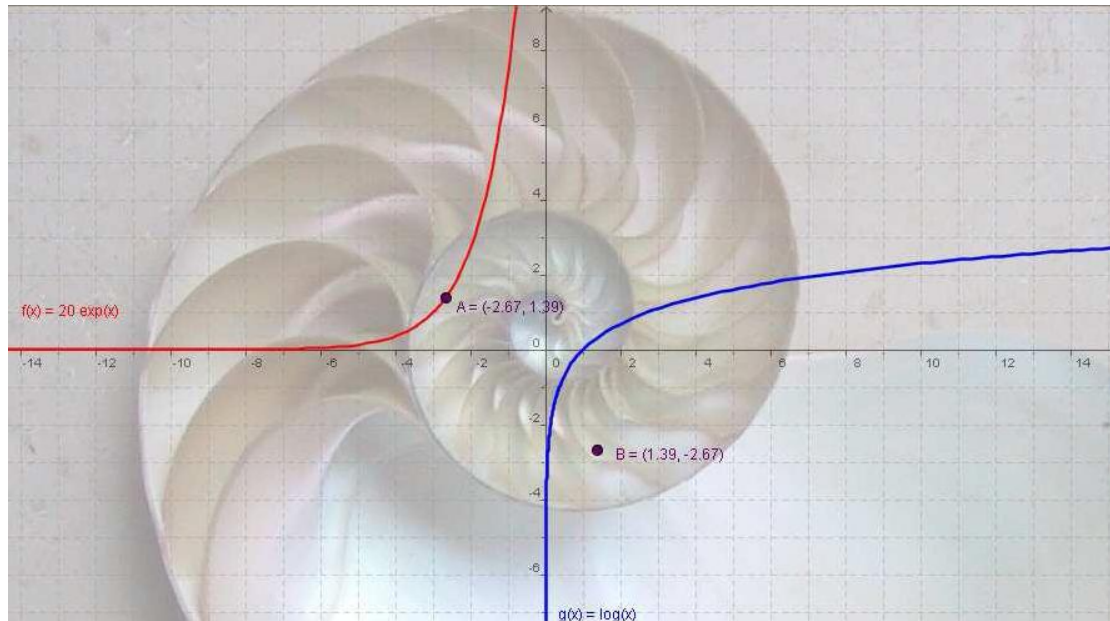


# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΕ ΤΟ GeoGebra\*

## Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

### ΤΕΤΡΑΔΙΟ ΜΑΘΗΤΗ



Στέφανος Κεϊσογλου, Καθηγητής Μαθηματικών M.ed

\*[www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)

ΥΠΕΠΘ / ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ  
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ «ΚΟΙΝΩΝΙΑ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ»



Γ' ΚΟΙΝΟΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΣΤΗΡΙΞΗΣ  
ΕΡΓΟ ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΟΥΜΕΝΟ ΚΑΤΑ 80% ΑΠΟ ΤΟ ΕΚΤ  
ΚΑΙ ΚΑΤΑ 20% ΑΠΟ ΕΘΝΙΚΟΥΣ ΠΟΡΟΥΣ  
«Ολοκληρωμένη Αξιοποίηση των Τ.Π.Ε. στην Εκπαιδευτική Διαδικασία»

**Τεχνική Υποστήριξη**

Δικτυακός Τόπος : [www.intracom-schools.gr](http://www.intracom-schools.gr) και

Ηλεκτρονικό ταχυδρομείο : [support\\_it@intracom-it.gr](mailto:support_it@intracom-it.gr)

Τηλέφωνο : 210-6679105

Fax : 210-6679106

Υπεύθυνη : κα Μπερτσά Όλγα

## Περιεχόμενα

ΑΛΓΕΒΡΑ .....	5
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 .....	5
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ.....	5
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ.....	6
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: .....	7
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.....	9
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: .....	9
ΘΕΩΡΗΜΑ ΗΜΙΤΟΝΩΝ.....	11
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: .....	12
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 .....	13
ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ.....	13
ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ.....	14
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: .....	15
ΡΙΖΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ .....	16
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: .....	17
ΑΡΡΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ .....	18
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: .....	19
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 .....	21
ΠΡΟΟΔΟΙ.....	21
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ.....	22
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: .....	23
ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ .....	25
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: .....	25
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ .....	27
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: .....	28
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 .....	29
ΕΚΘΕΤΙΚΗ-ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ .....	29
ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.....	30
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: .....	30
ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.....	32
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: .....	33
ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΣ ΘΕΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ .....	34
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: .....	35
ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΗΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.....	36
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: .....	37
ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.....	38
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: .....	39
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ .....	40
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: .....	41
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ .....	43
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 .....	43
ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ (ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ).....	43
Η ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΑ ΑΠΟΔΕΙΞΗ.....	44
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: .....	44
Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΠΟΥ ΑΠΟΔΙΔΕΤΑΙ ΣΤΟΥΣ ΚΙΝΕΖΟΥΣ .....	46
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: .....	47
ΜΙΑ ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ .....	48
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: .....	49

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 .....	51
ΕΜΒΑΔΑ.....	51
ΤΡΙΓΩΝΑ ΣΕ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ .....	52
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: .....	53
ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ.....	54
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: .....	55
ΣΧΕΣΗ ΕΜΒΑΔΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ.....	56
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: .....	57
ΕΜΒΑΔΑ ΟΜΟΙΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ .....	58
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: .....	59
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 .....	61
ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ .....	61
ΤΟΞΟ-ΧΟΡΔΗ.....	62
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: .....	62
ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ .....	64
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: .....	64
ΔΙΑΚΟΣΜΗΤΙΚΑ ΜΟΤΙΒΑ.....	66
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: .....	67
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ .....	69
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 .....	69
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ.....	69
ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ-ΚΑΘΕΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑ .....	70
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: .....	71
ΓΩΝΙΑ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.....	72
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: .....	73
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ .....	74
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: .....	75
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9 .....	77
ΕΥΘΕΙΕΣ.....	77
ΕΥΘΕΙΑ - ΔΙΑΝΥΣΜΑ.....	78
ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ.....	80
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: .....	81
ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ 1 .....	82
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: .....	83
ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ 2 .....	84
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: .....	85
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10 .....	87
ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ .....	87
ΑΝΑΚΛΑΣΗ ΣΕ ΠΑΡΑΒΟΛΗ.....	88
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: .....	89
ΑΝΑΚΛΑΣΗ ΣΕ ΕΛΛΕΙΨΗ .....	90
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: .....	91
Η ΥΠΕΡΒΟΛΗ.....	92
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: .....	93

# ΑΛΓΕΒΡΑ

<p><b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1</b> <b>ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ</b></p>
---

## ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Τάξη: Β'

Όνομ/νυμο μαθητών:

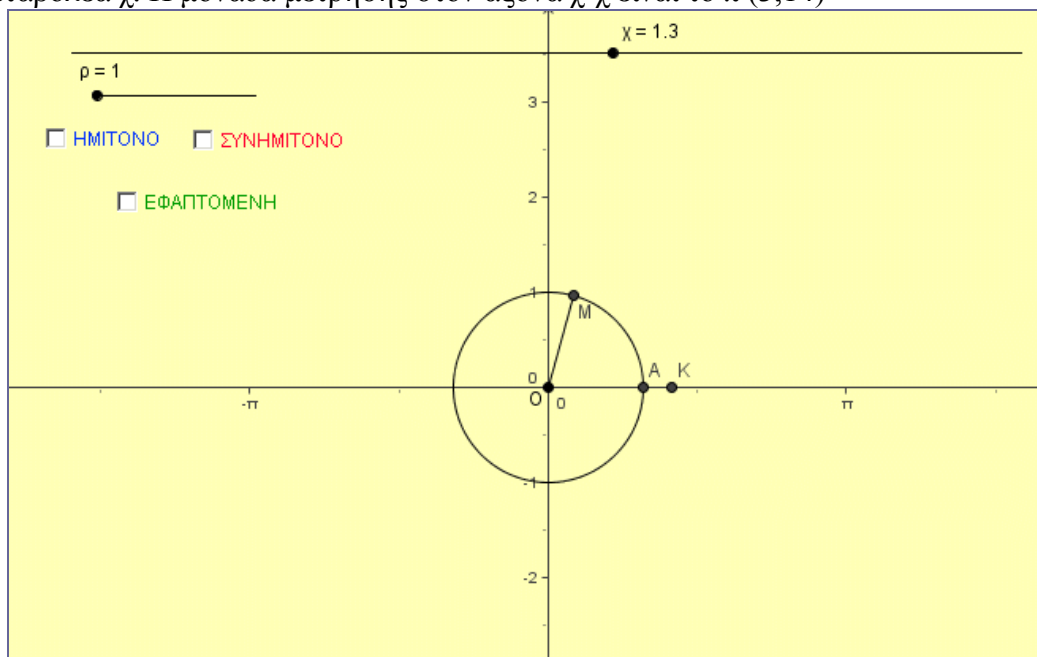
1. ....
  2. ....
- .....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη εμφανίζονται δύο μεταβολείς  $\rho$  και  $\chi$  καθώς και τρία κουμπιά 'ΗΜΙΤΟΝΟ' 'ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟ' και 'ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ'.

Επιπλέον στο σύστημα των δύο αξόνων έχει προσαρμοστεί ένας κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων μία ευθεία εφαπτόμενη στον κύκλο και ένα σημείο  $M$  το οποίο κινείται πάνω στον κύκλο καθώς μεταβάλλονται οι τιμές του  $\chi$ .

Τέλος ένα σημείο  $K$  κινείται στον  $\chi'χ$  και η τετμημένη ντοθυ καθορίζεται από τον μεταβολέα  $\chi$ . Η μονάδα μέτρησης στον άξονα  $\chi'χ$  είναι το  $\pi$  (3,14)



Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

1. Με δεδομένο ότι αρχικά η ακτίνα του κύκλου είναι 1 ποιους τριγωνομετρικούς αριθμούς παριστάνουν οι συντεταγμένες του σημείου  $M$ ;

2. Με το κουμπί 'ΗΜΙΤΟΝΟ' να εμφανίσετε τα τμήματα  $MX$  και  $HK$ . Τι σχέση έχουν οι τεταγμένες των δύο σημείων;

3. Να εντοπίσετε τις συντεταγμένες του σημείου  $H$  κάνοντας δεξί κλικ πάνω σε αυτό. Ποια καμπύλη θα γράψει το  $H$  αν αφήσει ίχνος;

4. Να δημιουργήσετε το ίχνος του  $H$  και να κατασκευάσετε την καμπύλη του ίχνους του. Να δικαιολογήσετε την μορφή της καμπύλης με βάση τις συντεταγμένες του σημείου  $H$

5. Με το κουμπί 'ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟ' να εμφανίσετε τα τμήματα  $MΨ$  και  $ΣΚ$  επαναλάβετε την διαδικασία για το σημείο  $Σ$ .

**Σημείωση:** Αν δεν μπορείτε να αλλάξετε τιμές σε κάποιον μεταβολέα να κάνετε δεξί κλικ πάνω σε αυτόν, να επιλέξετε 'επαναπροσδιορισμός' και χωρίς να αλλάξετε τίποτε να πατήσετε 'Εφαρμογή'.

6. Να αποκρύψετε το 'ΗΜΙΤΟΝΟ' και 'ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟ' και να κάνετε κλικ στο κουμπί 'ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ'. Να εντοπίσετε τις συντεταγμένες του σημείου E κάνοντας δεξί κλικ πάνω σε αυτό. Τι παριστάνει η τεταγμένη του; Να δημιουργήσετε το ίχνος του σημείου E και να σύρετε τον μεταβολέα  $\chi$ . Να δικαιολογήσετε την μορφή της καμπύλης με βάση τις συντεταγμένες του σημείου M.

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με την κίνηση των σημείων H, Σ, E όταν η ακτίνα  $\rho$  του κύκλου είναι 1.

7. Να μεταβάλλετε την τιμή του  $\rho$  και να μελετήσετε την συμπεριφορά των σημείων. Συγκεκριμένα να μελετήσετε την καμπύλη του σημείου H όταν  $\rho=2$ . Ποια είναι η συνάρτηση που έχει γραφική παράσταση την εν λόγω καμπύλη; Να επαναλάβετε για τα υπόλοιπα σημεία.

8. Με βάση τα προηγούμενα να συμπεράνετε για την σχέση που συνδέει την ακτίνα του κύκλου με τις συναρτήσεις (γραφικές παραστάσεις) που παράγουν τα σημεία H, Σ και E.

9. Να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων με την βοήθεια του λογισμικού ώστε να επιβεβαιώσετε ή να απορρίψετε τα συμπεράσματά σας από την προηγούμενη ερώτηση.



## ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

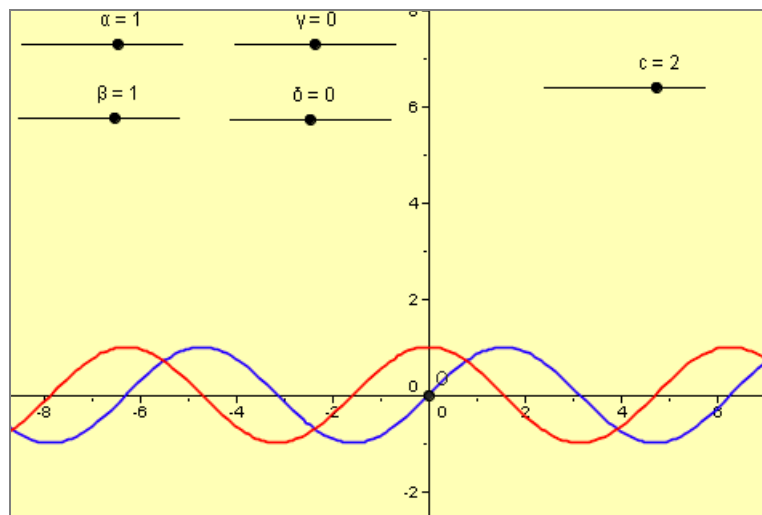
Τάξη: Β'

Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
  2. ....
- .....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη εμφανίζονται 4 μεταβολείς  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $c$ . Επιπλέον εμφανίζονται οι γραφικές παραστάσεις δύο τριγωνομετρικών συναρτήσεων



Να μεταβάλλετε τις τιμές του μεταβολέα  $\alpha$ , του  $\beta$ , του  $\gamma$  και τέλος του  $\delta$ . Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

### ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1. Να εντοπίσετε τις συναρτήσεις των οποίων οι γραφικές παραστάσεις παρουσιάζονται στους άξονες.

2. Πως μεταβάλλονται οι γραφικές παραστάσεις όταν μεταβάλλεται η μεταβλητή  $a$ ; Να δικαιολογήσετε την μεταβολή αυτή.

3. Πως μεταβάλλονται οι γραφικές παραστάσεις όταν μεταβάλλεται η μεταβλητή  $\beta$ ;

4. Πως μεταβάλλονται οι γραφικές παραστάσεις όταν μεταβάλλεται η μεταβλητή  $\gamma$ ;

5. Πως μεταβάλλονται οι γραφικές παραστάσεις όταν μεταβάλλεται η μεταβλητή  $\delta$ ; Να δικαιολογήσετε την μεταβολή αυτή.

Ας επιχειρήσουμε τώρα να βρούμε έναν τρόπο να λύνουμε μία απλή τριγωνομετρική εξίσωση με την βοήθεια των παραπάνω γραφικών παραστάσεων.

6. Να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x)=3\eta\mu(2x)+3$ . και της συνάρτησης  $y=2$  με την βοήθεια του μεταβολέα  $c$ . Να λύσετε την εξίσωση  $3\eta\mu(2x)+3.=2$ . Να χρησιμοποιήσετε την δυνατότητα του λογισμικού να κατασκευάζει σημεία τομής δύο γραφικών παραστάσεων.

## ΘΕΩΡΗΜΑ ΗΜΙΤΟΝΩΝ

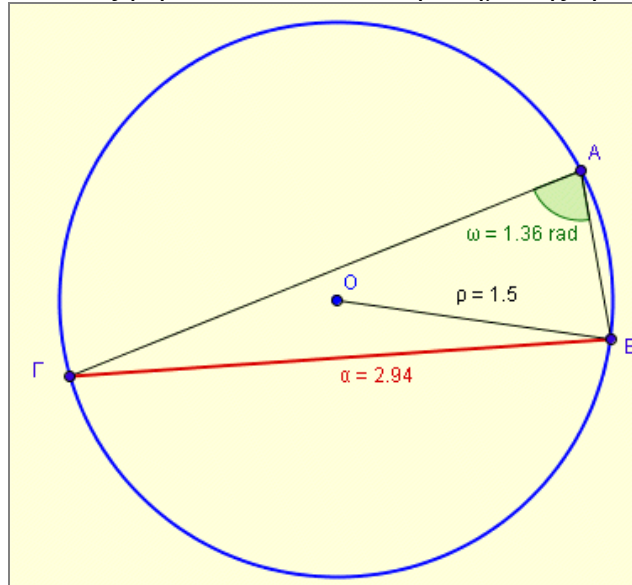
Τάξη: Β'

Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
  2. ....
- .....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη εμφανίζεται ένας κύκλος και τρία σημεία A, B, Γ πάνω σε αυτόν . Επιπλέον εμφανίζεται και μία ακτίνα  $\rho$  του κύκλου όπως και οι μετρήσεις ορισμένων γεωμετρικών αντικειμένων. Τέλος υπάρχει ένα ελεύθερο σημείο M που μπορείτε να το χρησιμοποιήσετε όταν ζητηθεί από σε κάποιο ερώτημα της δραστηριότητας.



Να σύρετε το σημείο Γ πάνω στον κύκλο. Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

1. Πως μεταβάλλεται η πλευρά  $B\Gamma = a$  του τριγώνου καθώς μεταβάλλεται η γωνία  $A = \omega$ ;

2. Ποια είναι η μέγιστη τιμή του  $a$  και για ποια τιμή της γωνίας  $\omega$  επιτυγχάνεται αυτή;

3. Να δημιουργήσετε το σημείο  $M = (\omega, a)$  και το ίχνος του. Να μελετήσετε την τροχιά που διαγράφει καθώς κινείται το σημείο  $\Gamma$ .

4. Ποια σχέση θα μπορούσε να συνδέει τα ποσά  $\omega$  και  $a$ . Πως επηρεάζει η ακτίνα του κύκλου την σχέση αυτή;

5. Να μεταβάλλετε την ακτίνα του κύκλου από το σημείο  $B$ . Να επιβεβαιώσετε το προηγούμενο συμπέρασμά σας κατασκευάζοντας την γραφική παράσταση της σχέσης που έχετε εντοπίσει.

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2**  
**ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ**

## ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

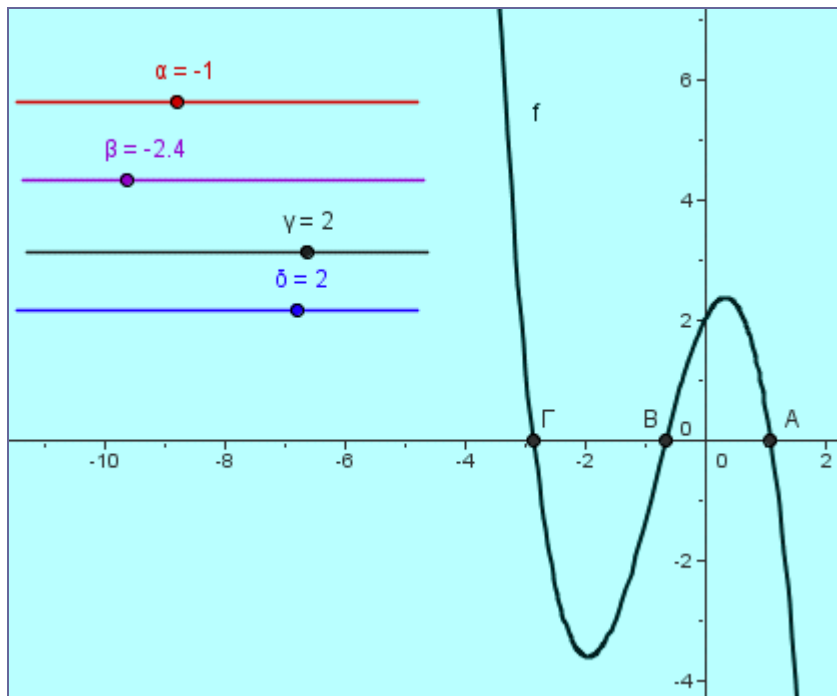
Τάξη: Β'

Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
2. ....
- .....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλονται 4 μεταβολείς  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  και μία γραφική παράσταση.



Να μεταβάλλετε τις τιμές των παραμέτρων και να απαντήσετε στα επόμενα ερωτήματα.

**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

1. Να βρείτε τον τύπο του πολυωνύμου του οποίου η γραφική παράσταση φαίνεται στην οθόνη.

2. Να μηδενίσετε την τιμή του  $a$ . Ποιο πολυώνυμο παριστάνεται μέσω της γραφικής του παράστασης

3. Να επιχειρήσετε να λύσετε την εξίσωση  $x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = 0$  με τις γνωστές μεθόδους που περιγράφονται στο σχολικό βιβλίο. Τι συμπεραίνετε;

4. Να κατασκευάσετε , με την βοήθεια των μεταβολέων, την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 3$ . Ποια σημεία αντιστοιχούν στην λύση της εξίσωσης της προηγούμενης ερώτησης; Να βρείτε τις λύσεις της συγκεκριμένης εξίσωσης με προσέγγιση χιλιοστού.

5. Με  $a \neq 0$  να ερευνήσετε αν υπάρχει πολυώνυμο τρίτου βαθμού το οποίο να μην έχει πραγματική ρίζα.

## ΡΙΖΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ

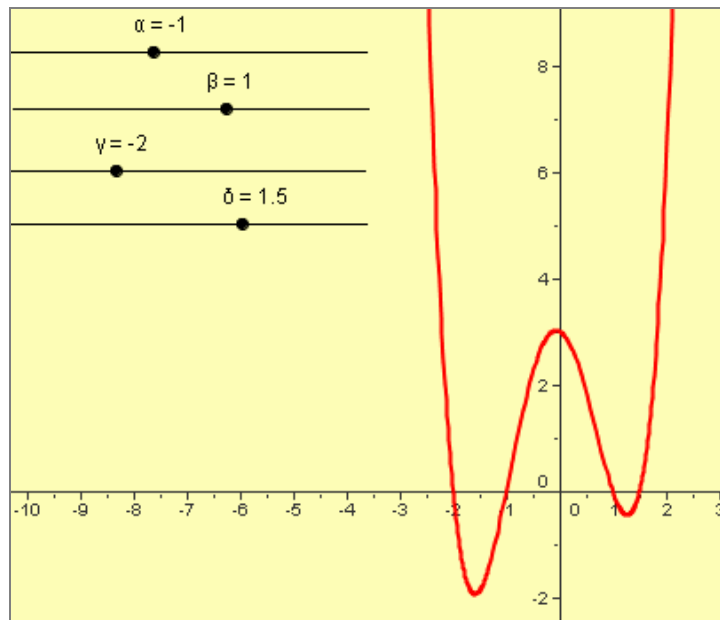
Τάξη: Β'

Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
2. ....
- .....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλονται 4 μεταβολείς  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  και την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.



Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.



**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

1. Να μεταβάλλετε τις τιμές των παραμέτρων. Με δεδομένο ότι η γραφική παράσταση ανήκει σε ένα πολυώνυμο, ποιο θα μπορούσε να είναι το πολυώνυμο αυτό;

2. Να ελέγξετε αν η απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα ήταν σωστή μέσα από την εντολή επαναπροσδιορισμού του τύπου. Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου;

3. Με την βοήθεια των μεταβολέων να κατασκευάσετε ένα πολυώνυμο τετάρτου βαθμού το οποίο να έχει δύο ίσες ρίζες. Ποια είναι τώρα η θέση της γραφικής παράστασης ως προς τον άξονα  $x'x$ ;

4. Να κατασκευάσετε ένα πολυώνυμο τετάρτου βαθμού του οποίου οι 4 ρίζες να είναι ίσες. Ποια είναι η θέση της γραφικής παράστασης ως προς το άξονα  $x'x$ ;

5. Να επινοήσετε έναν τρόπο ώστε με την βοήθεια της γραφικής παράστασης να μπορούμε να υπολογίζουμε άμεσα το γινόμενο  $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta$ .

## ΑΡΡΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Τάξη: Β΄

Όνομ/νυμο μαθητών:

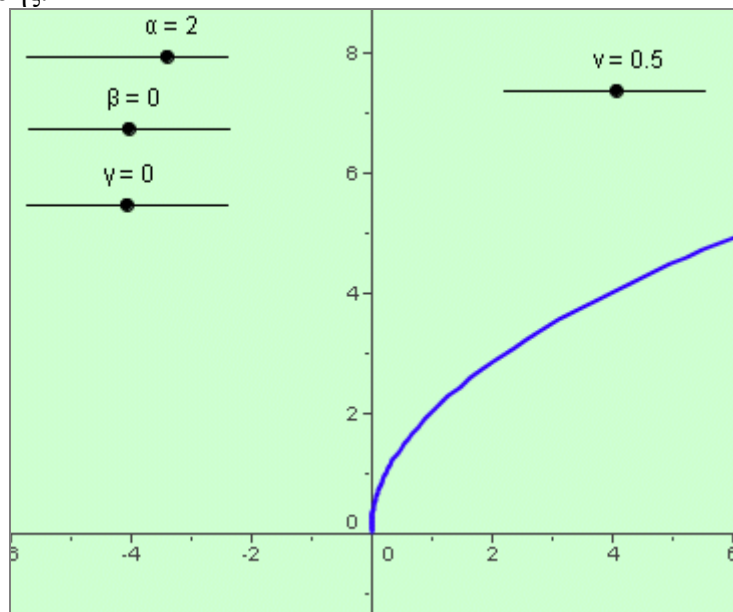
1) .....

2) .....

.....

### Φύλλο εργασίας

Το αρχείο Polynom\_2 περιέχει 4 μεταβολείς  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\nu$  και την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.



Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

1. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στην οθόνη. Είναι πολυωνυμική η συνάρτηση αυτή;

2. Να αλλάξετε τις τιμές της παραμέτρου  $\nu$  ώστε να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$  και την  $f(x)=\sqrt[5]{x^2}$ . Σε τι διαφέρουν οι συναρτήσεις με ριζικά από τις πολυωνυμικές; Που οφείλονται οι διαφορές αυτές;

3. Να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης για  $\alpha=1$   $\beta=\gamma=0$  και  $\nu=-2$ . Ποια είναι η συνάρτηση αυτή; Να δώσετε μία εξήγηση για την μορφή που έχει η γραφική παράσταση.

4. Αλλάζοντας τις τιμές στους μεταβλητές να λύσετε την εξίσωση

$$\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x^3}} = 0.$$



**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3**

**ΠΡΟΟΔΟΙ**

## ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

Τάξη: Β'

Όνομ/νυμο μαθητών:

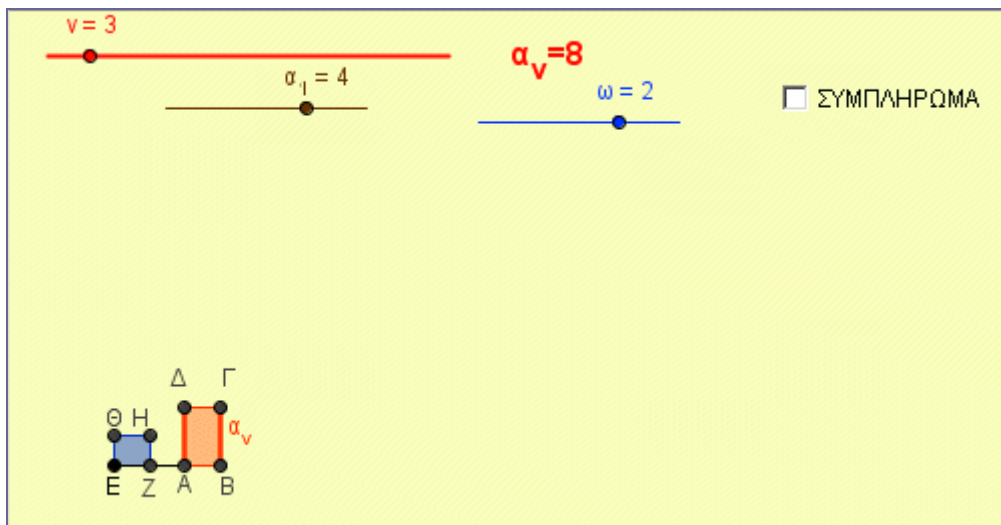
3. ....

4. ....

.....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλονται 3 μεταβολείς  $v$ ,  $a_1$  και  $\omega$  καθώς και 2 ορθογώνια παραλληλόγραμμα διαφορετικού χρώματος των οποίων τα μήκη είναι γνωστά. Επιπλέον εμφανίζεται ένα κουμπί 'ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ' με το οποίο εμφανίζεται ή αποκρύπτεται ένα μεταβολέας  $\kappa$  και ένα επιπλέον πράσινο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Τέλος εμφανίζεται μία μέτρηση  $\alpha_v$  η οποία αντιστοιχεί στο ύψος ενός από τα ορθογώνια παραλληλόγραμμο.



Να μεταβάλλετε τις τιμές του μεταβολέα  $v$ . Με βάση τις μετρήσεις να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

1. Πως μεταβάλλεται το ύψος  $a_n$  του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, καθώς μεταβάλλονται οι τιμές του  $v$ ;

2. Ποια σχέση συνδέει την τιμή  $a_n$  του τμήματος με την  $a_{n-1}$  δηλαδή με την προηγούμενή της; Να εξηγήσετε με οποιονδήποτε τρόπο γιατί οι τιμές του  $a_n$  τμήματος αποτελούν μία αριθμητική πρόοδο.

3. Ποιος είναι ο πρώτος όρος της προόδου; Ποιος είναι ο  $20^{\text{ος}}$  όρος της προόδου; Να απαντήσετε στο ερώτημα αυτό με βάση τον τύπο που μας δίνει τον νιοστό όρο προόδου και να επιβεβαιώσετε το αποτέλεσμα με τον μεταβολέα  $v$ .

4. Να εμφανίσετε τον μεταβολέα  $k$  όταν  $v=20$ . Να μεταβάλλετε τις τιμές του  $k$  (όταν  $v=20$ ). Πως μεταβάλλεται το ύψος  $a_k$  του παραλληλογράμμου ΚΛΜΝ; Να εξηγήσετε γιατί οι τιμές του  $a_k$  αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου.

5. Ποια σχέση συνδέει τους όρους της μίας προόδου με τους όρους της άλλης; Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με κάθε πρόοδο ξεχωριστά. Να ενεργοποιήσετε το ίχνος κάθε των κατακόρυφων πλευρών του ΚΛΜΝ και να σύρετε τους μεταβολείς μέχρι το 20 ώστε να καλύψουν όλο το φάσμα των τιμών τους.

6. Πόσο είναι το συνολικό μήκος δύο παραλληλογράμμων (κόκκινο, πράσινο) που βρίσκονται στην ίδια ευθεία, δηλαδή στην ίδια θέση, για τις διάφορες τιμές των  $\kappa$  και  $\nu$ ;

7. Ας υποθέσουμε ότι μας θέτουν το εξής πρόβλημα: «Πόσο θα είναι το συνολικό ύψος όλων των παραλληλογράμμων, κόκκινα και πράσινα μαζί, αν τα βάλουμε το ένα πάνω στο άλλο;» Να δώσετε μία απάντηση με βάση την εικόνα που παρουσιάζεται στην οθόνη όταν πλέον έχετε ενεργοποιήσει τα ίχνη των πλευρών του ΚΛΜΝ και έχετε διατρέξει όλο το φάσμα των τιμών των μεταβολών  $\nu$  και  $\kappa$ . Πόσο είναι το συνολικό μήκος μόνο των κόκκινων παραλληλογράμμων;

8. Με βάση το προηγούμενο να περιγράψετε μία μέθοδο να βρίσκουμε το άθροισμα των όρων μίας αριθμητικής προόδου.

9. Έχετε στη διάθεσή σας κατάλληλους μεταβολείς με τους οποίους μπορείτε να δημιουργήσετε διάφορες αριθμητικές προόδους. Να πειραματιστείτε ιδιαίτερα με περιπτώσεις στις οποίες η διαφορά  $\omega$  είναι αρνητική.



## ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

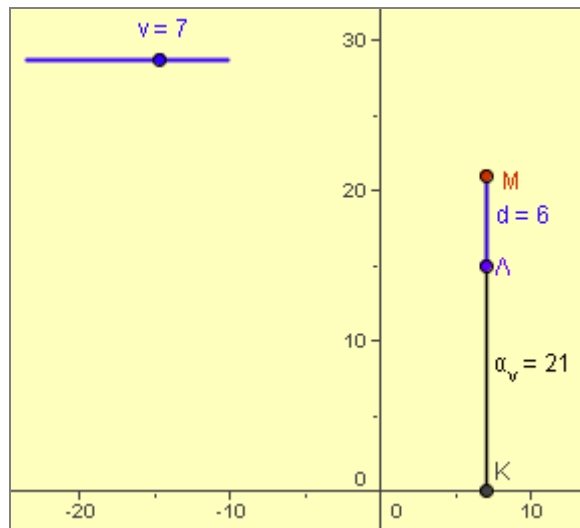
Τάξη: Β'

Όνομ/νυμο μαθητών:

- 1) .....
- 2) .....
- .....

## Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη εμφανίζονται ένας μεταβολέας  $v$  και ένα ευθύγραμμο τμήμα  $KM = a_v$  το οποίο μεταβάλλεται καθώς μεταβάλλονται οι τιμές του  $v$ . Ακόμη εμφανίζεται το τμήμα  $LM = d$ .



Να μεταβάλλετε τις τιμές του μεταβολέα  $v$ . Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

### ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1. Να καταγράψετε τις τιμές του τμήματος  $a_v$  για τις διάφορες τιμές του  $v$ . Υπάρχει κάποιος κανόνας με τον οποίο προκύπτουν οι τιμές αυτές;

2. Να καταγράψετε τις τιμές του τμήματος  $d$ . Υπάρχει κάποιος κανόνας που δημιουργούνται; Ποια σχέση έχουν οι τιμές του  $d$  με τις τιμές του  $a_v$ ;

3. Να εμφανίσετε το ίχνος του σημείου M. Να μεταβάλετε τις τιμές του  $v$ . Τι παρατηρείτε για τα σημεία που δημιουργούνται;

4. Ποια μορφή καμπύλης θα μπορούσε να δημιουργηθεί αν το σημείο κινηθεί σε συνεχή γραμμή;

Ας επιχειρήσουμε τώρα να εντοπίσουμε τον τύπο που δίνει τον τυχαίο όρο  $a_n$  της ακολουθίας που δημιουργούν οι τιμές του  $a$ .

5. Να εμφανίσετε τους τρεις μεταβολείς  $a$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  και την συνάρτηση  $f$ . Να κατασκευάσετε μία παραμετρική συνάρτηση επαναπροσδιορίζοντας την  $f$  και να προσαρμόσετε την γραφική της παράσταση πάνω στο ίχνος του σημείου M

6. Να συμπληρώσετε την τελική γραμμή με βάση τις προηγούμενες.

$$a_1=1$$

$$a_2=a_1+2$$

$$a_3=a_2+3$$

$$a_4=a_3+4$$

.....

.....

$$a_n=$$

7. Να προσθέσετε κατά μέλη τις ισότητες. Να υπολογίσετε τον όρο  $a_n$  σαν συνάρτηση του αριθμού  $n$ . Να συγκρίνετε τον τύπο που σας προέκυψε με την απάντηση που έχετε δώσει στην ερώτηση 5.

## ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

Τάξη: Β'

Όνομ/νυμο μαθητών:

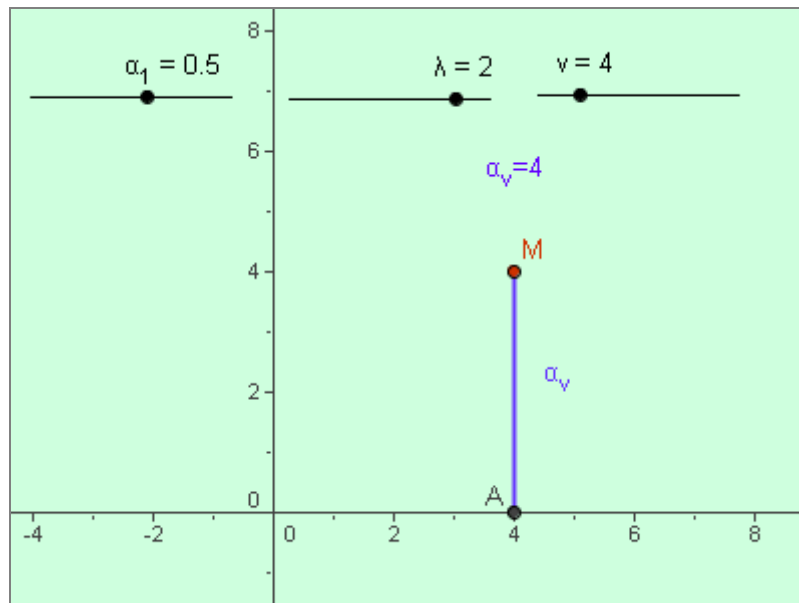
1) .....

2) .....

.....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη εμφανίζονται 3 μεταβολείς  $\alpha_1$ ,  $\lambda$  και  $v$  καθώς και ένα ευθύγραμμο τμήμα  $AM$  με γνωστό μήκος  $\alpha_v$ .



Να μεταβάλλετε τις τιμές του μεταβολέα  $v$ . Με βάση της μετρήσεις να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

1. Πως μεταβάλλεται το μήκος του τμήματος AM καθώς μεταβάλλονται οι τιμές του  $v$ ;

2. Ποια σχέση συνδέει την τιμή  $a_n$  του τμήματος με την  $a_{n-1}$  δηλαδή με την προηγούμενή της; Να εξηγήσετε με οποιονδήποτε τρόπο γιατί οι τιμές του τμήματος αποτελούν μία γεωμετρική πρόοδο.

3. Ποιος είναι ο  $10^{\text{ος}}$  όρος της προόδου; Να απαντήσετε στο ερώτημα αυτό με βάση τον τύπο που μας δίνει τον νιοστό όρο προόδου και να επιβεβαιώσετε το αποτέλεσμα.

4. Να μεταβάλλετε τις τιμές του  $\lambda$  (όταν  $v=1$ ). Για ποιες τιμές του  $\lambda$  το μήκος του τμήματος συνεχώς αυξάνει (ανεξάρτητα αν βρίσκετε πάνω ή κάτω από τον άξονα  $x'x$ ) καθώς αυξάνονται οι τιμές του  $v$ ;

5. Για ποιες τιμές του  $\lambda$  το μήκος του τμήματος συνεχώς μειώνεται. Να συνοψίσετε τα συμπεράσματά σας.

<p><b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4</b></p> <p><b>ΕΚΘΕΤΙΚΗ-ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ</b></p>
---

## ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Τάξη: Β΄

Όνομ/νυμο μαθητών:

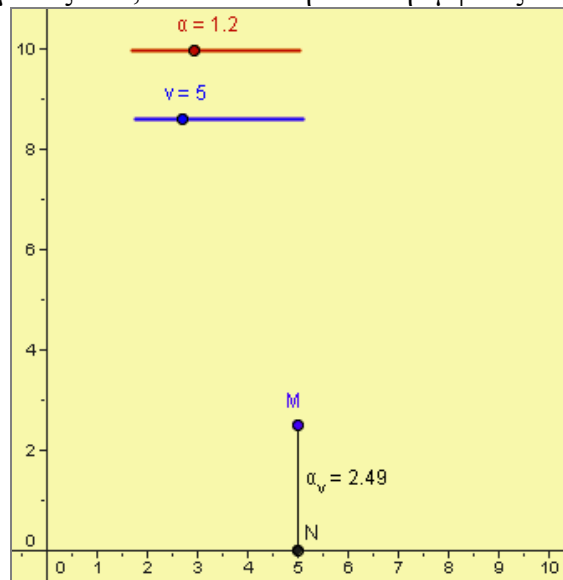
3) .....

4) .....

.....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη εμφανίζονται δύο μεταβολείς  $\alpha$ ,  $\nu$ . Οι μεταβολείς μεταβάλλουν την θέση και το ύψος του τμήματος  $NM$ , το οποίο στην οθόνη εμφανίζεται και ως  $\alpha_\nu$ .



Να μεταβάλλετε το τμήμα αλλάζοντας τις τιμές του  $\nu$ . Με βάση της μετρήσεις να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

#### ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

- 1) Να αποδείξετε ότι μήκη του τμήματος  $\alpha_\nu$  δημιουργούν γεωμετρική πρόοδο. Ποια είναι τα στοιχεία της προόδου και πως σχετίζονται με τους μεταβολείς;

- 2) Να δημιουργήσετε το ίχνος του σημείου  $M$ . Να μεταβάλλετε τις τιμές του  $\nu$ . Με ποιον τρόπο διατάσσονται τα ίχνη του σημείου  $M$ ;

- 3) Να αλλάξετε το βήμα στον μεταβολέα  $v$  από 1 σε 0.5. Να μεταβάλετε τις τιμές του  $v$ . Να αποδείξετε ότι και πάλι οι τιμές του  $a_n$  αποτελούν όρους γεωμετρικής προόδου.

- 4) Τι παρατηρείτε για τα ίχνη του σημείου  $M$ . Τι σχέση έχουν τα νέα ίχνη με τα προηγούμενα;

- 5) Να πειραματιστείτε αλλάζοντας το βήμα του μεταβολέα  $v$  αλλά και τις τιμές του  $a$ . Τι θα συμβεί με τα ίχνη του σημείου  $M$  όταν το βήμα είναι πολύ μικρό π.χ 0,01;

- 6) Ποια συνάρτηση θα μπορούσε να έχει μία γραφική παράσταση που να περιέχει όλα τα ίχνη του σημείου  $M$ , για οποιαδήποτε τιμή του βήματος;

- 7) Να επαναπροσδιορίσετε την συνάρτηση που βρίσκεται στα ελεύθερα αντικείμενα ώστε να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης που έχετε εντοπίσει στο προηγούμενο ερώτημα. Τι παρατηρείτε;

## ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Τάξη: Β'

Όνομ/νυμο μαθητών:

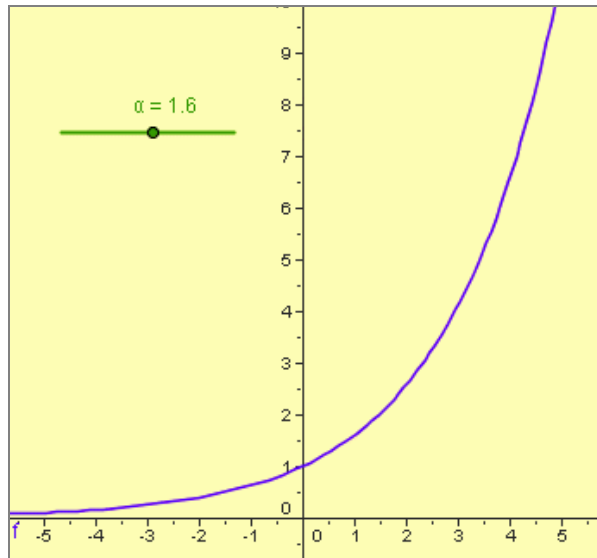
1) .....

2) .....

.....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης και ο μεταβολέας  $\alpha$ .





**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

1) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης.

2) Να μεταβάλλετε τις τιμές του  $a$ . Να χαρακτηρίσετε την μονοτονία της συνάρτησης ανάλογα με τις τιμές του  $a$ . Πότε η συνάρτηση είναι αύξουσα και πότε φθίνουσα;

3) Να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $h(x)=-a^{-x}$ . Να μελετήσετε τα χαρακτηριστικά της συνάρτησης καθώς μεταβάλλεται το  $a$ .

4) Να λύσετε την εξίσωση  $(1,7)^x=x+2$  να δώσετε τις λύσεις με προσέγγιση εκατοστού.

## ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΣ ΘΕΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Τάξη: Β΄

Όνομ/νυμο μαθητών:

5. ....

6. ....

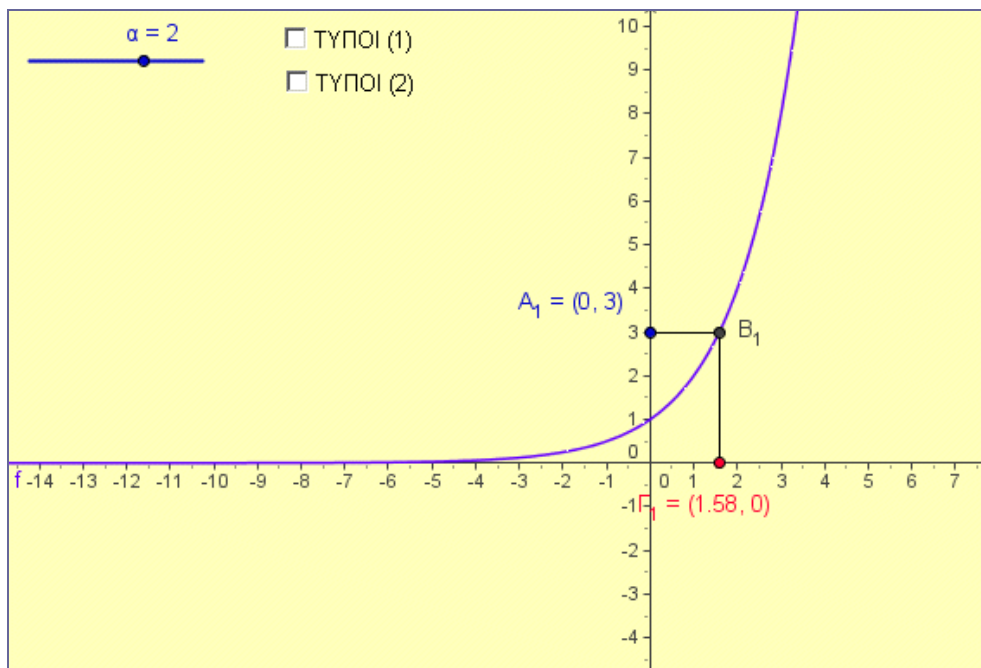
.....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη εμφανίζεται ένας μεταβολέας  $a$  και η γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης με βάση το  $a$ .

Πάνω στην γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης υπάρχει το σημείο  $B_1$  του οποίου η θέση μπορεί να μεταβάλλεται αν σύρουμε το σημείο  $A_1$ , δηλαδή όταν στην ουσία αλλάζουμε την τεταγμένη του  $B_1$ . Επιπλέον μπορούμε να παρατηρούμε την τετμημένη του  $B_1$ .

Τέλος υπάρχουν δύο κουμπιά με τα οποία μπορούμε να αποκρύπτουμε ή να εμφανίζουμε διάφορες ιδιότητες.



Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

Φανταστείτε ότι θέλουμε να λύσουμε μία εξίσωση της μορφής  $2^x=10$ . Εδώ χρειαζόμαστε από τη μία κάποια εργαλεία υπολογισμών και από την άλλη νέες μαθηματικές έννοιες. Αυτά ακριβώς τα εργαλεία και τις έννοιες θα μελετήσουμε με την συγκεκριμένη δραστηριότητα.

- 1) Να κινήσετε το σημείο  $A_1$  πάνω στον άξονα  $\psi'\psi$  μέχρι το σημείο με τεταγμένη 10. Ποια είναι η λύση της εξίσωσης  $2^x=10$ ; Να λύσετε τις εξισώσεις  $2,7^x=10$  και  $3^x=0,5$

- 2) Με το κουμπί ΤΥΠΟΙ (1) να εμφανίσετε τις δύο ισότητες. Να σύρετε το σημείο  $A_1$  πάνω στον άξονα  $\psi'\psi$ . Να παρατηρήσετε την τετμημένη του σημείου  $B_1$ . Αν την τετμημένη αυτή την ονομάσουμε λογάριθμο της τεταγμένης του  $B_1$  με βάση τον αριθμό  $a$ , να υπολογίσετε τους λογάριθμους  $\log_2 10$ ,  $\log_2 1$ ,  $\log_2 0,5$ .

- 3) Να διερευνήσετε με την βοήθεια του σημείου  $A_1$  πότε ο λογάριθμος ενός αριθμού με βάση το  $a$  είναι θετικός, πότε 0, και πότε αρνητικός.

- 4) Με το κουμπί ΤΥΠΟΙ (2) να εμφανίσετε δύο επιπλέον σημεία τα  $A_2$  και  $A_3$  μαζί με τα αντίστοιχα σημεία πάνω στην γραφική παράσταση και τον άξονα  $\chi'\chi$ . Θέλουμε τώρα να εξετάσουμε τις ιδιότητες αυτής της νέας έννοιας του λογάριθμου. Να υπολογίσετε με την βοήθεια των σημείων  $A_1$ ,  $A_2$  και  $A_3$  τους λογάριθμους των αριθμών 3, 5 και 15 αντίστοιχα. Τι παρατηρείτε; Να επαναλάβετε για τους αριθμούς 4, 5 και 20. Να διατυπώσετε έναν κανόνα που φαίνεται να ισχύει για τον λογάριθμο του γινομένου δύο αριθμών.

## ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΗΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Τάξη: Β'

Όνομ/νυμο μαθητών:

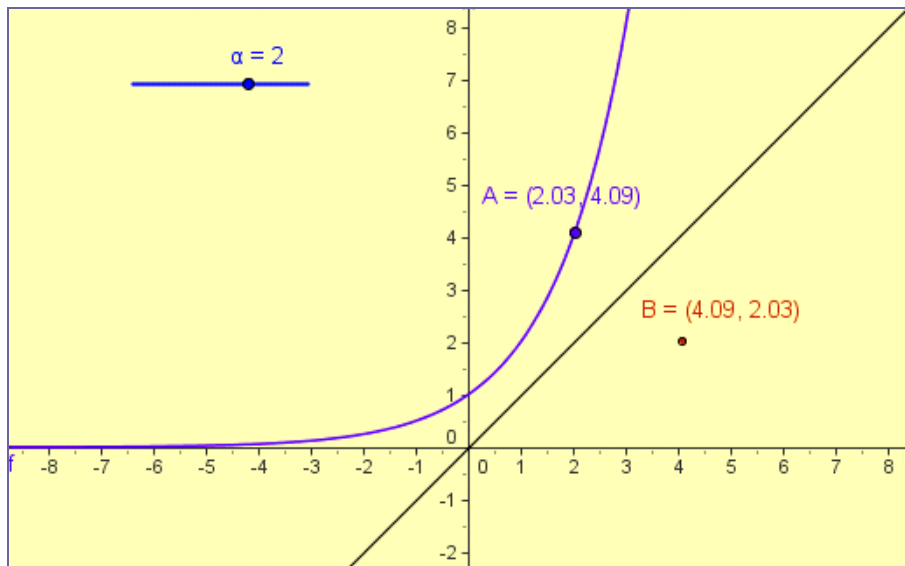
7. ....

8. ....

.....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη εμφανίζεται ένας μεταβολέας  $a$ , η γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης με βάση το  $a$  και η ευθεία  $y=x$ . Πάνω στην γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης υπάρχει το σημείο  $A$  ενώ συγχρόνως εμφανίζεται και το σημείο  $B$ .



Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

1. Να κινήσετε το σημείο A πάνω στην γραφική παράσταση της συνάρτησης. Ποια είναι η γεωμετρική σχέση του σημείου B ως προς το σημείο A;

2. Ποια είναι η σχέση των συντεταγμένων των δύο σημείων;

3. Να δημιουργήσετε το ίχνος του σημείου B. Η συνάρτηση που έχει γραφική παράσταση την καμπύλη που δημιούργησαν τα ίχνη θα ονομάζεται αντίστροφη της εκθετικής. Να παρατηρήσετε ότι η συνάρτησης αυτή αντιστοιχεί σε κάθε αριθμό  $x$  τον εκθέτη της δύναμης, με βάση τον αριθμό  $a$ , η οποία δύναμη είναι ίση με  $x$ , δηλαδή τον λογάριθμο του  $x$  με βάση το  $a$ . Η συνάρτηση αυτή είναι φυσικό να ονομάζεται λογαριθμική. Να κατασκευάσετε με την βοήθεια του ίχνους του σημείου B, την γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής για τις διάφορες τιμές του  $a$ .

4. Να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης για τις διάφορες τιμές του  $a$ .

## ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Τάξη: Β'

Όνομ/νυμο μαθητών:

1) .....

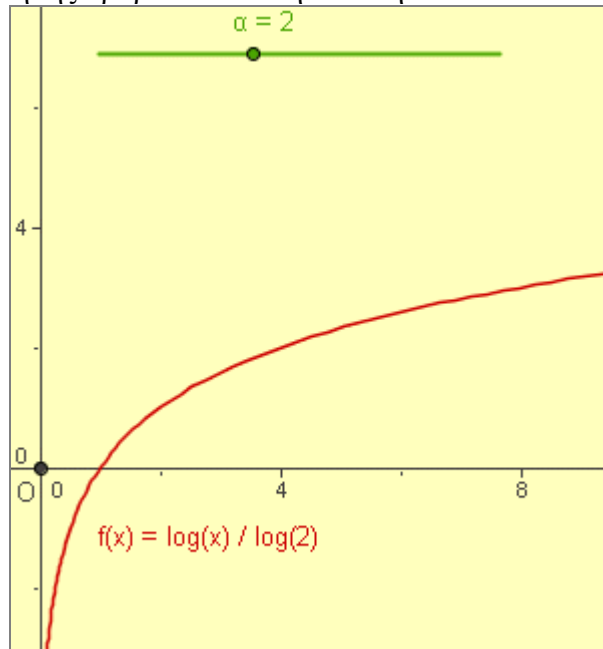
2) .....

.....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη εμφανίζονται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης και ένας μεταβολέας

Ο τύπος της συνάρτησης προβάλλεται στην οθόνη.



Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

- 1) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης κάνοντας χρήση ενός μόνο λογαρίθμου.

- 2) Να μεταβάλετε την τιμή του  $a$ . Πότε η συνάρτηση είναι αύξουσα και πότε φθίνουσα. Ποια είναι η σχέση της γραφικής παράστασης με τον άξονα  $\psi/\psi$ ;

- 3) Να εμφανίσετε την γραφική παράσταση της βοηθητικής συνάρτησης  $g(x)$  και τα σημεία  $A, B$ . Να λύσετε την εξίσωση  $\log_2 x = 2x - 3$  και στην συνέχεια την ανίσωση  $\log_2 x > 2x - 3$ .

- 4) Να εξετάσετε αν υπάρχουν αριθμοί των οποίων ο λογάριθμος συμπίπτει με τον ίδιο τον αριθμό.

## ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

Τάξη: Β'

Όνομ/νυμο μαθητών:

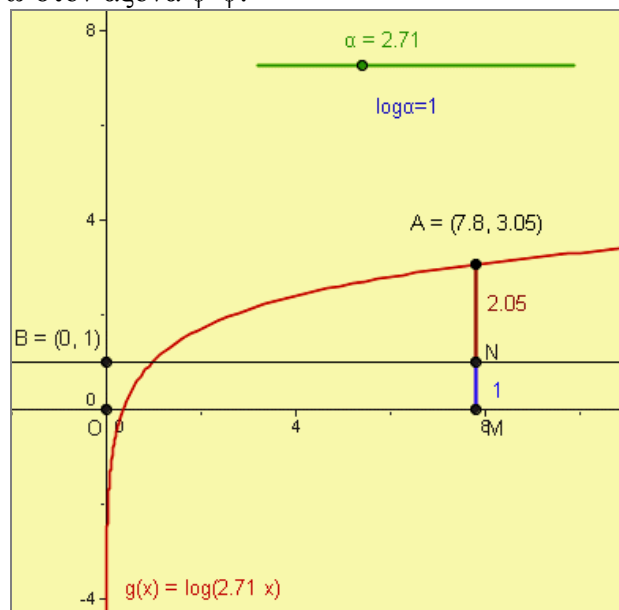
1) .....

2) .....

.....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη εμφανίζονται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης και ένας μεταβολέας. Ακόμη εμφανίζεται η τιμή του λογαρίθμου της παραμέτρου  $a$ . Ένα σημείο  $A$  κινείται πάνω στην γραφική παράσταση και συγχρόνως κινείται και το κάθετο τμήμα από το  $A$  προς τον άξονα  $x$ . Τέλος υπάρχει μία ευθεία παράλληλη προς τον  $x$  η οποία περνά από το σημείο  $B$  που βρίσκεται πάνω στον άξονα  $y$ .



Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.



**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

- 1) Να μεταβάλετε τις τιμές της μεταβλητής  $a$  και να παρατηρήσετε την συμπεριφορά της γραφικής παράστασης και των τιμών των διαφόρων τμημάτων.

- 2) Ποιος είναι ο γενικός τύπος της συνάρτησης  $g$ ; Ποια είναι η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο  $B$ ;

- 3) Με την βοήθεια του μεταβολέα να δημιουργήσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x)=\log x$ . Να αυξήσετε σταδιακά τις τιμές του  $a$ . Πως μεταβάλλονται οι συντεταγμένες του σημείου  $A$ ;

- 4) Κατά πόσο αυξάνεται η τεταγμένη του  $A$  όταν το  $a$  πάρει την τιμή 1,6 κατά πόσο όταν πάρει την τιμή 2 και κατά πόσο όταν πάρει την τιμή 2,71;

- 5) Ποια γνωστή ιδιότητα των λογαρίθμων υλοποιείται με την κατασκευή αυτή;

- 6) Πως θα μπορούσαμε να υλοποιήσουμε και άλλες ιδιότητες;



# ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ (ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ)

## Η ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΑ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Τάξη: Β'

Όνομ/νυμο μαθητών:

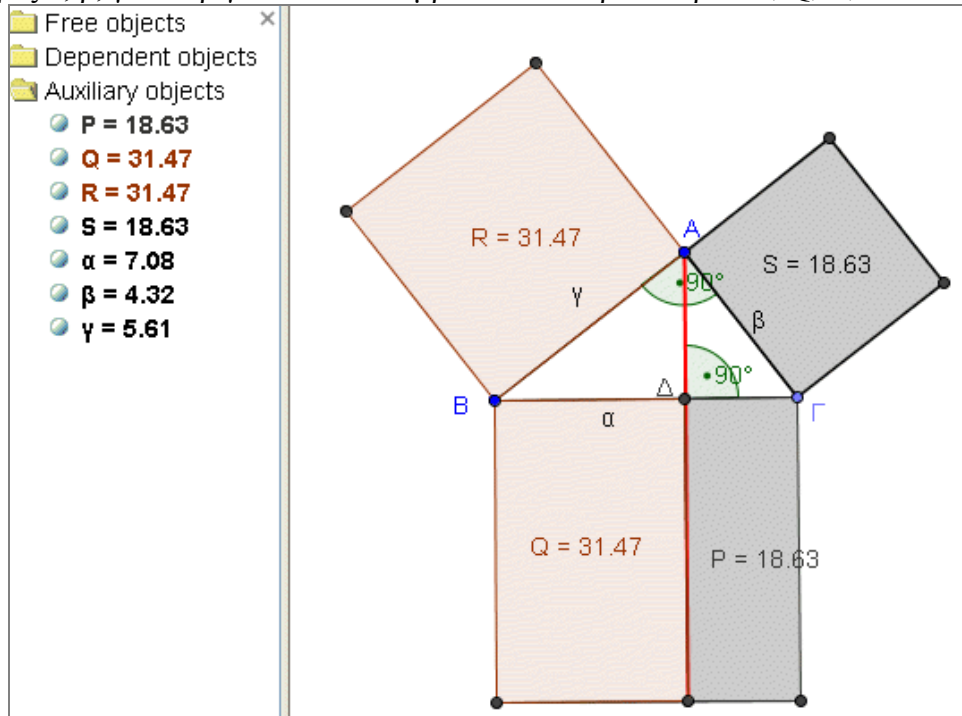
1) .....

2) .....

.....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλονται ένα τρίγωνο και τρία τετράγωνα που έχουν βάσεις τις πλευρές του. Επιπλέον προβάλλονται οι μετρήσεις διαφόρων μεγεθών όπως οι πλευρές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  του τριγώνου και τα εμβαδά των τετραπλεύρων P, Q, R, S.



Να μεταβάλλετε το σχήμα σύροντας τα σημεία Α, Β, Γ. Με βάση τις μετρήσεις να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

### ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1. Τι τρίγωνο είναι το ΑΒΓ;

2. Ποια είναι η σχέση του τμήματος  $A\Delta$  με το τρίγωνο  $AB\Gamma$ ;

3. Υπάρχουν σταθερές σχέσεις μεταξύ των μεταβαλλόμενων εμβαδών των τετραπλεύρων  $P, Q, R, S$ ;

4. Ποια σχέση συνδέει τα εμβαδά των τριών τετραγώνων;

5. Ποια σχέση συνδέει τις πλευρές του τριγώνου  $AB\Gamma$  ;

Μέχρι τώρα στηριχτήκαμε μόνο στις μετρήσεις για να βγάλουμε συμπεράσματα για τα ποσά που μεταβάλλονται. Θα προσπαθήσουμε τώρα να κάνουμε μία περισσότερο αυστηρή απόδειξη.

6. Να εκφράσετε τα συμπεράσματα του ερωτήματος 3 χρησιμοποιώντας τα τμήματα  $AB, A\Gamma, \Delta B, \Delta\Gamma$ .

7. Να δικαιολογήσετε τα συμπεράσματα αυτά συγκρίνοντας τα τρίγωνα  $AB\Gamma, AB\Delta, A\Delta\Gamma$ .

## Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΠΟΥ ΑΠΟΔΙΔΕΤΑΙ ΣΤΟΥΣ ΚΙΝΕΖΟΥΣ

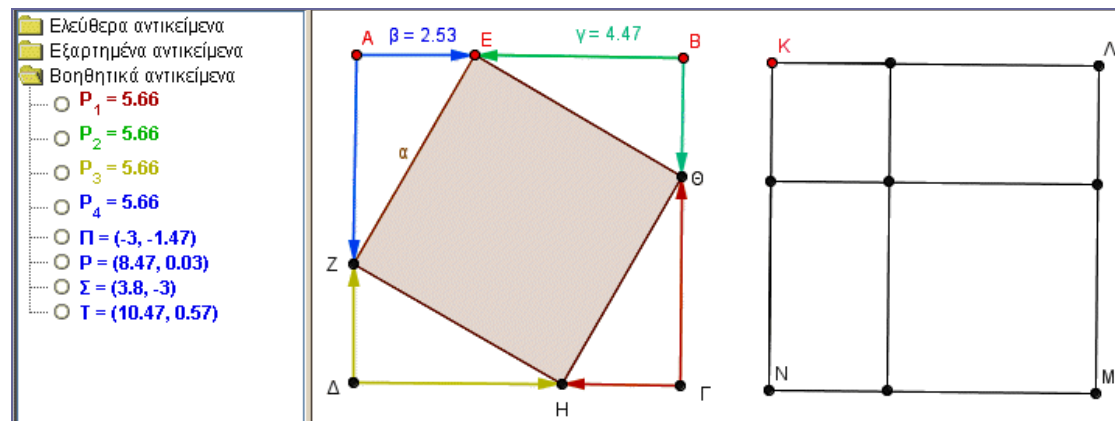
Τάξη: Β'

Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
  2. ....
- .....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη εμφανίζονται δύο ίσα τετράγωνα. Σε ένα από αυτά είναι εγγεγραμμένο ένα δεύτερο τετράγωνο πλευράς  $\alpha$  το οποίο μπορεί να μεταβάλλεται από την κορυφή E. Το δεύτερο τετράγωνο διαιρείται σε τέσσερα μέρη από δύο κάθετα τμήματα.



Να μεταβάλλετε το τετράγωνο EZHΘ σύροντας το σημείο E. Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

1. Να εμφανίσετε όλα τα βοηθητικά αντικείμενα. Να τα σύρετε από τις κορυφές τους και να τα τοποθετήσετε στα αντίστοιχα τρίγωνα του τετραγώνου ΑΒΓΔ ώστε να καλύψουν τον χώρο που μένει ελεύθερος γύρω από το τετράγωνο ΕΖΗΘ. Να σύρετε το σημείο Ε. Τι παρατηρείτε;

2. Να μεταφέρετε τώρα τα τρίγωνα αυτά μέσα στα ορθογώνια παραλληλόγραμμα του τετραγώνου ΚΛΜΝ ώστε να καλυφθούν πλήρως.

3. Να εξηγήσετε γιατί τα δύο άλλα τετράπλευρα που καλύπτουν το τετράγωνο ΚΛΜΝ είναι και αυτά τετράγωνα.

4. Ποια σχέση συνδέει τα εμβαδά των δύο αυτών τετραγώνων με το τετράγωνο που έχει πλευρά  $a$ ;

5. Να εκφράσετε την σχέση αυτή με την βοήθεια των τμημάτων  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

6. Να επιβεβαιώσετε αριθμητικά τις σχέσεις που έχετε εντοπίσει. Στην ουσία έχετε αποδείξει το Πυθαγόρειο θεώρημα με μία μέθοδο που θα μπορούσαμε να αποκαλέσουμε αποκοπή εμβადών και επικόλληση. Σε τι διαφέρει κατά την γνώμη σας η απόδειξη αυτή από την Πυθαγόρεια και σε τι είναι όμοια;

## ΜΙΑ ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ

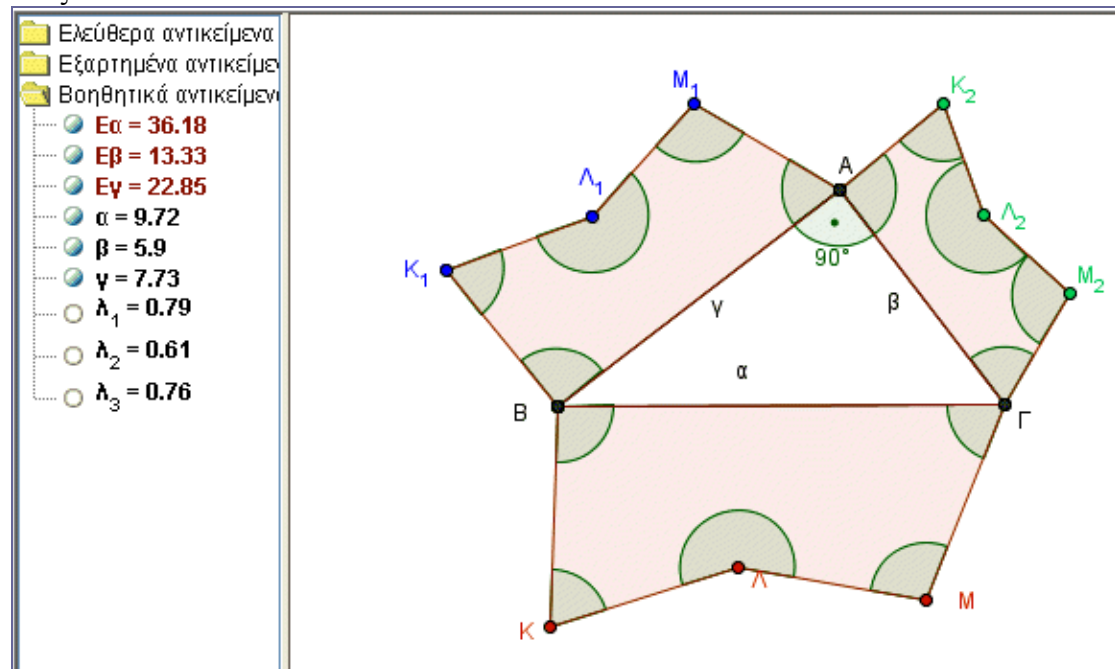
Τάξη: Β'

Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
  2. ....
- .....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη εμφανίζεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$ .  
 Γύρω από το ορθογώνιο υπάρχουν τρία πολύγωνα, ένα για κάθε πλευρά.  
 Οι γωνίες των πολύγνων έχουν κατασκευαστεί αλλά δεν εμφανίζονται οι μετρήσεις τους.



Να μεταβάλλετε το σχήμα σύροντας τα σημεία  $K_1, \Lambda_1, M_1$ . Με βάση της μετρήσεις να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.



**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

1. Να ελέγξετε με την βοήθεια των μετρήσεων την σχέση που συνδέει τα τρία πολύγωνα.

2. Ποια σχέση φαίνεται να συνδέει τα εμβαδά των τριών πολυγώνων;

3. Να διατυπώσετε μία πρόταση με βάση την απάντηση που δώσατε στο ερώτημα 1.

4. Πως σχετίζεται το Πυθαγόρειο θεώρημα με την προηγούμενη πρόταση;



**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6**

**ΕΜΒΑΔΑ**

## ΤΡΙΓΩΝΑ ΣΕ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ

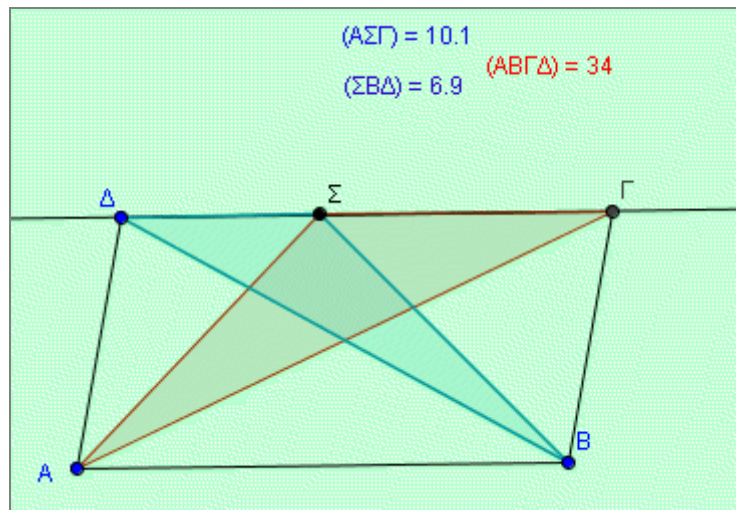
Τάξη: Β'

Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
  2. ....
- .....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλονται ένα παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ , ένα σημείο  $\Sigma$  πάνω στην ευθεία της πλευράς  $\Delta\Gamma$ , οι μετρήσεις των εμβαδών των τριγώνων  $A\Sigma\Gamma$  και  $\Sigma B\Delta$  καθώς και το εμβαδόν του παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$



Να μετακινήσετε το σημείο  $\Sigma$  και να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

- 1) Ποια σχέση φαίνεται να συνδέει τα εμβαδά των  $\Lambda\Sigma\Gamma$  και  $\Sigma\text{Β}\Delta$  με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου όταν το  $\Sigma$  βρίσκεται μεταξύ των  $\Delta$  και  $\Gamma$  ;

- 2) Να σύρετε το  $\Sigma$  στις ακραίες θέσεις  $\Delta$  και  $\Gamma$  . Να επιβεβαιώσετε ή να απορρίψετε το προηγούμενο συμπέρασμα.

- 3) Να αποδείξετε με αυστηρά μαθηματικό τρόπο το συμπέρασμα το οποίο τυχόν έχετε διατυπώσει στις προηγούμενες ερωτήσεις.

- 4) Να μεταφέρετε το  $\Sigma$  έξω από το τμήμα  $\Delta\Gamma$  και προ το μέρος του  $\Delta$ . Πως μετασχηματίζεται η σχέση που είχατε εντοπίσει προηγουμένως;

- 5) Να μεταφέρετε το  $\Sigma$  έξω από το τμήμα  $\Delta\Gamma$  και προ το μέρος του  $\Gamma$ . Πως μετασχηματίζεται η σχέση που είχατε εντοπίσει προηγουμένως;

**ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ**

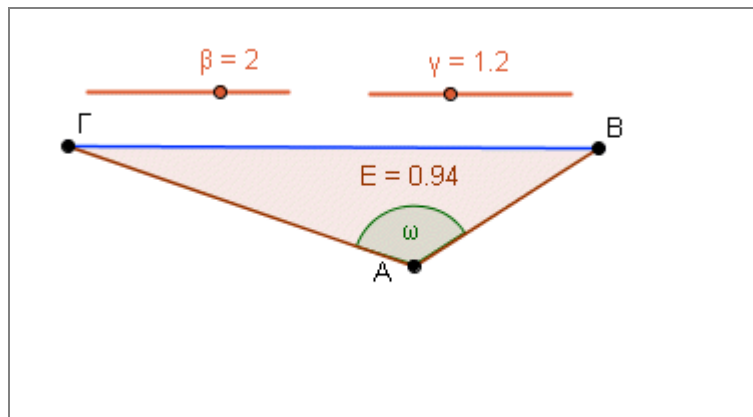
Τάξη: Β'

Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
2. ....

**Φύλλο εργασίας**

Στην οθόνη προβάλλεται ένα δυναμικό τρίγωνο  $AB\Gamma$  το οποίο μπορείτε να μεταβάλλετε με δύο τρόπους.  
Οι μεταβολές  $\beta$ ,  $\gamma$  μεταβάλλουν τα μήκη των πλευρών  $A\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα, ενώ σύροντας το σημείο  $B$  μεταβάλλεται μόνο η γωνία  $\omega$  της κορυφής  $A$ .  
Ακόμη προβάλλεται η μέτρηση της γωνίας  $\omega$  του τριγώνου και ένα ελεύθερο σημείο  $M$ .



Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

- 1) Να σύρετε το σημείο Γ. Ποια μεγέθη παραμένουν σταθερά και ποια μεταβάλλονται;

- 2) Να μελετήσετε τον τρόπο που μεταβάλλεται το εμβαδόν σε σχέση με την γωνία. Πότε το εμβαδόν γίνεται μέγιστο και πότε ελάχιστο;

- 3) Να μελετήσετε την σχέση της γωνίας με τον εμβαδόν επαναπροσδιορίζοντας το σημείο Μ σε  $M=(\omega, E)$  και εμφανίζοντας το ίχνος του σημείου. Με βάση την καμπύλη που δημιουργείται ποια θα μπορούσε να είναι η σχέση γωνίας εμβαδού;

- 4) Να μεταβάλλετε τα μήκη των πλευρών β, γ και να επαναλάβετε την προηγούμενη διαδικασία. Να διατυπώσετε έναν κανόνα.

- 5) Να αποδείξετε το συμπέρασμα στο οποίο φτάσατε από τα προηγούμενα ερωτήματα.

## ΣΧΕΣΗ ΕΜΒΑΔΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

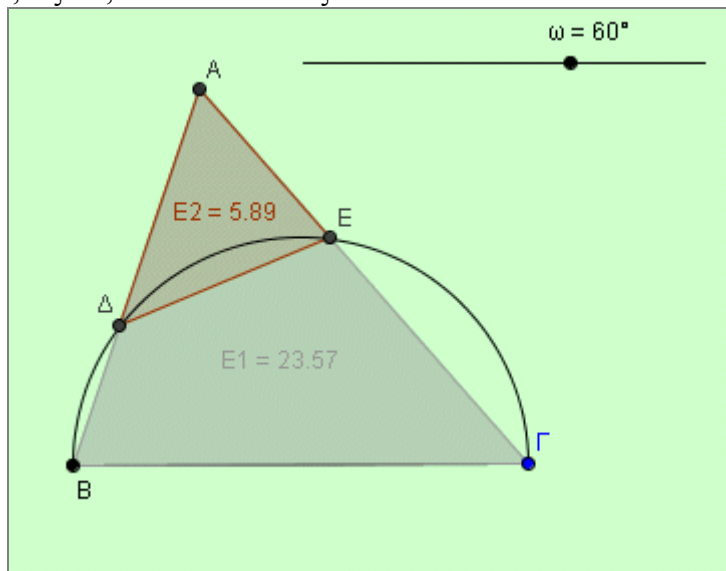
Τάξη: Β'

Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
2. ....

### ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στην οθόνη προβάλλεται ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  του οποίου η γωνία  $A$  μεταβάλλεται από τον μεταβολέα  $\omega$ , δηλαδή  $A=\omega$ . Ένα ημικύκλιο με βάση το  $B\Gamma$  κόβει τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $\Delta$  και  $E$ . Επιπλέον προβάλλονται οι μετρήσεις των εμβαδών των τριγώνων  $AB\Gamma$ , ως  $E1$ , και του  $A\Delta E$  ως  $E2$



Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.



**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

- 1) Να μετακινήσετε την κορυφή Α. Να μελετήσετε τις τιμές που παίρνει το εμβαδόν ΑΒΓ και το εμβαδόν ΑΔΕ. Να καταγράψετε μερικά ζεύγη τιμών. Υπάρχει κάποια σχέση που φαίνεται να συνδέει τα δύο εμβαδά;

- 2) Να μελετήσετε την σχέση των δύο εμβαδών κατασκευάζοντας ένα σημείο  $M=(E1, E2)$  και δημιουργώντας το ίχνος του. Ποια σχέση φαίνεται να συνδέει τα δύο εμβαδά;

- 3) Να αποδείξετε την σχέση αυτή με αυστηρά μαθηματικό τρόπο.

- 4) Να μεταβάλλετε την γωνία  $\omega$  και να επαναλάβετε την διερεύνηση. Να διατυπώσετε έναν κανόνα.

## ΕΜΒΑΔΑ ΟΜΟΙΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

Τάξη: Β΄

Όνομ/νυμο μαθητών:

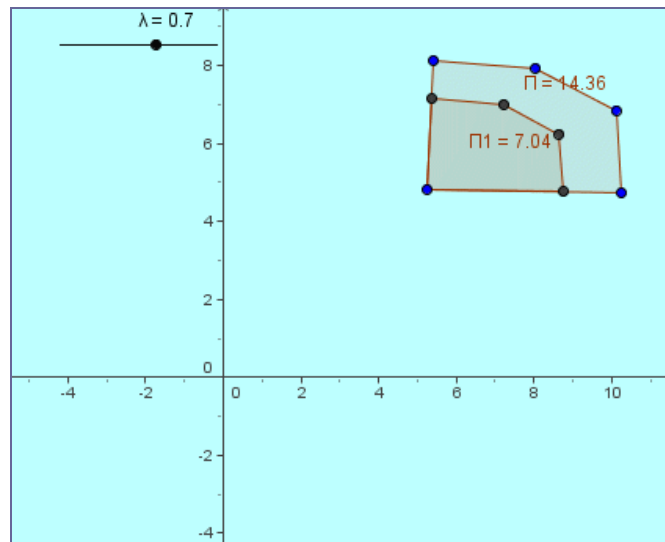
9. ....

10. ....

.....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλονται δύο πολύγωνα και οι μετρήσεις των εμβαδών τους  $\Pi$  και  $\Pi_1$ . Ο μεταβολέας  $\lambda$  μεταβάλλει το μέγεθος ενός μόνο εξ αυτών.



Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

- 1) Να μεταβάλλετε τις τιμές του  $\lambda$ . Ποια σχέση φαίνεται να συνδέει τα δύο πολύγωνα; Να σύρετε μια κορυφή του πολυγώνου  $\Pi$ . Τι παρατηρείτε;

- 2) Θα διερευνήσουμε τώρα την σχέση των εμβαδών των δύο πολυγώνων. Να κατασκευάσετε το σημείο  $M$  σε  $M=(\Pi, \Pi 1)$  και να προβάλλετε το ίχνος του. Να μεταβάλλετε τις τιμές του εμβαδού του πολυγώνου  $\Pi$  σύροντας μία κορυφή του. Με βάση την γραμμή του ίχνους, ποια σχέση θα μπορούσε να συνδέει τα δύο εμβαδά;

- 3) Να κατασκευάσετε το σημείο  $K$  σε  $K=(\lambda, \Pi 1)$  και να εμφανίσετε το ίχνος του. Να αλλάξετε τις τιμές του  $\lambda$  σύροντας το σημείο. Ποια σχέση φαίνεται να συνδέει τις τιμές του  $\lambda$  με τις τιμές του  $\Pi 1$ ;

- 4) Με βάση τις απαντήσεις σας στα προηγούμενα να διατυπώσετε μία πρόταση για τα εμβαδά δύο ομοίων πολυγώνων.



<p><b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7</b></p> <p><b>ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ</b></p>
--

## ΤΟΞΟ-ΧΟΡΔΗ

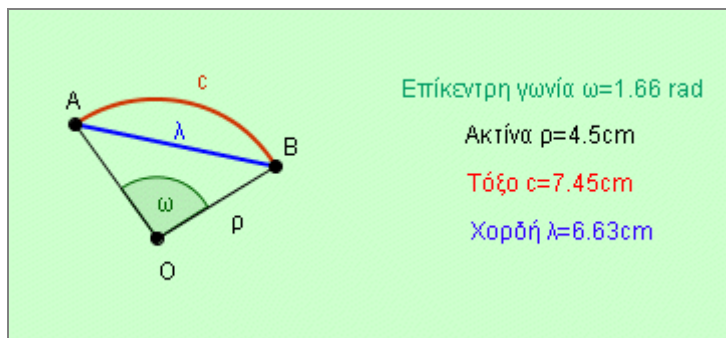
Τάξη: Β'

Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
2. ....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλεται ένας κυκλικός τομέας  $OAB$  ο οποίος μεταβάλλεται από το σημείο  $B$  ενώ εμφανίζονται οι μετρήσεις του τόξου  $c$ , της επίκεντρης γωνίας  $\omega$ , της ακτίνας  $\rho$  και της χορδής  $\lambda$ . Επιπλέον εμφανίζονται και δύο βοηθητικά αντικείμενα, ένα σημείο  $M$  και μία συνάρτηση  $f(x)=x$ , που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε στην συνέχεια.



Να μεταβάλλετε το σχήμα σύροντας τα σημεία  $A, B, \Gamma$ . Με βάση της μετρήσεις να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

### ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1. Πως μεταβάλλεται το μήκος του τόξου  $c$  καθώς μεταβάλλεται η γωνία  $\omega$ ;

2. Πως μεταβάλλεται το μήκος της χορδής  $\lambda$  καθώς μεταβάλλεται η γωνία  $\omega$ ;

3. Πως μεταβάλλεται η χορδή  $l$  και το τόξο  $c$  καθώς μεταβάλλεται η ακτίνα;

4. Να χρησιμοποιήσετε το σημείο  $M$ , να το επαναπροσδιορίσετε ως  $M=(c, l)$  και να εμφανίσετε το ίχνος του. Να μεταβάλλεται το τόξο  $c$ .
5. Ποια σχέση μπορεί να συνδέει το μήκος του τόξου  $c$  με το μήκος της χορδής  $l$ ;

Μέχρι τώρα στηριχτήκαμε μόνο στις μετρήσεις για να βγάλουμε συμπεράσματα για τα ποσά που μεταβάλλονται. Θα προσπαθήσουμε τώρα να κάνουμε μία περισσότερο αυστηρή απόδειξη.

6. Να γράψετε την σχέση που συνδέει την επίκεντρη γωνία  $\omega$  και την ακτίνα  $\rho$  με το μήκος του τόξου  $c$ . Να λάβετε υπ όψιν ότι η γωνία  $\omega$  μετράται σε ακτίνια.

7. Να βρείτε με την βοήθεια της τριγωνομετρίας μία σχέση που συνδέει την χορδή  $l$  με την γωνία  $\omega$  και την ακτίνα  $\rho$ . Να συνδυάσετε τα αποτελέσματα των δύο ερωτήσεων για να δημιουργήσετε μία σχέση που να συνδέει το  $l$  με την  $\omega$  και το  $c$ .

8. Να κάνετε την γραφική παράσταση της σχέσης αυτής, επαναπροσδιορίζοντας την συνάρτηση  $f(x)=x$ . Τι παρατηρείτε;

## ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

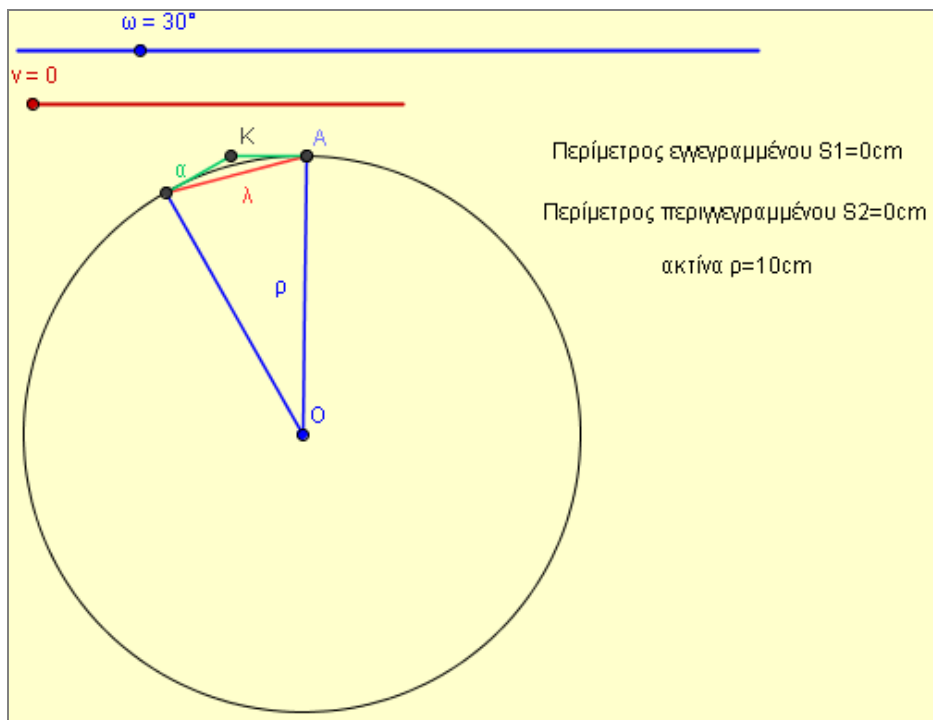
Τάξη: Β'

Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
2. ....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλονται δύο μεταβολείς,  $\omega$  και  $v$ , ένας κύκλος ακτίνας  $\rho$ , μία επίκεντρη γωνία  $\omega$ , την χορδή  $\lambda$  και τα τμήματα  $AK$  και  $KB$  που εφάπτονται στον κύκλο στα άκρα της χορδής. Ακόμη προβάλλονται οι μετρήσεις  $S1, S2$  που μας δείχνουν την περίμετρο των πολυγώνων που δημιουργούνται καθώς περιστρέφεται η χορδή.



Να μεταβάλλετε τις τιμές του μεταβολέα  $v$ . Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

### ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:

1. Πόσες περιστροφές πρέπει να εκτελέσει η χορδή  $\lambda$  ώστε να επανέλθει στην αρχική της θέση; Ποιο κανονικό πολύγωνο μπορεί να κατασκευαστεί αν το  $\lambda$  αφήνει το ίχνος του;



2. Να αλλάξετε την τιμή της γωνίας  $\omega$ . Να διερευνήσετε για ποιες τιμές της γωνίας  $\omega$  κατασκευάζεται ισόπλευρο τρίγωνο, τετράγωνο, κανονικό εξάγωνο, πεντάγωνο.

3. Να βρείτε ένα τύπο για την γωνία  $\omega$  με τον οποίο μπορούμε εκ των προτέρων να γνωρίζουμε ποια γωνία θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να κατασκευάσουμε οποιοδήποτε νίγωνο.

4. Με γωνία  $\omega=60^\circ$  να εμφανίσετε τα ίχνη των τμημάτων  $\lambda$ ,  $KB$  και  $KA$ . Να παρατηρήσετε και καταγράψετε τις μετρήσεις  $S1$  και  $S2$ . Να επαναλάβετε για μικρότερες γωνίες, π.χ  $40^\circ$ ,  $30^\circ$ . Τι παρατηρείτε;

Μέχρι τώρα στηριχτήκαμε μόνο στις μετρήσεις για να βγάλουμε συμπεράσματα για τα ποσά που μεταβάλλονται. Θα προσπαθήσουμε τώρα να κάνουμε μία περισσότερο αυστηρή απόδειξη.

5. Ποια σχέση έχουν οι τιμές των  $S1$  και  $S2$  με την περίμετρο του κύκλου;

6. Να επαναλάβετε αλλάζοντας τις τιμές της ακτίνας  $\rho$ .

## ΔΙΑΚΟΣΜΗΤΙΚΑ ΜΟΤΙΒΑ

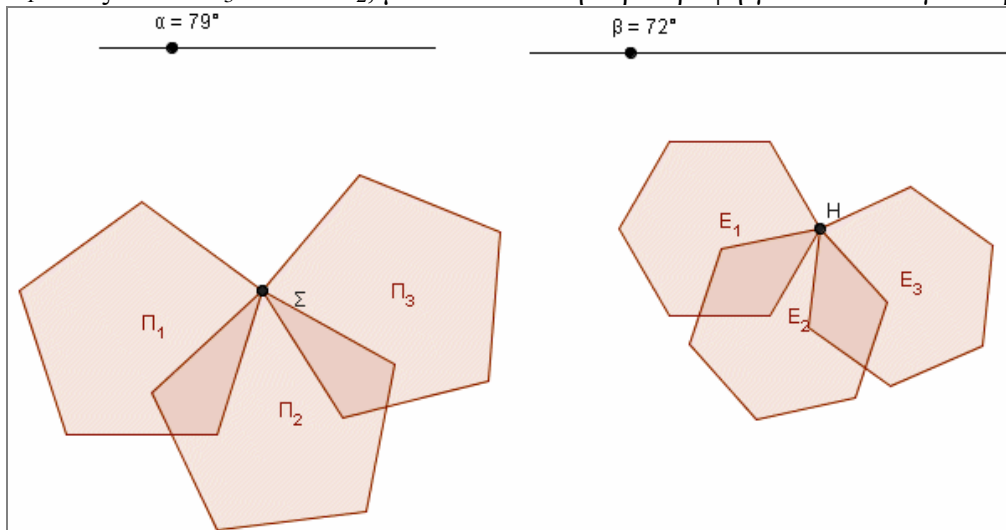
Τάξη: Β'

Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
2. ....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλονται δύο συνθέσεις κάθε μία από τις οποίες κατασκευάζεται από ένα κανονικό πολύγωνο και δύο μεταβολείς γωνιών  $\alpha$ ,  $\beta$ . Στην ουσία το  $\Pi_2$  προκύπτει από το  $\Pi_1$  με περιστροφή κατά γωνία  $\alpha$  γύρω από το σημείο  $\Sigma$ . Το  $\Pi_3$  προκύπτει από το  $\Pi_2$  με όμοια τρόπο. Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει και το  $E_2$  από το  $E_1$  όπως και το  $E_3$  από το  $E_2$ , μόνο που εδώ η περιστροφή γίνεται κατά γωνία  $\beta$ .



Να μεταβάλλετε τις τιμές του μεταβολέα  $\alpha$  και στη συνέχεια του μεταβολέα  $\beta$ . Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

1. Για ποια τιμή της γωνίας  $\alpha$  τα τρία πεντάγωνα γίνονται διαδοχικά. Δηλαδή δεν επικαλύπτει το ένα το άλλο.

2. Ποια σχέση έχει αυτή η τιμή της γωνίας με τα χαρακτηριστικά του κανονικού πολυγώνου;

3. Για ποια τιμή της γωνίας  $\beta$  τα τρία εξάγωνα γίνονται διαδοχικά. Δηλαδή δεν επικαλύπτει το ένα το άλλο.

4. Ποια σχέση έχει αυτή η τιμή της γωνίας με τα χαρακτηριστικά του κανονικού εξαγώνου;

5. Θέλουμε να καλύψουμε ένα δάπεδο με πλακίδια, σχήματος κανονικού πολυγώνου, του ίδιου είδους. Ποιο από τα δύο κανονικά πολύγωνα είναι το καταλληλότερο;

6. Υπάρχουν και άλλα κανονικά πολύγωνα που είναι κατάλληλα για την επικάλυψη αυτή;



# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

## ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

## ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ-ΚΑΘΕΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

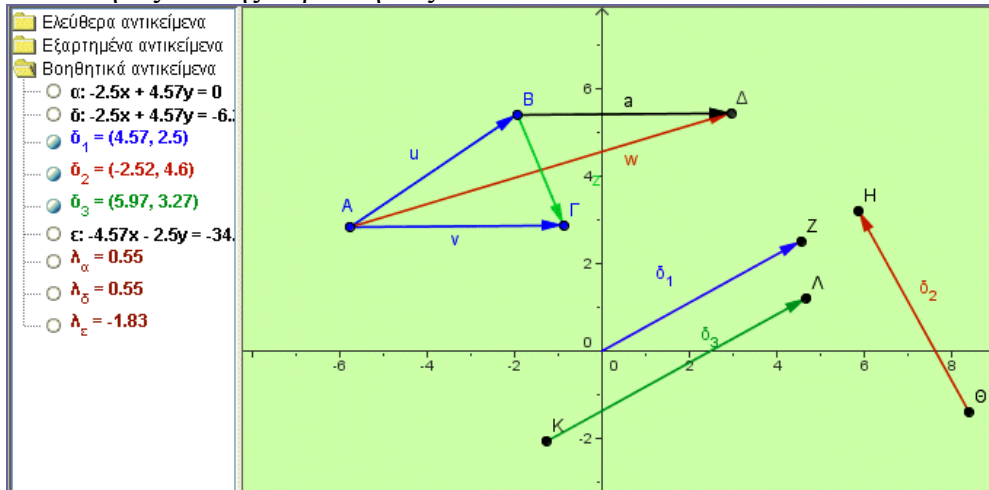
Τάξη: Β'

Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
  2. ....
- .....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη προβάλλονται μία σειρά από διανύσματα και σημεία που καθορίζουν τα άκρα των διανυσμάτων. Ο στόχος μας είναι να μελετήσουμε την σχέση που έχουν οι συντεταγμένες των διανυσμάτων στην περίπτωση του αθροίσματος, της διαφοράς, της καθετότητας και της παραλληλίας.



**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

- 1) Να μεταβάλετε τα διανύσματα  $AB$  και  $AG$ . Ποια σχέση συνδέει τις συντεταγμένες των διανυσμάτων αυτών με τις συντεταγμένες των  $AD$  και  $BG$ ;

- 2) Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο  $ABΔΓ$  είναι παραλληλόγραμμο.

- 3) Να εμφανίσετε τις ευθείες  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\epsilon$  από τα βοηθητικά αντικείμενα. Με βάση τις μετρήσεις των κλίσεων των ευθειών  $\lambda_\alpha$ ,  $\lambda_\delta$ ,  $\lambda_\epsilon$  να εκτιμήσετε την σχέση που υπάρχει μεταξύ τους. Τι σχέση έχουν τα διανύσματα  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$ ;

- 4) Να εμφανίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων αυτών. Ποια σχέση έχουν οι συντεταγμένες τους;

## ΓΩΝΙΑ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

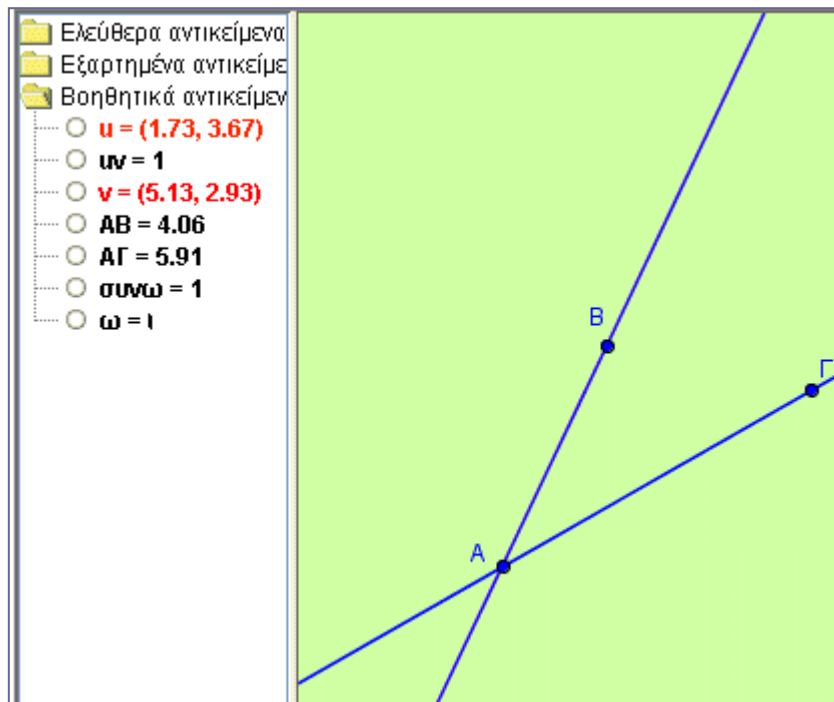
Τάξη: Β'

Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
  2. ....
- .....

### Φύλλο εργασίας

Δίνονται οι ευθείες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  οι οποίες τέμνονται στο σημείο Α. Πάνω στις ευθείες βρίσκονται τα σημεία Β και Γ. Το πρόβλημα που τίθεται είναι το εξής: Με ποιο τρόπο θα υπολογίσουμε την γωνία των δύο ευθειών χρησιμοποιώντας τις γνώσεις που διαθέτουμε από το κεφάλαιο των διανυσμάτων.





**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

- 1) Να εμφανίσετε τα διανύσματα  $ΑΓ$  και  $ΑΒ$ , δηλαδή τα  $u$ ,  $v$ . Να υπολογίσετε το εσωτερικό τους γινόμενο επαναπροσδιορίζοντας τον αριθμό  $uv$  που υπάρχει στα βοηθητικά αντικείμενα.

- 2) Να δημιουργήσετε το πηλίκο του εσωτερικού γινομένου  $uv$  προς το γινόμενο  $ΑΒ.ΑΓ$  των μέτρων των δύο διανυσμάτων. Τι εκφράζει το πηλίκο αυτό; Να χρησιμοποιήσετε τον αριθμό  $\sigma\omega$  που βρίσκεται στα βοηθητικά αντικείμενα για να εκφράσετε το παραπάνω πηλίκο.

- 3) Όταν γνωρίζουμε το συνημίτονο μιας γωνίας τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την γωνία αν ζητήσουμε από το λογισμικό να υπολογίσει την έκφραση  $\text{acos}(\sigma\omega)$ . Να υπολογίσετε την γωνία της οποίας το συνημίτονο είναι το προηγούμενο γινόμενο.

- 4) Να περιγράψετε έναν αλγόριθμο με τον οποίο θα μπορούμε για δύο οποιεσδήποτε ευθείες να υπολογίζουμε την γωνία τους.

## ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ

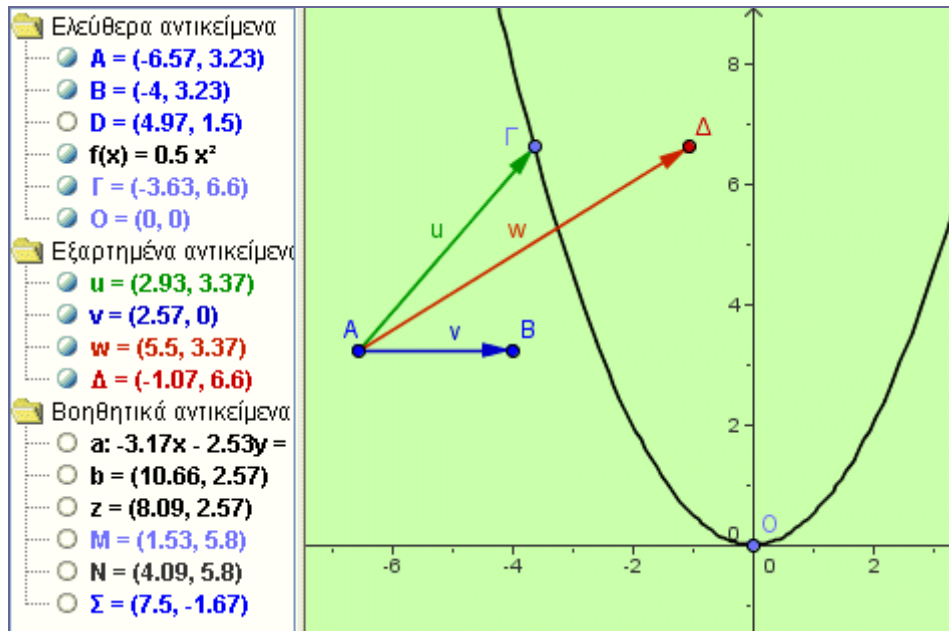
Τάξη: Β'

Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
  2. ....
- .....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη εμφανίζεται ένα σταθερό διάνυσμα  $AB$ , μία παραβολή, ένα διάνυσμα  $A\Gamma$ , του οποίου το άκρο  $\Gamma$  κινείται πάνω στην παραβολή και ένα διάνυσμα  $A\Delta$ .



**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

1) Να βρείτε την σχέση που συνδέει τα τρία διανύσματα.

2) Να εμφανίσετε το ίχνος του σημείου  $\Delta$  και να σύρετε το σημείο  $\Gamma$ . Τι σχέση έχει η καμπύλη που γράφει το σημείο  $\Delta$  με την αρχική παραβολή;

3) Να μεταβάλετε το διάνυσμα  $AB$ , αφού πρώτα αλλάξετε την ιδιότητά του να είναι σταθερό. Ποια σχέση έχει η νέα καμπύλη που θα γράψει το σημείο  $\Delta$  με την αρχική καμπύλη;

4) Να δικαιολογήσετε τα συμπεράσματά σας με αυστηρά μαθηματικό τρόπο.

5) Να μελετήσετε την περίπτωση που το σημείο κινείται πάνω σε μία ευθεία. Να αποκρύψετε τα διανύσματα  $u$ ,  $w$  και τα σημεία  $\Gamma$ ,  $\Delta$  καθώς και την παραβολή. Να εμφανίσετε όλα τα βοηθητικά αντικείμενα.



**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9**

**ΕΥΘΕΙΕΣ**

## ΕΥΘΕΙΑ - ΔΙΑΝΥΣΜΑ

Τάξη: Β΄

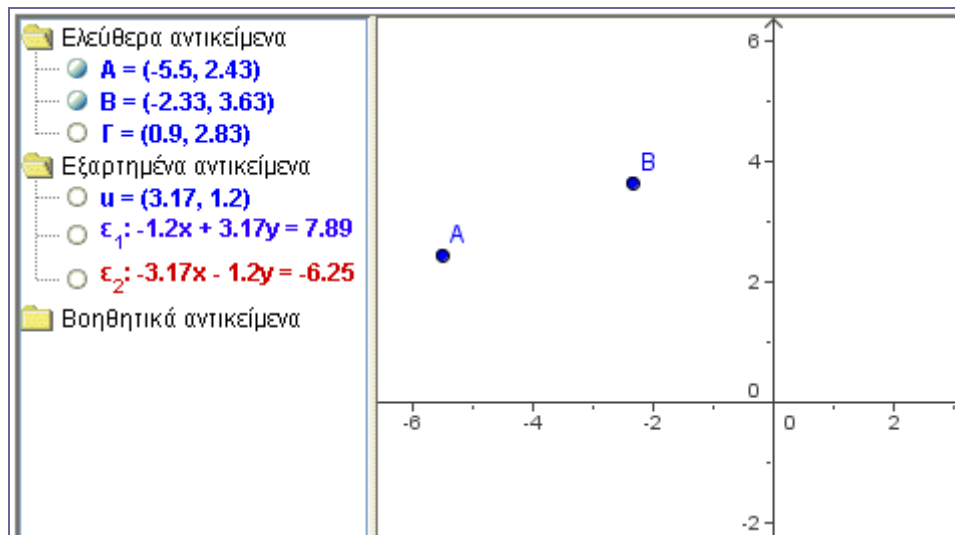
Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
  2. ....
- .....

### Φύλλο εργασίας

Στην οθόνη εμφανίζονται:

Τα σημεία A, B, Γ το διάνυσμα u και οι εξισώσεις των ευθειών  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  στο παράθυρο των αντικειμένων.



Να εμφανίσετε το διάνυσμα u και το σημείο Γ. Να εμφανίσετε την ευθεία  $\epsilon_1$  που περνά από το Γ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα.

**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ.**

- 1) Να μεταβάλλετε το διάνυσμα  $u$ . Ποια σχέση συνδέει τις συντεταγμένες του διανύσματος με τους συντελεστές της ευθείας;

- 2) Πως μπορούμε να δικαιολογήσουμε την σχέση αυτή με αυστηρά μαθηματικό τρόπο;

- 3) Να εμφανίσετε την ευθεία  $e_2$  που είναι κάθετη στο διάνυσμα  $u$  και περνά από το  $\Gamma$ . Να μεταβάλετε το διάνυσμα. Ποια σχέση φαίνεται να συνδέει τις συντεταγμένες του διανύσματος με τους συντελεστές της ευθείας;

- 4) Πως μπορούμε να δικαιολογήσουμε την σχέση αυτή με αυστηρά μαθηματικό τρόπο;

## ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Τάξη: Β'

Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
  2. ....
- .....

### Φύλλο εργασίας

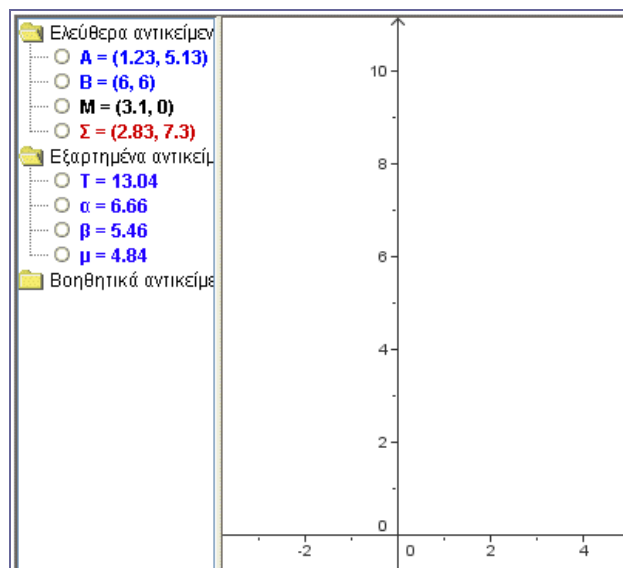
Με την βοήθεια του λογισμικού μπορούμε να επεξεργαστούμε τα περισσότερα από τα προβλήματα που περιέχει το σχολικό βιβλίο. Η επεξεργασία αυτή μπορεί να γίνει με διαφορετικούς τρόπους όπως θα δούμε στην συνέχεια.

Ας επιχειρήσουμε λοιπόν να λύσουμε την παρακάτω άσκηση του βιβλίου:

«Δίνονται τα σημεία  $A(3, 4)$  και  $B(6, 6)$  να βρεθεί σημείο  $M$  του άξονα  $x'x$  ώστε  $(AMB)=7$ ».

Στην οθόνη εμφανίζονται:

Τα σημεία  $A, B, M, \Sigma$  το εμβαδόν  $T$  του τριγώνου  $AMB$ , καθώς και τα μήκη  $\alpha, \beta, \mu$  των τμημάτων, στο παράθυρο των αντικειμένων.





**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

1. Να εμφανίσετε τα σημεία A και B και στην συνέχεια να τα οδηγήσετε στις θέσεις με συντεταγμένες (3, 4) και (6, 6) αντίστοιχα. Να εμφανίσετε το ελεύθερο σημείο M πάνω στον άξονα χ'χ. Να εμφανίσετε το πολύγωνο T, δηλαδή το τρίγωνο ABM.
2. Να μετακινήσετε το σημείο M ώστε η τιμή του εμβαδού του ABM να γίνει 7. Σε πόσα σημεία του άξονα το εμβαδόν γίνεται 7;

3. Να αποδείξετε με αυστηρά μαθηματικό τρόπο τα συμπεράσματά σας.

Μέχρι τώρα έχουμε λύσει το πρόβλημα του σχολικού βιβλίου. Το λογισμικό μας δίνει την δυνατότητα να διερευνήσουμε επιπλέον περιπτώσεις και να ανακαλύψουμε επιπλέον σχέσεις που αφορούν στο εμβαδόν αυτού του τριγώνου.

4. Να εμφανίσετε το σημείο Σ και να το επαναπροσδιορίσετε ώστε η τετμημένη του να είναι η τετμημένη του M και η τεταγμένη του το εμβαδόν του ABM, δηλαδή το T. Να μεταβάλετε την θέση του σημείου M πως μεταβάλλεται η θέση του Σ; Ποια μορφή σχέσης φαίνεται να συνδέει την τετμημένη του M με το εμβαδόν του τριγώνου;

5. Να δημιουργήσετε το ίχνος του σημείου Σ. Ποια θα πρέπει να είναι η θέση του A ώστε σε συμμετρικές θέσεις του M ως προς την αρχή των αξόνων το εμβαδόν του τριγώνου να είναι το ίδιο;

## ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ 1

Τάξη: Β'

Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
  2. ....
- .....

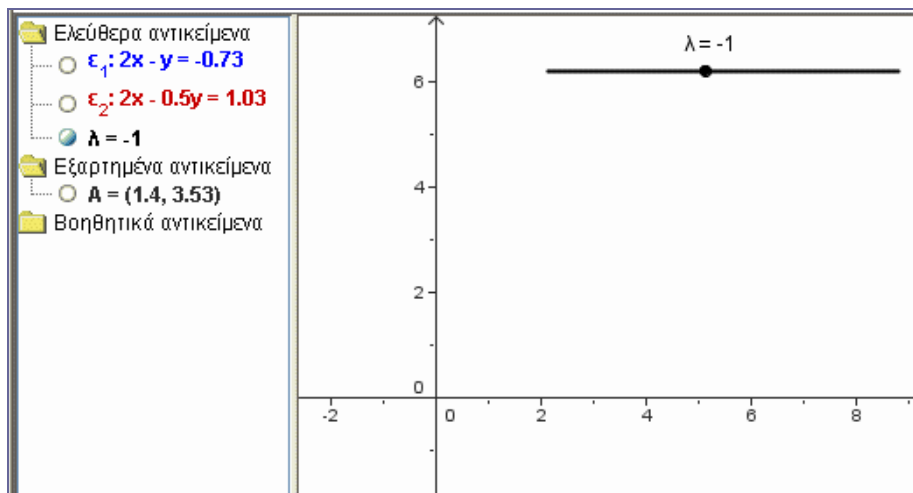
### Φύλλο εργασίας

Είναι γνωστό ότι αν η εξίσωση μιας ευθείας περιέχει παράμετρο στην θέση του ενός ή και των δύο συντελεστών, ή και του σταθερού όρου, τότε η εξίσωσή της παριστάνει μία ομάδα ευθειών. Αν λοιπόν ορίσουμε μία παράμετρο μέσω ενός μεταβολέα και εισάγουμε την παράμετρο στην εξίσωση μιας ευθείας τότε αλλάζοντας τις τιμές με τον μεταβολέα μπορούμε να μελετήσουμε την συμπεριφορά της ευθείας αυτής.

Ας δημιουργήσουμε λοιπόν παραμετρικές ευθείες:

Στην οθόνη εμφανίζονται:

Ένας μεταβολέας  $\lambda$  και οι εξισώσεις των ευθειών  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  και ένα σημείο A στο παράθυρο των αντικειμένων.



Να εμφανίσετε τις ευθείες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$ . Να επαναπροσδιορίσετε τις ευθείες ως εξής:

$2\lambda x - y = -1$  και  $2x - \frac{1}{\lambda+1} y = 1$  αντίστοιχα. Να εμφανίσετε το σημείο τομής των ευθειών

A.

**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

- 1) Να μεταβάλετε τις τιμές του  $\lambda$ . Πως μεταβάλετε η θέση του σημείου τομής των ευθειών; Για ποια τιμή του  $\lambda$  το σημείο τομής βρίσκεται πάνω στον άξονα  $x'x$ ;

- 2) Να δημιουργήσετε το ίχνος του σημείου τομής. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του σημείου αυτού.

- 3) Να αποδείξετε με αυστηρά μαθηματικό τρόπο το συμπέρασμά σας από την προηγούμενη ερώτηση.

## ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ 2

Τάξη: Β΄

Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
  2. ....
- .....

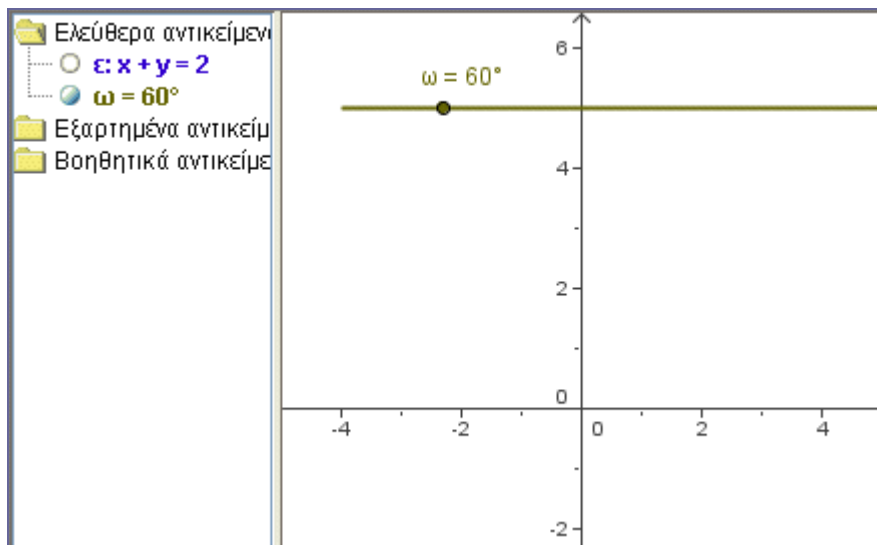
### Φύλλο εργασίας

Στην δραστηριότητα αυτή θα διερευνήσουμε την συμπεριφορά και τις ιδιότητες μιας παραμετρικής ευθείας με συντελεστές ημίτονα και συνημίτονα.

Εδώ η παράμετρος δεν επηρεάζει άμεσα την ευθεία αλλά μέσω των τριγωνομετρικών της αριθμών.

Στην οθόνη εμφανίζονται:

Ένας μεταβολέας γωνιών  $\omega$ , η εξίσωση της ευθείας  $\epsilon$  και η τιμή της γωνίας  $\omega$ .



Να επαναπροσδιορίσετε την ευθεία  $\epsilon$  εισάγοντας στους συντελεστές της το ημίτονο και συνημίτονο της γωνίας  $\omega$ .  $(\eta\mu\omega)\cdot\chi+(\sigma\upsilon\eta\omega)\cdot\psi=1$ .

**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

- 1) Να μεταβάλετε τις τιμές της γωνίας  $\omega$ . Πως μεταβάλλεται η ευθεία;

- 2) Να δημιουργήσετε το ίχνος της ευθείας. Να μεταβάλλετε την τιμή της  $\omega$ . Τι παρατηρείτε; Ποια είναι η θέση της ευθείας ως προς τον κύκλο που φαίνεται να δημιουργείται;

- 3) Να επαναπροσδιορίσετε την ευθεία σε  $(\eta\mu\omega)\cdot\chi + (\sigma\upsilon\nu\omega)\cdot\psi = 2$ . Τι αλλάζει τώρα στην περιοχή γύρω από την οποία περιστρέφεται η ευθεία

- 4) Να πειραματιστείτε με συντελεστές  $2\eta\mu\omega$  και  $\sigma\upsilon\nu\omega$  για την παραμετρική ευθεία. Τι σχήμα δημιουργείται;



<p><b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10</b> <b>ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ</b></p>
--

## ΑΝΑΚΛΑΣΗ ΣΕ ΠΑΡΑΒΟΛΗ

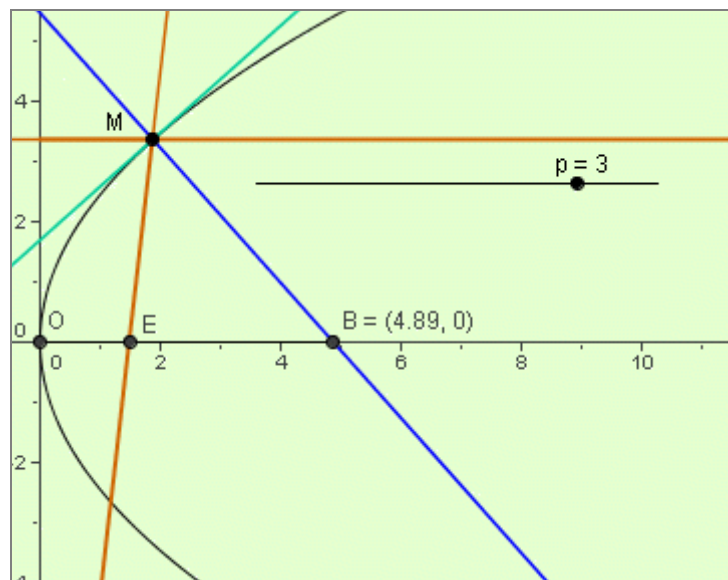
Τάξη: Β΄

Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
  2. ....
- .....

### Φύλλο εργασίας

Για την υλοποίηση της δραστηριότητας αυτής είναι ανάγκη να εμφανίσετε σταδιακά μία κατασκευή με την οποία στην συνέχεια θα διερευνήσετε ορισμένα ερωτήματα που σχετίζονται με την παραβολή.



Ο στόχος είναι να κατασκευαστεί σταδιακά το παραπάνω σχήμα.

#### Η κατασκευή

Στην οθόνη προβάλλονται:

Ένας μεταβολέας  $p$ , μία παραβολή και ένα σημείο  $M$  πάνω στην παραβολή.

Τα αντικείμενα που θα εμφανιστούν βρίσκονται στον φάκελο των βοηθητικών αντικειμένων. Να ακολουθήσετε την σειρά που προτείνεται παρακάτω.

α) Να εμφανίσετε την εφαπτομένη ( $\delta$ ) στο  $M$  και την κάθετη ( $\epsilon$ ) στην εφαπτομένη στο  $M$ . Να εμφανίσετε το σημείο τομής  $B$  της κάθετης με τον άξονα  $x'x$ .

β) Να εμφανίσετε την εστία  $E$  της παραβολής και την ευθεία ( $\zeta$ ) δηλαδή την  $ME$ .

Τέλος να εμφανίσετε την ευθεία ( $\eta$ ) παράλληλη προς τον άξονα  $x'x$  που περνά από το σημείο  $M$ .



**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

- 1) Να εμφανίσετε τις συντεταγμένες του Β. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή που παίρνει η τετμημένη του Β; Ποια σχέση έχει με την παράμετρο  $p$ ;

- 2) Να εμφανίσετε τις γωνίες  $\omega_1$  και  $\omega_2$  και τις τιμές τους, να σύρετε το σημείο Μ πάνω στην παραβολή. Τι παρατηρείτε;

- 3) Να αλλάξετε τις τιμές της παραμέτρου  $p$  ώστε να γίνουν αρνητικές. Να μελετήσετε αν ισχύουν και πάλι αυτά που παρατηρήσατε προηγουμένως.

- 4) Να αποδείξετε με αυστηρά μαθηματικό τρόπο τα συμπεράσματα από τις προηγούμενες ερωτήσεις.

## ΑΝΑΚΛΑΣΗ ΣΕ ΕΛΛΕΙΨΗ

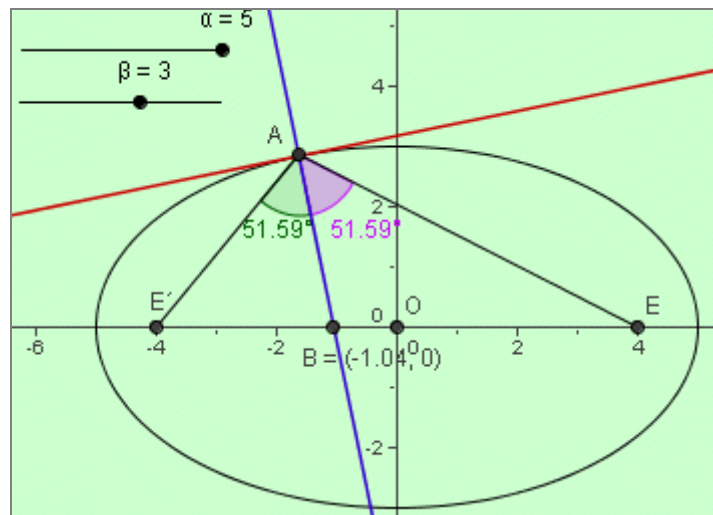
Τάξη: Β'

Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
2. ....

### Φύλλο εργασίας

Για την υλοποίηση της δραστηριότητας αυτής είναι ανάγκη να εμφανίσετε μία κατασκευή με την οποία στην συνέχεια θα διερευνήσετε ορισμένα ερωτήματα που σχετίζονται με την έλλειψη.



Ο στόχος είναι να κατασκευαστεί σταδιακά το παραπάνω σχήμα.

#### Η κατασκευή

Στην οθόνη προβάλλονται:

Δύο μεταβολείς  $\alpha$ ,  $\beta$  μία έλλειψη με τις εστίες της E και E' και ένα σημείο A πάνω στην έλλειψη. Ακόμη εμφανίζονται τα τμήματα που ενώνουν τις εστίες με το σημείο M.

Τα αντικείμενα που θα εμφανιστούν βρίσκονται στον φάκελο των βοηθητικών αντικειμένων. Να ακολουθήσετε την σειρά που προτείνεται παρακάτω.

α) Να εμφανίσετε την εφαπτομένη ( $\delta_1$ ) στο A και την κάθετη ( $\delta_2$ ) στην εφαπτομένη στο M.

β) Να εμφανίσετε το σημείο τομής B της κάθετης με τον άξονα  $\chi'\chi$ .

**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

- 1) Να εμφανίσετε τις συντεταγμένες του Β. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή που παίρνει η τετμημένη του Β και ποια η μέγιστη; Ποια σχέση έχει με την παράμετρο  $\alpha$  και την εκκεντρότητα;

- 2) Να εμφανίσετε τις γωνίες  $\omega_1$  και  $\omega_2$  και τις τιμές τους, να σύρετε το σημείο Μ πάνω στην έλλειψη. Τι παρατηρείτε;

- 3) Να αλλάξετε τις τιμές των παραμέτρων  $\alpha$ ,  $\beta$ . Να μελετήσετε αν ισχύουν και πάλι αυτά που παρατηρήσατε προηγουμένως.

- 4) Να αποδείξετε με αυστηρά μαθηματικό τρόπο τα συμπεράσματα από τις προηγούμενες ερωτήσεις.

## Η ΥΠΕΡΒΟΛΗ

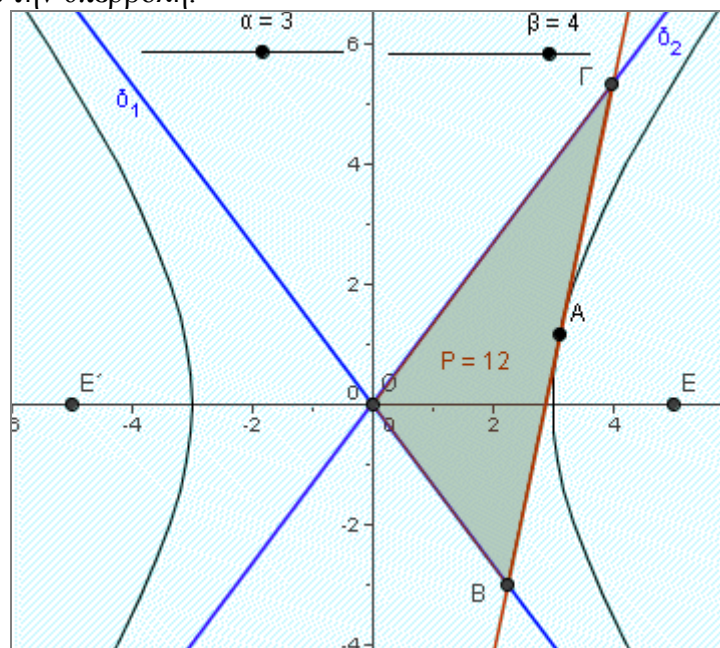
Τάξη: Β΄

Όνομ/νυμο μαθητών:

1. ....
2. ....

### Φύλλο εργασίας

Για την υλοποίηση της δραστηριότητας αυτής είναι ανάγκη να εμφανίσετε μια κατασκευή με την οποία στην συνέχεια θα διερευνήσετε ορισμένα ερωτήματα που σχετίζονται με την υπερβολή.



Ο στόχος είναι να κατασκευαστεί σταδιακά το παραπάνω σχήμα.

#### Η κατασκευή

Στην οθόνη προβάλλονται:

Δύο μεταβολείς  $\alpha$ ,  $\beta$  μία υπερβολή με τις εστίες της  $E$  και  $E'$  και ένα σημείο  $A$  πάνω στον ένα κλάδο της υπερβολής.

Τα αντικείμενα που θα εμφανιστούν βρίσκονται στον φάκελο των βοηθητικών αντικειμένων. Να ακολουθήσετε την σειρά που προτείνεται παρακάτω.

- α) Να εμφανίσετε την εφαπτομένη ( $\delta$ ) στο  $A$  και τις ασύμπτωτες της υπερβολής ( $\delta_1$ ) και ( $\delta_2$ ).
- β) Να εμφανίσετε τα σημεία τομής  $B$  και  $\Gamma$  της εφαπτομένης με τις ασύμπτωτες.
- γ) Να εμφανίσετε το τρίγωνο  $P$ .

**ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ:**

- 1) Να μεταβάλλετε την θέση του  $A$  πάνω στην υπερβολή. Ποια μεγέθη παραμένουν σταθερά και ποια μεταβάλλονται;

- 2) Πως συνδέεται το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  με τις παραμέτρους; Να αλλάξετε τις τιμές των παραμέτρων και να επιβεβαιώσετε το συμπέρασμά σας.

- 3) Να αποδείξετε το συμπέρασμά σας με αυστηρά μαθηματικό τρόπο.





### Τεχνική Υποστήριξη

Δικτυακός Τόπος : [www.intracom-schools.gr](http://www.intracom-schools.gr) και

Ηλεκτρονικό ταχυδρομείο : [support\\_it@intracom-it.gr](mailto:support_it@intracom-it.gr)

Τηλέφωνο : 210-6679105

Fax : 210-6679106

Υπεύθυνη : κα Μπερτσά Όλγα

ΥΠΕΠΘ / ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ  
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ «ΚΟΙΝΩΝΙΑ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ»



Γ' ΚΟΙΝΟΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΣΤΗΡΙΞΗΣ  
ΕΡΓΟ ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΟΥΜΕΝΟ ΚΑΤΑ 80% ΑΠΟ ΤΟ ΕΚΤ  
ΚΑΙ ΚΑΤΑ 20% ΑΠΟ ΕΘΝΙΚΟΥΣ ΠΟΡΟΥΣ  
«Ολοκληρωμένη Αξιοποίηση των Τ.Π.Ε. στην Εκπαιδευτική Διαδικασία»