την ένδειξη "Διαφορά αθροισμάτων". Για ποιές τιμές της μεταβλητής n έχουμε ικανοποιητική προσέγγιση του εμβαδού του χωρίου; Επαναδιατυπώστε τον τύπο της συνάρτησης $g(x)$ - π.χ. επιλέξτε το \sqrt{x} - και επιλέξτε κατάλληλες τιμές για τους μεταβολείς α , β και γ ώστε το σημείο M να ανήκει στην συνάρτηση $g(x)$. Ελέγξτε την επιλογή σας αλλάζοντας θέση στο σημείο B. Μπορείτε να επιλέξετε το M να αφήνει ίχνος και να παρατηρείτε πότε η $g(x)$ ταυτίζεται με το ίχνος του M. Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

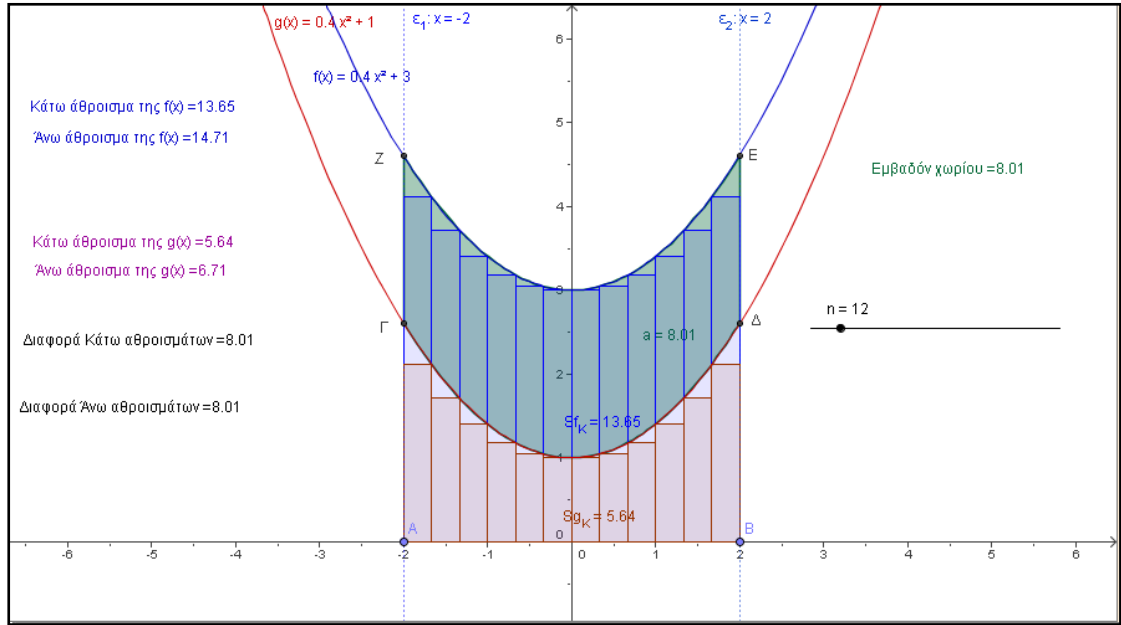
4. Μπορείτε να επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις μετασχηματίζοντας την καμπύλη της συνάρτησης $f(x)$ επιλέγοντας διάφορες τιμές για τις παραμέτρους κ και μ . Σε κάθε περίπτωση υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την συνάρτηση $f(x)$ τις ευθείες $x=0$ και $x=x_B$ και τον άξονα $x'x$. Πώς συνδέεται το εμβαδόν του χωρίου με την συνάρτηση $g(x)$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στη θέση (0,0) και το B σε μια τυχαία θέση. Στη συνέχεια επιλέξτε το n να έχει αρκετά μεγάλες τιμές και παρακολουθήστε (1) το άθροισμα των εμβαδών στην ένδειξη "Κάτω άθροισμα", "Ανω άθροισμα" και (2) την διαφορά των δυο ενδείξεων καθώς κινείτε το σημείο B. Επιλέξτε σε κάθε περίπτωση τον τύπο της συνάρτησης $g(x)$ και τις τιμές για τους συντελεστές α, β και γ ώστε το σημείο M να ανήκει στην $g(x)$. Μπορείτε να βρείτε ένα κανόνα με τον οποίο να υπολογίζετε τον τύπο της $g(x)$ ώστε το σημείο M να ανήκει πάντοτε σ' αυτή για μεγάλες τιμές του n ; Για να επανέλθετε στην αρχική κατάσταση μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

5.3 ΣΕΝΑΡΙΟ 15 : Θεωρήματα και προβλήματα ολοκληρωτικού λογισμού



ΘΕΜΑ 1: Η μέτρηση του εμβαδού χωρίου κάτω από πολυωνυμική συνάρτηση

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2\sqrt{x}$ και οι ευθείες $x=x_A$ και $x=x_B$ που διέρχονται από τα σημεία A και B. Επίσης εμφανίζεται το εμβαδόν του χωρίου που προσδιορίζεται από τις ευθείες $x=x_A$, $x=x_B$, την καμπύλη της $y=f(x)$ και τον άξονα $\chi\chi'$. Ο δείκτης β ενός μεταβολέα επιτρέπει να ορίζεται ένα ορθογώνιο με βάση AB αυτήν του χωρίου και ύψος το τμήμα ΓΔ. Ερευνήστε για τη σχέση του εμβαδού του ορθογωνίου και του εμβαδού του χωρίου.

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε οι ευθείες που ορίζουν το χωρίο να είναι οι $x=0$ και $x=4$. Μπορείτε να υπολογίσετε τότε το εμβαδόν του ορθογωνίου και το εμβαδόν του χωρίου είναι ίσα; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στη θέση (0,0) και το B στη θέση (4,0). Στη συνέχεια μετακινήστε τον δείκτη β στη θέση στην οποία τα δυο εμβαδά είναι ίσα. Μπορείτε να διατυπώσετε ποια τιμή του x σας δίνει το ύψος του ορθογωνίου; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

2. Επιλέξτε οι ευθείες που ορίζουν το χωρίο να είναι οι $x=1$ και $x=6$. Μπορείτε να υπολογίσετε τότε το εμβαδόν του ορθογωνίου και το εμβαδόν του χωρίου είναι ίσα; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στη θέση (1,0) και το B στη θέση (6,0). Στη συνέχεια μετακινήστε τον δείκτη β στη θέση στην οποία τα δυο εμβαδά είναι ίσα. Μπορείτε να διατυπώσετε ποια τιμή του x σας δίνει το ύψος του ορθογωνίου; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Επιλέξτε με την εντολή ««Επαναπροσδιορισμός»» ο τύπος της συνάρτησης να είναι $f(x)=2*\sqrt{\text{abs}(x)}$ και οι ευθείες που το ορίζουν το χωρίο να είναι οι $x=-1$ και $x=3$. Μπορείτε να υπολογίσετε τότε το εμβαδόν του ορθογωνίου και το εμβαδόν του χωρίου είναι ίσα; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στη θέση $(-1,0)$ και το B στη θέση $(3,0)$. Στη συνέχεια Μετακινήστε τον δείκτη β στη θέση στην οποία τα δυο εμβαδά είναι ίσα. Μπορείτε να διατυπώσετε ποια τιμή του x σας δίνει το ύψος του ορθογωνίου; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

4. Μπορείτε να επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις ορίζοντας και άλλες τιμές για τις ευθείες $x=x_A$ και $x=x_B$. Μπορείτε να διατυπώσετε ένα κανόνα για τον υπολογισμό της θέσης του τμήματος $\Gamma\Delta$ ώστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις δυο ευθείες, τον άξονα x' και την συνάρτηση $f(x)$ να είναι ίσο με το εμβαδόν του ορθογωνίου;

Σε κάθε περίπτωση επιλογής των x_A και x_B βρείτε ποιά τιμή του δείκτη β του μεταβολέα κάνει τα εμβαδά ίσα. Στη συνέχεια βρείτε την τιμή της μεταβλητής x που ορίζει το αντίστοιχο ύψος του ορθογωνίου. Μπορείτε να διατυπώσετε ένα κανόνα σχετικό με τον υπολογισμό του εμβαδού του χωρίου; Για να επανέλθετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

ΘΕΜΑ 2: Το εμβαδόν χωρίου μεταξύ δυο συναρτήσεων

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχουν σχεδιαστεί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=0.4*x^2+3$ και $g(x)=0.4*x^2+1$ καθώς και οι ευθείες $x=x_A$ και $x=x_B$ που διέρχονται από τα σημεία A και B. Με την χρήση του μεταβολέα η μπορείτε να χωρίζετε το χωρίο που προσδιορίζεται από τις ευθείες $x=x_A$, $x=x_B$ και τις γραφικές παραστάσεις των δυο συναρτήσεων $y=f(x)$ και $y=g(x)$. Με τη βοήθεια ενός μεταβολέα η μπορούμε να χωρίσουμε το χωρίο σε ορθογώνια ίσου πλάτους. Ερευνήστε πότε το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων προσεγγίζει ικανοποιητικά το εμβαδόν του χωρίου.

Διερευνήσεις:

- Μπορείτε να υπολογίσετε με ικανοποιητική προσέγγιση το εμβαδόν του χωρίου όταν οι ευθείες που το ορίζουν είναι οι $x=0$ και $x=2$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στη θέση (0,0) και το B στη θέση (2,0). Στη συνέχεια επιλέξτε το η να έχει διαδοχικά τις τιμές 2 μετά 3 μετά 4 κ.ο.κ και παρακολουθήστε τις ενδείξεις "Κάτω άθροισμα 1", "Κάτω άθροισμα 2" και "Διαφορά κάτω αθροισμάτων" καθώς και τις ενδείξεις "Άνω άθροισμα 1", "Άνω άθροισμα 2" και "Διαφορά άνω αθροισμάτων". Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

- Μπορείτε να υπολογίσετε με ικανοποιητική προσέγγιση το εμβαδόν του χωρίου όταν οι ευθείες που το ορίζουν είναι οι $x=1$ και $x=4$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στη θέση (0,0) και το B στη θέση (4,0). Στη συνέχεια επιλέξτε το η να έχει διαδοχικά τις τιμές 2 μετά 3 μετά 4 κ.ο.κ και παρακολουθήστε τις ενδείξεις "Κάτω άθροισμα 1", "Κάτω άθροισμα 2" και "Διαφορά κάτω αθροισμάτων" καθώς και τις ενδείξεις "Άνω άθροισμα 1", "Άνω άθροισμα 2" και "Διαφορά άνω αθροισμάτων". Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Με το ποντίκι σας μετακινήστε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων ώστε οι κορυφές τους να είναι για την $f(x)$ το σημείο $(0,4)$ και για την $g(x)$ το σημείο $(0,2)$. Μπορείτε να προσδιορίσετε το πλήθος των ορθογωνίων που πρέπει να χωριστεί το χωρίο ώστε το εμβαδόν του χωρίου να προσεγγίζεται με ικανοποιητική ακρίβεια; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Τοποθετήστε τον δείκτη του ποντικιού σας στην κορυφή της κάθε καμπύλης και με πατημένο το αριστερό πλήκτρο κινείστε τον μέχρι το νέο σημείο. Στη συνέχεια επιλέξτε το n να έχει διαδοχικά τις τιμές 2 μετά 3 μετά 4 κ.ο.κ και παρακολουθήστε τις ενδείξεις "Κάτω άθροισμα της f ", "Κάτω άθροισμα της $g(x)$ " και "Διαφορά κάτω αθροισμάτων" καθώς και τις ενδείξεις "Άνω άθροισμα της f ", "Άνω άθροισμα της $g(x)$ " και "Διαφορά άνω αθροισμάτων". Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

4. Μπορείτε να επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις μετασχηματίζοντας είτε με το ποντίκι σας είτε με την εντολή «Επαναπροσδιορισμός» τις καμπύλες των δυο συναρτήσεων. Προσδιορίστε το εμβαδόν του χωρίου μετακινώντας τα σημεία A και B σε διάφορες θέσεις. Μπορείτε να διατυπώσετε ένα κανόνα σχετικό με τον υπολογισμό του εμβαδού του χωρίου; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε και αλγεβρικά τις απαντήσεις σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Τοποθετήστε τον δείκτη του ποντικιού σας στην κορυφή της κάθε καμπύλης και με πατημένο το αριστερό πλήκτρο κινείστε πάνω ή κάτω ή αριστερά ή δεξιά μέχρι να προσδιορίσετε τη νέα της μορφή. Στη συνέχεια επιλέξτε το n να έχει διαδοχικά τις τιμές 2 μετά 3 μετά 4 κ.ο.κ και παρακολουθήστε τις ενδείξεις "Κάτω άθροισμα της f ", "Κάτω άθροισμα της $g(x)$ " και "Διαφορά κάτω αθροισμάτων" καθώς και τις ενδείξεις "Άνω άθροισμα της f ", "Άνω άθροισμα της $g(x)$ " και "Διαφορά άνω αθροισμάτων". Μπορείτε να διατυπώσετε ένα κανόνα σχετικό με την διαφορά των εμβαδών των δυο χωρίων που ορίζουν οι δυο συναρτήσεις; Για να την επαναφέρετε στην αρχική της μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

ΘΕΜΑ 3: Η συνάρτηση του εμβαδού χωρίου μεταξύ δυο συναρτήσεων

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sin(x)$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\exp(x)$ και το χωρίο που ορίζουν οι δυο συναρτήσεις μαζί με τις ευθείες $x=x_A$ και $x=x_B$ που διέρχονται από τα σημεία A και B. Το σημείο M ορίζεται από την τετμημένη του B και την απόλυτη τιμή του εμβαδού του χωρίου. Ερευνήστε τον τρόπο μεταβολής του εμβαδού του χωρίου καθώς μεταβάλλετε τη θέση του σημείου B.

Διερευνήσεις:

1. Πώς μεταβάλλεται το εμβαδόν του χωρίου όταν το σημείο A είναι στη θέση $(0, 0)$; Μπορείτε να επιλέξετε κατάλληλη συνάρτηση στη θέση της $g(x)$ ώστε να αντιστοιχεί στη μεταβολή του εμβαδού; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στη θέση $(0, 0)$ και το B σε μια τυχαία θέση. Στη συνέχεια Μετακινήστε το B και παρακολουθήστε πώς μεταβάλλεται το εμβαδόν του χωρίου. Περιγράψτε τον τρόπο μεταβολής του εμβαδού. Με την εντολή «Επαναπροσδιορισμός» επαναδιατυπώστε τον τύπο της συνάρτησης $h(x)$ ώστε η γραφική της παράσταση να ταυτίζεται με το ίχνος του σημείου M. Για να επανέλθετε στην αρχική μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

2. Πώς μεταβάλλεται το εμβαδόν του χωρίου όταν το σημείο A είναι στη θέση $(-2\pi, 0)$; Μπορείτε να επιλέξετε κατάλληλη συνάρτηση στη θέση της $h(x)$ ώστε να αντιστοιχεί στη μεταβολή του εμβαδού; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στη θέση $(-2\pi, 0)$ και το B σε μια τυχαία θέση. Στη συνέχεια Μετακινήστε το B και παρακολουθήστε πώς μεταβάλλεται το εμβαδόν του χωρίου. Περιγράψτε τον τρόπο μεταβολής του εμβαδού. Με την εντολή «Επαναπροσδιορισμός» επαναδιατυπώστε τον τύπο της συνάρτησης $h(x)$ ώστε η γραφική της παράσταση να ταυτίζεται με το ίχνος του σημείου M. Για να επανέλθετε στην αρχική μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Με την εντολή ««Επαναπροσδιορισμός»» επαναδιατυπώστε την συνάρτηση $f(x)$ στην $f(x) = 2 \cdot \exp(-x)$. Πώς μεταβάλλεται το εμβαδόν του χωρίου όταν το σημείο A είναι στη θέση (0, 0); Μπορείτε να επιλέξετε κατάλληλη συνάρτηση στη θέση της $h(x)$ ώστε να αντιστοιχεί στη μεταβολή του εμβαδού; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A στη θέση (0, 0) και το B σε μια τυχαία θέση. Στη συνέχεια Μετακινήστε το B και παρακολουθήστε πώς μεταβάλλεται το εμβαδόν του χωρίου. Περιγράψτε τον τρόπο μεταβολής του εμβαδού. Με την εντολή «Επαναπροσδιορισμός» επαναδιατυπώστε τον τύπο της συνάρτησης $h(x)$ ώστε η γραφική της παράσταση να ταυτίζεται με το ίχνος του σημείου M.

Για να επανέλθετε στην αρχική μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

4. Μπορείτε να επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις μετασχηματίζοντας είτε με το ποντίκι σας είτε με την εντολή ««Επαναπροσδιορισμός»» τις καμπύλες των δυο συναρτήσεων. Προσδιορίστε το εμβαδόν του χωρίου μετακινώντας τα σημεία A και B σε διάφορες θέσεις. Μπορείτε να επιλέξετε κατάλληλη συνάρτηση στη θέση της $g(x)$ ώστε να αντιστοιχεί στη μεταβολή του εμβαδού; Μπορείτε να διατυπώσετε ένα κανόνα σχετικό με τον τρόπο μεταβολής του εμβαδού του χωρίου; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε και αλγεβρικά τις απαντήσεις σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε πρώτα το σημείο A σε μια θέση και στη συνέχεια μετακινώντας το B και παρακολουθήστε πώς μεταβάλλεται το εμβαδόν του χωρίου. Περιγράψτε τον τρόπο μεταβολής του εμβαδού. Με την εντολή «Επαναπροσδιορισμός» επαναδιατυπώστε τον τύπο της συνάρτησης $g(x)$ ώστε η γραφική της παράσταση να ταυτίζεται με το ίχνος του σημείου M.

Για να επανέλθετε στην αρχική μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

ΘΕΜΑ 4: Η συνάρτηση του εμβαδού χωρίου που ορίζουν άρρητες συναρτήσεις.

Στην επιφάνεια εργασίας του παρακάτω μικρόκοσμου έχει σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2*\sqrt{x}$, η ευθεία $x=x_B$ που διέρχεται από το σημείο Γ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης και η εφαπτομένη της $f(x)$ στο σημείο Γ . Ένα σημείο M ορίζεται με συντεταγμένες την τετμημένη του B και τεταγμένη το εμβαδόν του χωρίου που ορίζουν η $f(x)$, η εφαπτομένη στο Γ και ο άξονας $\psi\psi'$.

Ερευνήστε τον τρόπο μεταβολής του εμβαδού του χωρίου καθώς μεταβάλλεται το σημείο B .

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε το σημείο B να είναι στη θέση $(4, 0)$. Μπορείτε να επιβεβαιώσετε και αλγεβρικά την εξίσωση της εφαπτομένης στο Γ ;
Μπορείτε να επιβεβαιώσετε και αλγεβρικά το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$, τον άξονα $\psi\psi'$ και την εφαπτομένη της $f(x)$ στο σημείο Γ ;

Χρησιμοποιήστε τις γνώσεις σας για τον τρόπο υπολογισμού της εφαπτομένης στο σημείο Γ . Η εξίσωση γενικά δίνεται από τον τύπο $y-f(x_\Gamma) = f'(x_\Gamma)(x-x_\Gamma)$. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου αλγεβρικά.
Για να επανέλθετε στην αρχική μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

2. Μετακινήστε το σημείο B . Πώς μεταβάλλεται το εμβαδόν του χωρίου καθώς μετακινείτε το σημείο B ;
Μπορείτε να επιλέξετε κατάλληλη συνάρτηση στη θέση της $h(x)$ ώστε να αντιστοιχεί στη μεταβολή του εμβαδού;
Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μπορείτε να επιλέξετε την εντολής «Επαναπροσδιορισμός» για να ορίσετε τον τύπο της συνάρτησης $h(x)$. Μετακινήστε το σημείο B και παρακολουθήστε πώς μεταβάλλεται το εμβαδόν του χωρίου. Μετακινήστε το σημείο B και παρακολουθήστε πώς μεταβάλλεται το εμβαδόν του χωρίου. Επιλέξτε να εμφανίζεται το ίχνος του σημείου M καθώς κινείτε το B . Περιγράψτε τον τρόπο μεταβολής του εμβαδού.
Επαναδιατυπώστε τον τύπο της συνάρτησης $h(x)$ ώστε η γραφική της παράσταση να ταυτίζεται με το ίχνος του σημείου M .
Για να επανέλθετε στην αρχική μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

3. Επιλέξτε η συνάρτηση $f(x)$ να έχει τύπο $f(x)=2*\sqrt{\text{abs}(x)}$. Πώς μεταβάλλεται το εμβαδόν του χωρίου καθώς μετακινείτε το σημείο M;

Μπορείτε να επιλέξετε κατάλληλη συνάρτηση στη θέση της $h(x)$ ώστε να αντιστοιχεί στη μεταβολή του εμβαδού; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μπορείτε να επιλέξετε τον τύπο της συνάρτησης με την βοήθεια της εντολής «Επαναπροσδιορισμός». Μετακινήστε το σημείο B και παρακολουθήστε πώς μεταβάλλεται το εμβαδόν του χωρίου. Επιλέξτε να εμφανίζεται το ίχνος του σημείου M καθώς κινείτε το B. Περιγράψτε τον τρόπο μεταβολής του εμβαδού.

Επαναδιατυπώστε τον τύπο της συνάρτησης $h(x)$ ώστε η γραφική της παράσταση να ταυτίζεται με το ίχνος του σημείου M.

Για να επανέλθετε στην αρχική μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

4. Επιλέξτε η συνάρτηση $f(x)$ να έχει τύπο $f(x)=x^{(3/2)}$. Πώς μεταβάλλεται το εμβαδόν του χωρίου καθώς μετακινείτε το σημείο M;

Μπορείτε να επιλέξετε κατάλληλη συνάρτηση στη θέση της $h(x)$ ώστε να αντιστοιχεί στη μεταβολή του εμβαδού; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μπορείτε να επιλέξετε τον τύπο της συνάρτησης με την βοήθεια της εντολής «Επαναπροσδιορισμός». Μετακινήστε το σημείο B και παρακολουθήστε πώς μεταβάλλεται το εμβαδόν του χωρίου. Επιλέξτε να εμφανίζεται το ίχνος του σημείου M καθώς κινείτε το B. Περιγράψτε τον τρόπο μεταβολής του εμβαδού.

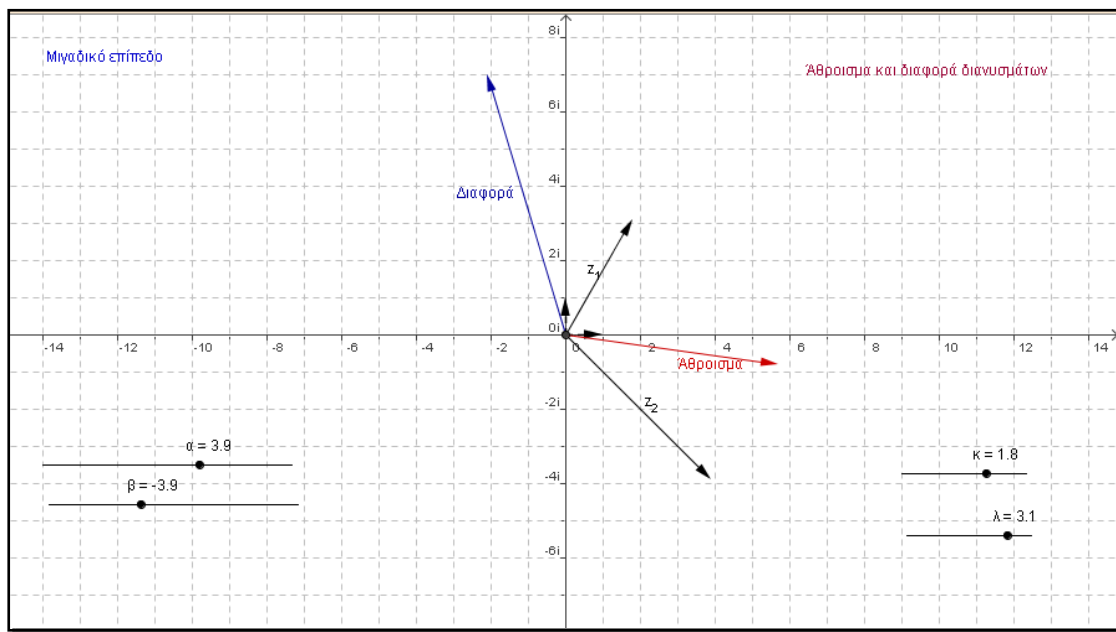
Επαναδιατυπώστε τον τύπο της συνάρτησης $h(x)$ ώστε η γραφική της παράσταση να ταυτίζεται με το ίχνος του σημείου M.

Για να επανέλθετε στην αρχική μορφή μπορείτε να κάνετε "Ανανέωση" (Refresh) της σελίδας (F5).

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

6 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 – Μιγαδικοί αριθμοί

6.1 ΣΕΝΑΡΙΟ 16 : Μιγαδικοί αριθμοί



ΘΕΜΑ 1: Οι μιγαδικοί αριθμοί και το μιγαδικό επίπεδο

Στην επιφάνεια εργασίας έχει σχεδιαστεί ο μιγαδικός αριθμός z του οποίου το πραγματικό μέρος ορίζεται από τον μεταβολέα a και το φανταστικό από τον μεταβολέα b . Ακόμα, έχουν σχεδιαστεί οι μιγαδικοί αριθμοί που είναι συμμετρικοί ως προς τους δυο άξονες και το κέντρο του συστήματος. Διερευνήστε τα χαρακτηριστικά των τεσσάρων μιγαδικών αριθμούς καθώς μεταβάλλετε τους δείκτες των δυο μεταβολέων;

Διερευνήσεις:

1. Τι αλλάζει στους μιγαδικούς αριθμούς όταν μεταβάλλετε τον κέρσορα του μεταβολέα που αντιστοιχεί στον συντελεστή a ;

Τι συμβαίνει όταν ο συντελεστής a παίρνει θετικές τιμές και τι συμβαίνει όταν παίρνει αρνητικές τιμές; Μετακινήστε τώρα τον κέρσορα ώστε η τιμή του a να είναι 0. Τι αλλάζει στους μιγαδικούς αριθμούς;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

2. Τι αλλάζει στους μιγαδικούς αριθμούς όταν μεταβάλλετε τον κέρσορα του μεταβολέα b ;

Τι συμβαίνει στο γράφημα όταν ο συντελεστής b παίρνει θετικές τιμές και τι συμβαίνει όταν παίρνει αρνητικές τιμές; Μετακινήστε τώρα τον κέρσορα ώστε η τιμή του b να είναι 0. Τι αλλάζει στους μιγαδικούς αριθμούς;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

3. Τι αλλάζει στα μέτρα των μιγαδικών αριθμών όταν μεταβάλλετε τις τιμές στους δυο μεταβολείς; Υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των μέτρων των μιγαδικών αριθμών;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε τον κέρσορα κάθε μεταβολέα ώστε οι τιμές του να είναι θετικές και να αυξάνονται. Τι αλλάζει στα μέτρα των μιγαδικών αριθμών; Μετακινήστε τώρα τον κέρσορα ώστε οι τιμές του να είναι αρνητικές και να μειώνονται. Τι αλλάζει στα μέτρα των μιγαδικών αριθμών;

4. Ποια σχέση έχουν οι τέσσερις μιγαδικοί αριθμοί και τι σχέση έχουν τα μέτρα τους; Μπορείτε να αποδείξετε αλγεβρικά τις παρατηρήσεις σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Αν ο μιγαδικός $z=a+bi$ πώς διατυπώνονται οι άλλοι μιγαδικοί αριθμοί; Ποιο είναι το πραγματικό και ποιο είναι το φανταστικό μέρος του συζυγή του z ; Για τη απόδειξη της ισότητας των μέτρων των μιγαδικών αριθμών χρησιμοποιήστε το Πυθαγόρειο θεώρημα.

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

ΘΕΜΑ 2: Το άθροισμα και η διαφορά μιγαδικών αριθμών

Στην επιφάνεια εργασίας έχουν σχεδιαστεί δυο μιγαδικοί αριθμοί z_1 και z_2 καθώς και το άθροισμα και η διαφορά αυτών. Διερευνήστε το άθροισμα και τη διαφορά των μιγαδικών αριθμών καθώς μεταβάλετε τους z_1 και z_2 .

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 ώστε το άθροισμα τους να είναι ο μιγαδικός $2+3i$ και η διαφορά τους $4-i$;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

Κάντε δοκιμές με τους μεταβολείς και ορίστε τις κατάλληλες τιμές για τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των z_1 και z_2 . Μπορείτε να λύσετε και ένα σύστημα αν υποθέσετε ότι $z_1 = a+bi$ και $z_2 = \gamma+di$.

2. Πώς πρέπει να ορίσετε τους z_1 και z_2 ώστε το άθροισμα τους να είναι πραγματικός αριθμός; Σε ποια περίπτωση και η διαφορά τους είναι φανταστικός αριθμός;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

Επιλέξτε το αντίστοιχο κουμπί και κάντε δοκιμές με τους μεταβολείς και ορίστε τις κατάλληλες τιμές για τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των z_1 και z_2 . Μπορείτε να υπολογίσετε το άθροισμα και τη διαφορά των δυο μιγαδικών αριθμών και να επιβεβαιώσετε τις απαντήσεις σας αν υποθέσετε ότι $z_1 = a+bi$ και $z_2 = \gamma+di$

3. Πώς πρέπει να ορίσετε τους z_1 και z_2 ώστε η διαφορά να είναι πραγματικός αριθμός; Σε ποιά περίπτωση το άθροισμα τους είναι φανταστικός αριθμός;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Επιλέξτε το αντίστοιχο κουμπί και κάντε δοκιμές με τους μεταβολείς και ορίστε τις κατάλληλες τιμές για τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των z_1 και z_2 . Μπορείτε να υπολογίσετε πότε το άθροισμά τους είναι πραγματικός αριθμός και πότε η διαφορά τους είναι φανταστικός αριθμός και να επιβεβαιώσετε τις απαντήσεις σας αν υποθέσετε ότι $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$.

4. Ποια σχέση έχει το άθροισμα και η διαφορά των μιγαδικών αριθμών όταν ο z_1 είναι πραγματικός και ο z_2 είναι φανταστικό αριθμός; Τι γωνία σχηματίζουν το άθροισμα και η διαφορά τους;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Επιλέξτε το πραγματικό μέρος του ενός αριθμού και ο φανταστικός του άλλου να είναι 0. Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας.

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

ΘΕΜΑ 3: Το γινόμενο και το πηλίκο δυο μιγαδικών αριθμών

Στην επιφάνεια εργασίας έχουν σχεδιαστεί δυο μιγαδικοί αριθμοί z_1 και z_2 καθώς και το γινόμενο και το πηλίκο αυτών.

Διερευνήστε το γινόμενο και το πηλίκο των μιγαδικών αριθμών καθώς μεταβάλλετε τους z_1 και z_2 .

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 ώστε το γινόμενό τους να είναι ο μιγαδικός $2+3i$. Πόσο είναι το πηλίκο τους;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Κάντε δοκιμές με τους μεταβολείς και ορίστε τις κατάλληλες τιμές για τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των z_1 και z_2 . Μπορείτε να λύσετε και ένα σύστημα αν υποθέσετε ότι $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$.

2. Πώς πρέπει να ορίσετε τους z_1 και z_2 ώστε το γινόμενό τους να είναι πραγματικός αριθμός; Σε ποια περίπτωση και το γινόμενό τους είναι φανταστικός αριθμός;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Κάντε δοκιμές με τους μεταβολείς και ορίστε τις κατάλληλες τιμές για τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των z_1 και z_2 . Μπορείτε να υπολογίσετε τότε το γινόμενό τους είναι πραγματικός αριθμός και τότε είναι φανταστικός αριθμός; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε τις απαντήσεις σας αν υποθέσετε ότι $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$.

3. Πώς πρέπει να ορίσετε τους z_1 και z_2 ώστε το πηλίκο τους να είναι πραγματικός αριθμός; Πότε το πηλίκο τους είναι φανταστικός αριθμός;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Κάντε δοκιμές με τους μεταβολείς και ορίστε τις κατάλληλες τιμές για τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των z_1 και z_2 . Μπορείτε να υπολογίσετε πότε το πηλίκο τους είναι πραγματικός αριθμός και πότε είναι φανταστικός αριθμός; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε τις απαντήσεις σας αν υποθέσετε ότι $z_1 = a + bi$ και $z_2 = \gamma + \delta i$.

4. Τι ιδιότητες έχει το γινόμενο και το πηλίκο δυο συζυγών μιγαδικών αριθμών;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Επιλέξτε οι κέρσορες των μεταβολέων να ορίζουν δυο συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς. Τι μορφή έχει το γινόμενο και το πηλίκο τους; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας.

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

ΘΕΜΑ 4: Η τριγωνική ανισότητα των μιγαδικών αριθμών

Στην επιφάνεια εργασίας έχουν σχεδιαστεί οι μιγαδικοί αριθμοί z_1 και z_2 , το άθροισμά τους και η διαφορά τους.

Διερευνήστε την σχέση που έχουν τα μέτρα του αθροίσματος και της διαφοράς των z_1 και z_2 με το άθροισμα και τη διαφορά των μέτρων.

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=2$, $\beta=2$, $\kappa=4$ και $\lambda=2$. Ποια σχέση έχουν τα μέτρα των $|z_1|+|z_2|$, $|z_1|-|z_2|$, $|z_1+z_2|$ και $|z_1-z_2|$;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Επιλέξτε καθένα από τα κουμπιά "Άθροισμα", "Διαφορά" και παρατηρήστε τη σχέση που έχουν τα μήκη των πλευρών του εκάστοτε τριγώνου που ορίζουν τα διανύσματα των z_1 , z_2 και το διάνυσμα άθροισμα ή διαφορά.

2. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν $\alpha=-1$, $\beta=1$, $\kappa=-4$ και $\lambda=-3$. Ποια σχέση έχουν τα μέτρα των $|z_1|+|z_2|$, $|z_1|-|z_2|$, $|z_1+z_2|$ και $|z_1-z_2|$;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Επιλέξτε καθένα από τα κουμπιά "Άθροισμα", "Διαφορά" και παρατηρήστε τη σχέση που έχουν τα μήκη των πλευρών του εκάστοτε τριγώνου που ορίζουν τα διανύσματα των z_1 , z_2 και το διάνυσμα άθροισμα ή διαφορά. Εκφράστε σχέσεις μεταξύ (1) του αθροίσματος των μέτρων $|z_1|+|z_2|$, (2) την απόλυτη διαφορά των μέτρων $||z_1|-|z_2||$, (3) το μέτρο του αθροίσματος $|z_1+z_2|$ και (4) το μέτρο της διαφοράς $|z_1-z_2|$.

3. Επιλέξτε οι δείκτες των μεταβολέων να δείχνουν διάφορες τιμές. Ποια σχέση έχουν τα μέτρα των $|z_1|+|z_2|$, $|z_1|-|z_2|$, $|z_1+z_2|$ και $|z_1-z_2|$;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

Παρατηρήστε και σ' αυτή την περίπτωση τη σχέση που έχουν (1) το άθροισμα των μέτρων $|z_1|+|z_2|$, (2) την απόλυτη διαφορά των μέτρων $||z_1|-|z_2||$, (3) το μέτρο του αθροίσματος $|z_1+z_2|$ και(4) το μέτρο της διαφοράς $|z_1-z_2|$.

4. Μπορείτε να ορίσετε τους μιγαδικούς z_1 και z_2 έτσι ώστε (1) $|z_1|+|z_2|=|z_1+z_2|$ και
 (2) $||z_1|-|z_2||=|z_1-z_2|$; Μπορείτε να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας;

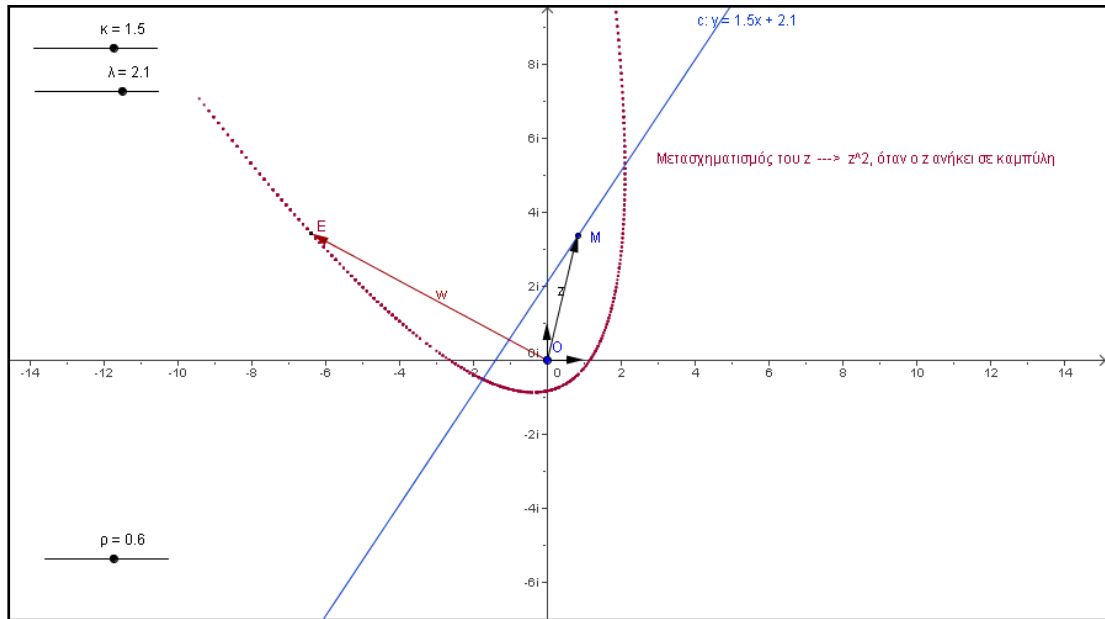
Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

Επιλέξτε τους μιγαδικούς z_1 και z_2 έτσι ώστε στην περίπτωση (1) τα δυο διανύσματα z_1 και z_2 να είναι ομόρροπα και στη περίπτωση (2) να είναι αντίρροπα.

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

6.2 ΣΕΝΑΡΙΟ 17 : Μετασχηματισμοί στο μιγαδικό επίπεδο



ΘΕΜΑ 1: Γεωμετρικοί τόποι μιγαδικών αριθμών

Στην επιφάνεια εργασίας ο μιγαδικός αριθμός z ορίζεται ως συνάρτηση της τετμημένης λ του σημείου M . Επίσης ο μιγαδικός αριθμός w ορίζεται ως συνάρτηση του z και του αριθμού $k+li$.

Διερευνήστε τον γεωμετρικό τόπο των δυο μιγαδικών αριθμών καθώς το σημείο M κινείται στον $\chi\chi$.

Διερευνήσεις:

1. Τι μορφή έχει ο γεωμετρικός τόπος του z ; Τι μορφή έχει ο γεωμετρικός τόπος του w ; Μπορείτε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε το σημείο M αργά και παρατηρήστε τις διαδοχικές θέσεις των σημείων B και Γ . Σε τι είδους καμπύλη ανήκουν; Επιλέξτε τα δύο σημεία να αφήνουν το ίχνος τους με την εντολή "Ίχνος ενεργό". Υποθέστε ότι ο z είναι της μορφής $x+yi$ και βρείτε τη σχέση μεταξύ των x και y . Κάντε το ίδιο και για τον μιγαδικό w .

2. Επαναλάβετε την προηγούμενη διερεύνηση επιλέγοντας τις τιμές $\alpha=3$, $\beta=2$ και $\rho=1$. Τι μορφή έχουν τώρα οι δυο γεωμετρικοί τόποι; Τι επαναλαμβάνεται σε σχέση με τους προηγούμενους γεωμετρικούς τόπους; Μπορείτε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε το σημείο M αργά και παρατηρήστε τις διαδοχικές θέσεις των σημείων B και Γ . Σε τι είδους καμπύλη ανήκουν; Επιλέξτε τα δύο σημεία να αφήνουν το ίχνος τους με την εντολή "Ίχνος ενεργό". Τι κοινό έχουν οι δυο γεωμετρικοί τόποι; Σε τι μοιάζουν με τους γεωμετρικούς τόπους της προηγούμενης διερεύνησης; Υποθέστε ότι ο z είναι της μορφής $x+yi$ και βρείτε τη σχέση μεταξύ των x και y . Κάντε το ίδιο και για τον μιγαδικό w .

3. Επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις για την περίπτωση που έχετε $\alpha=0$, $\beta=0$ και $\rho=2$;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε το σημείο Μ αργά και παρατηρήστε τις διαδοχικές θέσεις των σημείων Β και Γ. Σε τι είδους καμπύλη ανήκουν; Επιλέξτε τα δύο σημεία να αφήνουν το ίχνος τους με την εντολή "Ίχνος ενεργό". Τι κοινό έχουν οι δυο γεωμετρικοί τόποι; Σε τι μοιάζουν με τους γεωμετρικούς τόπους της προηγούμενης διερεύνησης; Υποθέστε ότι ο z είναι της μορφής $x+yi$ και βρείτε τη σχέση μεταξύ των x και y. Κάντε το ίδιο και για τον μιγαδικό w.

4. Επιλέξτε την εντολή ««Επαναπροσδιορισμός»» και επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις ορίζοντας διαφορετικά τα διανύσματα z και w.

Επιλέξτε για παράδειγμα ο z να είναι ίσος με $z=(\lambda^2+2)u+(3\lambda^2-1)v$

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Σε κάθε περίπτωση μετακινήστε το σημείο Μ αργά και παρατηρήστε τις διαδοχικές θέσεις των σημείων Β και Γ. Εξετάστε σε τι είδους καμπύλη ανήκουν; Επιλέξτε τα δύο σημεία να αφήνουν το ίχνος τους με την εντολή "Ίχνος ενεργό". Τι φαινόμενο παρατηρείτε; Πώς εξηγείται; Υποθέστε ότι ο z είναι της μορφής $x+yi$ και βρείτε τη σχέση μεταξύ των x και y. Κάντε το ίδιο και για τον μιγαδικό w.

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

ΘΕΜΑ 2: Μετασχηματισμός του μιγαδικού αριθμού z με $|z|=1$

Στην επιφάνεια εργασίας έχει σχεδιαστεί ο κύκλος ακτίνας 1 στον οποίο ανήκουν οι μιγαδικοί αριθμοί z με μέτρο $|z|=1$. Ο μιγαδικός αριθμός w ορίζεται από τη σχέση $w=\kappa \cdot z+\lambda+\mu i$. Διερευνήστε τον γεωμετρικό τόπο του w όταν ο z διατρέχει τον μοναδιαίο κύκλο.

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε $\kappa=1$, $\lambda=1$ και $\mu=0$. Τι μορφή έχει ο γεωμετρικός τόπος του w ; Μπορείτε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε το σημείο M αργά και παρατηρήστε τις διαδοχικές θέσεις του σημείου E . Σε τι είδους καμπύλη ανήκει; Επιλέξτε τα δύο σημεία να αφήνουν το ίχνος τους με την εντολή "Ίχνος ενεργό". Υποθέστε ότι ο w είναι της μορφής $x+yi$ και βρείτε τη σχέση μεταξύ των x και y .

2. Επιλέξτε $\kappa=2$, $\lambda=0$ και $\mu=1$. Τι μορφή έχει ο γεωμετρικός τόπος του w ; Ποια είναι η σχέση των δυο γεωμετρικών τόπων; Μπορείτε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε το σημείο M αργά και παρατηρήστε τις διαδοχικές θέσεις του σημείου E . Σε τι είδους καμπύλη ανήκει; Επιλέξτε τα δύο σημεία να αφήνουν το ίχνος τους με την εντολή "Ίχνος ενεργό". Τι συμβαίνει όταν το M ταυτίζεται με το E ; Υποθέστε ότι ο w είναι της μορφής $x+yi$ και βρείτε τη σχέση μεταξύ των x και y .

3. Επιλέξτε $\kappa=0$, $\lambda=1$ και $\mu=1$. Τι μορφή έχει ο γεωμετρικός τόπος του w ; Ποια είναι η σχέση των δυο γεωμετρικών τόπων; Μπορείτε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε το σημείο M αργά και παρατηρήστε τις διαδοχικές θέσεις του σημείου E . Τι συμβαίνει με το σημείο E ; Υποθέστε ότι ο w είναι της μορφής $x+yi$ και βρείτε τη σχέση μεταξύ των x και y .

4. Επαναλάβετε τις προηγούμενες διερευνήσεις και για άλλες τιμές των α , β και ρ . Ποια σχέση έχουν οι γεωμετρικοί τόποι των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z και w ;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε το σημείο M αργά και παρατηρήστε τις διαδοχικές θέσεις του σημείου E . Σε τι είδους καμπύλη ανήκει; Επιλέξτε τα δύο σημεία να αφήνουν το ίχνος τους με την εντολή "Ίχνος ενεργό". Υποθέστε ότι ο w είναι της μορφής $x+yi$ και βρείτε τη σχέση μεταξύ των x και y .

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

ΘΕΜΑ 3: Ο γεωμετρικός τόπος των $w=f(z)$ όταν z ανήκει σε ευθεία

Στην επιφάνεια εργασίας έχει σχεδιαστεί ο μιγαδικός αριθμός z και η ευθεία $\psi=kx+\lambda$ στην οποία ανήκει. Διερευνήστε τον γεωμετρικό τόπο που γράφει η εικόνα του $w=z^2$ όταν ο z διατρέχει την ευθεία.

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε $k=1, \lambda=1$ και $\rho=0.3$. Τι μορφή έχει ο γεωμετρικός τόπος του w ; Μπορείτε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε το σημείο M αργά και παρατηρήστε τις διαδοχικές θέσεις του σημείου E . Σε τι είδους καμπύλη ανήκει; Επιλέξτε τα δύο σημεία να αφήνουν το ίχνος τους με την εντολή "Ίχνος ενεργό". Υποθέστε ότι ο w είναι της μορφής $x+yi$ και βρείτε τη σχέση μεταξύ των x και y .

2. Επιλέξτε $k=1, \lambda=-1$ και $\rho=0.4$. Τι μορφή έχει ο γεωμετρικός τόπος του w ; Ποια είναι η σχέση των δυο γεωμετρικών τόπων; Μπορείτε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε το σημείο M αργά και παρατηρήστε τις διαδοχικές θέσεις του σημείου E . Σε τι είδους καμπύλη ανήκει; Επιλέξτε τα δύο σημεία να αφήνουν το ίχνος τους με την εντολή "Ίχνος ενεργό". Υποθέστε ότι ο w είναι της μορφής $x+yi$ και βρείτε τη σχέση μεταξύ των x και y .

3. Επιλέξτε $k=1, \lambda=0$ και $\rho=0.4$. Τι μορφή έχει ο γεωμετρικός τόπος του w ; Ποια είναι η σχέση των δυο γεωμετρικών τόπων; Μπορείτε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε το σημείο M αργά και παρατηρήστε τις διαδοχικές θέσεις του σημείου E . Τι συμβαίνει με το σημείο E ; Υποθέστε ότι ο w είναι της μορφής $x+yi$ και βρείτε τη σχέση μεταξύ των x και y .

4. Επιλέξτε $\kappa=0$, $\lambda=1$ και $\rho=0.4$. Τι μορφή έχει ο γεωμετρικός τόπος του w ; Ποια είναι η σχέση των δυο γεωμετρικών τόπων;
Μπορείτε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς σας;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε το σημείο M αργά και παρατηρήστε τις διαδοχικές θέσεις του σημείου E . Σε τι είδους καμπύλη ανήκει; Επιλέξτε το σημείο να αφήνει το ίχνος του με την εντολή "Ίχνος ενεργό". Υποθέστε ότι ο w είναι της μορφής $x+yi$ και βρείτε τη σχέση μεταξύ των x και y .

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

ΘΕΜΑ 4: Ο γεωμετρικός τόπος των $w=f(z)$ όταν z ανήκει σε κύκλο

Στην επιφάνεια εργασίας έχει σχεδιαστεί ο μιγαδικός αριθμός z με $|z|=ρ$.
 Διερευνήστε για τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των $w=αz^2+βz+γ$.

Διερευνήσεις:

1. Επιλέξτε $α=1, β=1$ και $ρ=1$. Τι μορφή έχει ο γεωμετρικός τόπος του w ; Μπορείτε να τον περιγράψετε και να βρείτε κάποια αλγεβρική του μορφή;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

Μετακινήστε το σημείο M αργά και παρατηρήστε τις διαδοχικές θέσεις του σημείου E . Τι χαρακτηριστικά έχει η καμπύλη στην οποία ανήκει; Επιλέξτε τα δύο σημεία να αφήνουν το ίχνος τους με την εντολή "Ίχνος ενεργό".

2. Επιλέξτε $α=1, β=0$ και $ρ=1$. Τι μορφή έχει ο γεωμετρικός τόπος του w ; Μπορείτε να τον περιγράψετε και να βρείτε κάποια αλγεβρική του μορφή;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

Μετακινήστε το σημείο M αργά και παρατηρήστε τις διαδοχικές θέσεις του σημείου E . Σε τι είδους καμπύλη ανήκει; Επιλέξτε τα δύο σημεία να αφήνουν το ίχνος τους με την εντολή "Ίχνος ενεργό". Υποθέστε ότι ο w είναι της μορφής $x+yi$ και βρείτε τη σχέση μεταξύ των x και y .

3. Επιλέξτε $α=0, β=1$ και $ρ=1$. Τι μορφή έχει ο γεωμετρικός τόπος του w ; Μπορείτε να τον περιγράψετε και να βρείτε κάποια αλγεβρική του μορφή;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

.....

Μετακινήστε το σημείο M αργά και παρατηρήστε τις διαδοχικές θέσεις του σημείου E . Τι συμβαίνει με το σημείο E ; Υποθέστε ότι ο w είναι της μορφής $x+yi$ και βρείτε τη σχέση μεταξύ των x και y .

4. Επιλέξτε $\alpha=1$, $\beta=0$ και $\rho=1$. Τι μορφή έχει ο γεωμετρικός τόπος του w ; Τι αλλάζει καθώς μετακινείτε τον δείκτη του μεταβολέα β ; Μπορείτε να τον περιγράψετε και να βρείτε κάποια αλγεβρική του μορφή;

Σημειώστε την απάντησή σας εδώ:

Μετακινήστε το σημείο M αργά και παρατηρήστε τις διαδοχικές θέσεις του σημείου E . Σε τι είδους καμπύλη ανήκει; Επιλέξτε το σημείο να αφήνει το ίχνος του με την εντολή "Ίχνος ενεργό". Υποθέστε ότι ο w είναι της μορφής $x+yi$ και βρείτε τη σχέση μεταξύ των x και y . Μπορείτε να εξηγήσετε τις μεταβολές του γεωμετρικού τόπου όταν μεταβάλετε τον συντελεστή β ;

Ανακεφαλαίωση: Ακολουθήστε τις προτάσεις και τις οδηγίες που περιγράφονται στο περιβάλλον του μικρόκοσμου, στην επιλογή «Ανακεφαλαίωση».

Τεχνική Υποστήριξη

Δικτυακός Τόπος : www.intracom-schools.gr και

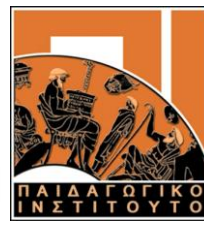
Ηλεκτρονικό ταχυδρομείο : support_it@intracom-it.gr

Τηλέφωνο : 210-6679105

Fax : 210-6679106

Υπεύθυνη : κα Μπερτσά Όλγα

ΥΠΕΠΘ / ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ «ΚΟΙΝΩΝΙΑ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ»



Γ' ΚΟΙΝΟΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΣΤΗΡΙΞΗΣ
ΕΡΓΟ ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΟΥΜΕΝΟ ΚΑΤΑ 80% ΑΠΟ ΤΟ ΕΚΤ
ΚΑΙ ΚΑΤΑ 20% ΑΠΟ ΕΘΝΙΚΟΥΣ ΠΟΡΟΥΣ
«Ολοκληρωμένη Αξιοποίηση των Τ.Π.Ε. στην Εκπαιδευτική Διαδικασία»