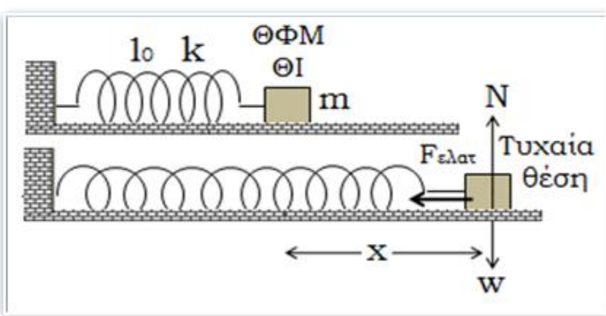
Ταλάντωση και ελατήριο:

Ένα ελατήριο θεωρείται ιδανικό όταν η μάζα του είναι αμελητέα και για τη δύναμη που ασκεί ισχύει ο νόμος του Hooke με μέτρο : $F_{ελατ} = k \cdot x$, όπου x η συμπίεση ή η επιμήκυνση του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος. Όταν σε ένα ελατήριο δεν ασκείται καμία δύναμη, τότε αυτό δεν είναι παραμορφωμένο και έχει μήκος που το λέμε φυσικό μήκος l_0 του ελατηρίου. Η σταθερά k είναι μία θετική σταθερά, ισούται με το πηλίκο του μέτρου της δύναμης $F_{ελατ}$ προς την παραμόρφωση του x (επιμήκυνση ή συμπίεση), έχει μονάδες μέτρησης το $1\frac{N}{m}$ και εκφράζει το πόσο σκληρό είναι το ελατήριο. Δηλαδή για δύο ελατήρια με σταθερές k_1 και k_2 αντίστοιχα, όπου $k_1 > k_2$, το ελατήριο με σταθερά k_1 είναι πιο σκληρό από το ελατήριο σταθεράς k_2. Η φορά της $F_{ελατ}$ είναι πάντα προς τη θέση όπου βρίσκεται το σώμα όταν το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, δηλ η $F_{ελατ}$ τείνει να επαναφέρει το σώμα στη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, γι αυτό λέγεται και δύναμη επαναφοράς.

Σώμα δεμένο στο ελεύθερο άκρο ελατηρίου

Περίπτωση 1: Οριζόντιο ελατήριο:

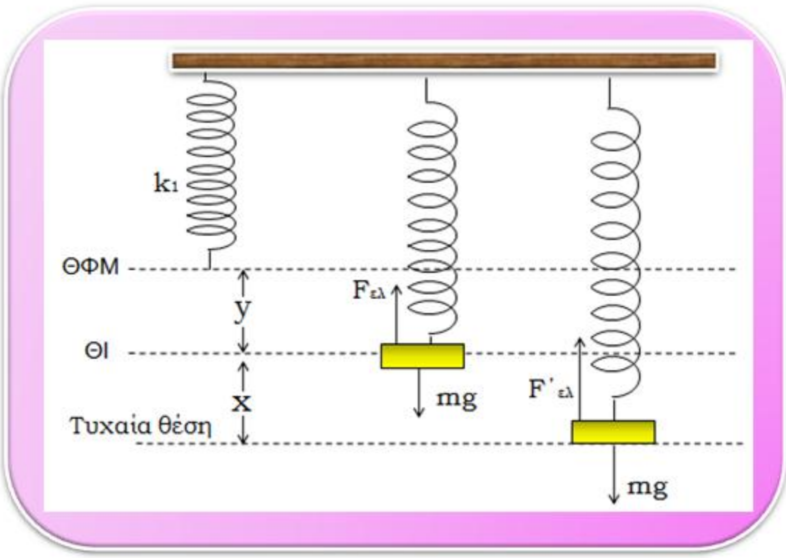
όταν ένα σώμα είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου και κινείται χωρίς τριβές πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, τότε τη Θ.Ι του σώματος το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Σε μία τυχαία θέση η απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας συμπίπτει με τη επιμήκυνση (ή τη συσπείρωση) x του ελατηρίου και η δύναμη επαναφοράς είναι: $\Sigma F = -F_{ελατ} = -k \cdot x$



Ο συντελεστής του x θα αποτελεί τη σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης. Η σχέση αυτή αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για να κάνει το σώμα Α.Α.Τ. με σταθερά επαναφοράς $D = k$ και $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ Η σταθερά επαναφοράς D είναι ανεξάρτητη από το πλάτος Α της ταλάντωσης. Η αρχική απομάκρυνση του σώματος από τη Θ.Ι. του είναι και το πλάτος Α της ταλάντωσης. Στη δύναμη επαναφοράς ΣF ή $F_{\varepsilon\pi\alpha\nu}=-k\cdot x$, η απομάκρυνση x μετράει από τη θέση ισορροπίας. Στη δύναμη ελατηρίου $F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}=-k\cdot x$, η απομάκρυνση x μετράει από τη θέση φυσικού μήκους ελατηρίου. Στην περίπτωση που το ελατήριο είναι οριζόντιο, η θέση ισορροπίας ταυτίζεται με τη θέση φυσικού μήκους

__Περίπτωση 2:__ Κατακόρυφο ελατήριο:

όταν ένα σώμα είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου, τότε στη θέση ισορροπίας του σώματος το ελατήριο δεν έχει το φυσικό του μήκος. Αρχικά βρίσκουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στη Θ.Ι του. Παρατηρούμε ότι το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά y. Από τη συνθήκη $\Sigma F=0$ γράφουμε τη σχέση μεταξύ των δυνάμεων στη Θ.Ι. Ισχύει: $\Sigma F=0\Rightarrow m\cdot g=k\cdot y$ (1)



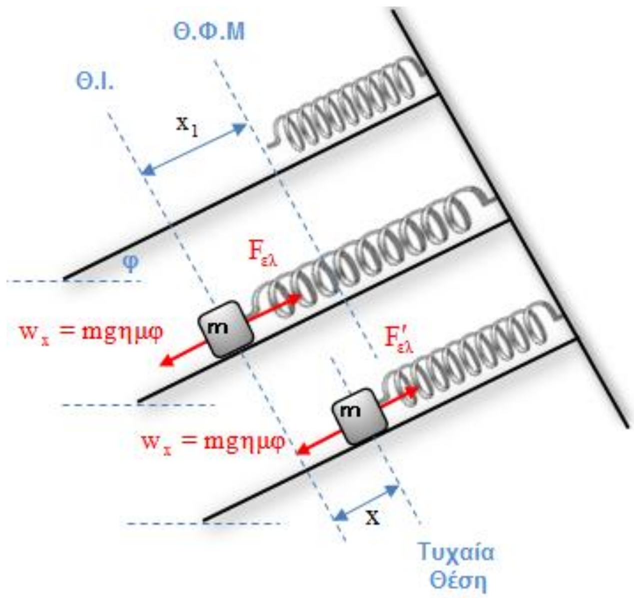
Στην τυχαία θέση του σώματος σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και βρίσκουμε τη συνισταμένη τους ως εξής: από τις δυνάμεις που έχουν τη φορά της απομάκρυνσης αφαιρούμε τις δυνάμεις που έχουν αντίθετη φορά. Σε μία τυχαία θέση x, όπου x η απομάκρυνση από τη Θ.Ι. , ισχύει:

$$\Sigma F=m\cdot g-F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}^{'}\Rightarrow m\cdot g-k\cdot(y+x)=m\cdot g-k\cdot y-k\cdot x\xrightarrow{(1)}\Sigma F=-k\cdot x$$

Η σχέση αυτή αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για να κάνει το σώμα Α.Α.Τ. με σταθερά επαναφοράς $D=k$ και $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ Στη δύναμη επαναφοράς ΣF ή $F_{\varepsilon\pi\alpha\nu}=-k\cdot x$, η απομάκρυνση x στην τυχαία θέση είναι $F_{\varepsilon\pi\alpha\nu}=-k\cdot x$ ενώ η δύναμη ελατηρίου είναι $F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}=-k\cdot(x+y)$

<u>Περίπτωση 3:</u> Ελατήριο σε κεκλιμένο επίπεδο:

Όταν ένα σώμα είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο ιδανικού ελατηρίου που βρίσκεται πάνω σε λείο κεκλιμένο επίπεδο, τότε στη θέση ισορροπίας του σώματος το ελατήριο δεν έχει το φυσικό του μήκος. Στη θέση ισορροπίας του σώματος το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά x_1. Ισχύει: $\Sigma F = 0 \Rightarrow m \cdot g \cdot \eta\mu\phi = k \cdot x_1$ (2)



Στην τυχαία θέση του σώματος για το ΣF, από τις δυνάμεις που έχουν τη φορά της απομάκρυνσης αφαιρούμε τις δυνάμεις που έχουν αντίθετη φορά.

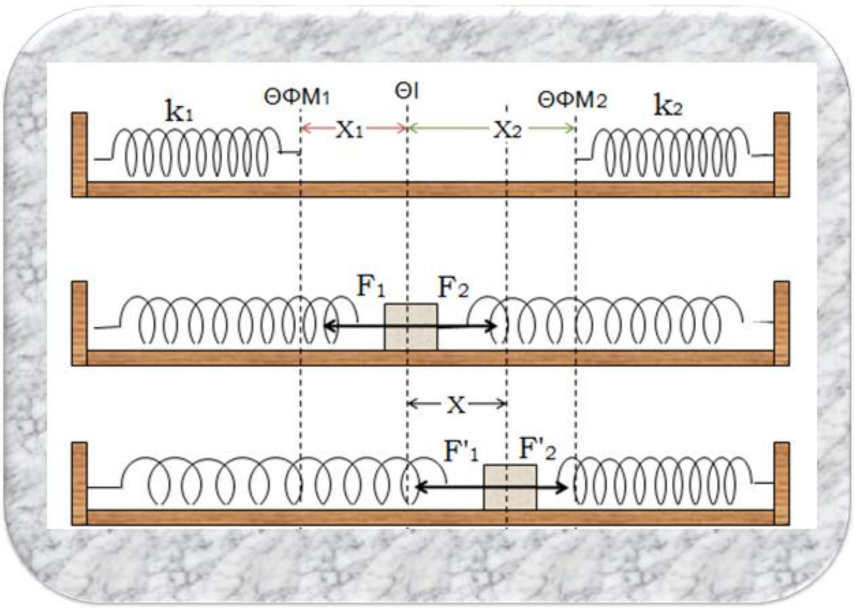
$$\Sigma F = F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} - m \cdot g \cdot \eta\mu\phi \Rightarrow \Sigma F = k \cdot (x_1 - x) - m \cdot g \cdot \eta\mu\phi = k \cdot x_1 - k \cdot x - m \cdot g \cdot \eta\mu\phi \xrightarrow{(2)} \Sigma F = -k \cdot x$$

$D = k$ Η σχέση αυτή αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για να κάνει το σώμα Α.Α.Τ. με σταθερά επαναφοράς $D = k$ και $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ Στη δύναμη επαναφοράς ΣF ή $F_{\varepsilon\pi\alpha\nu} = -k \cdot x$, η απομάκρυνση x στην τυχαία θέση είναι $F_{\varepsilon\pi\alpha\nu} = -k \cdot x$ ενώ η δύναμη ελατηρίου είναι $F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} = -k \cdot (x_1 - x)$

Σώμα δεμένο στα ελεύθερα άκρα δύο ελατηρίων

Περίπτωση 4: Οριζόντια ελατήρια:

Σχεδιάζουμε τα ελατήρια με το φυσικό τους μήκος. Σχεδιάζουμε το σώμα στη θέση ισορροπίας του και τις δυνάμεις που ασκούνται σε αυτό. Από τη συνθήκη $\Sigma F = 0$ γράφουμε τη σχέση μεταξύ των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα στη Θ.Ι. Σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα έχουμε:



$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau\,(1)} = F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau\,(2)} \Rightarrow k_1 \cdot x_1 = k_2 \cdot x_2$ (3)

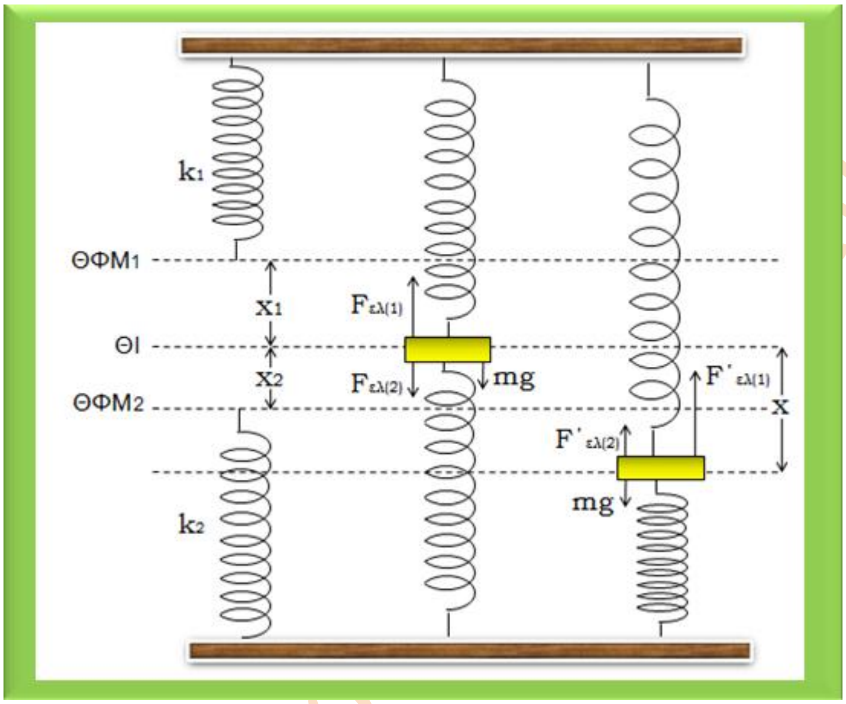
Σχεδιάζουμε το σώμα σε μία τυχαία θέση με απομάκρυνση x από τη Θ.Ι. Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα στη θέση αυτή βρίσκεται ως εξής: Από τις δυνάμεις που έχουν τη φορά της απομάκρυνσης, αφαιρούμε τις δυνάμεις που έχουν αντίθετη φορά. Στο παράδειγμα μας θα είναι: $\Sigma F = F'_{\varepsilon\lambda\alpha\tau\,(2)} - F'_{\varepsilon\lambda\alpha\tau\,(1)} = k_2 \cdot (x_2 - x) - k_1 \cdot (x_1 + x) \Rightarrow \Sigma F = k_2 \cdot x_2 - k_2 \cdot x - k_1 \cdot x_1 - k_1 \cdot x \xrightarrow{(3)} \Sigma F = -(k_1 + k_2) \cdot x$

Ο συντελεστής του x είναι η σταθερά επαναφοράς D της ταλάντωσης. Εδώ έχουμε ότι $D = k_1 + k_2$

Η σχέση αυτή αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για να κάνει το σώμα Α.Α.Τ. με σταθερά επαναφοράς $D = k$ και $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1 + k_2}}$

<u>Περίπτωση 5:</u> Κατακόρυφα ελατήρια:

Στη θέση Ο όπου το σώμα ισορροπεί, τα ελατήρια είναι επιμηκυμένα κατά x_1 και x_2



Για τη θέση ισορροπίας Ο ισχύει: $\Sigma F = 0 \Rightarrow m \cdot g + F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau(2)} = F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau(1)} \Rightarrow m \cdot g + k_2 \cdot x_2 = k_1 \cdot x_1$ (4)

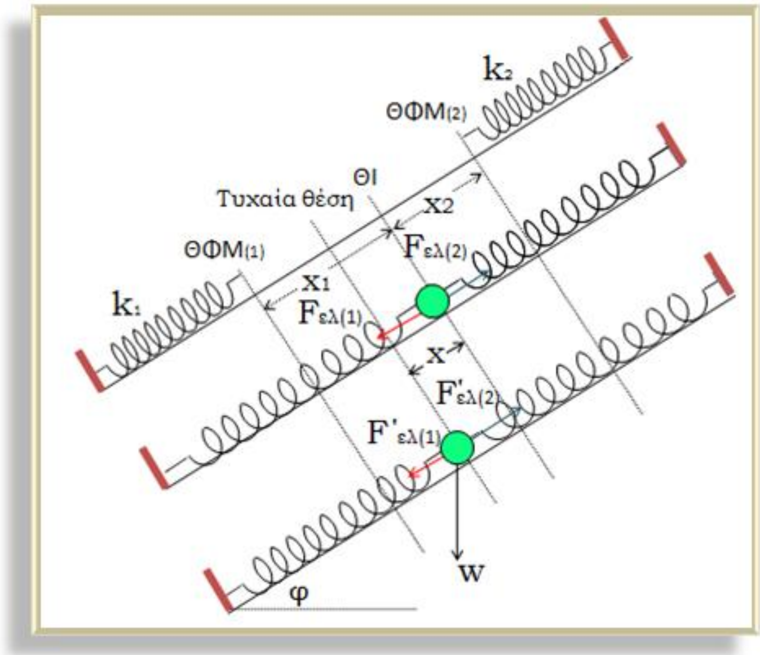
Στην τυχαία θέση Γ όπου η απομάκρυνση του σώματος από τη Θ.Ι. είναι x, ισχύει:

$$\Sigma F = -F'_{\varepsilon\lambda\alpha\tau(1)} - F'_{\varepsilon\lambda\alpha\tau(2)} + m \cdot g = -k_1 \cdot (x_1 + x) - k_2 \cdot (x - x_2) + m \cdot g \Rightarrow \Sigma F = -k_1 \cdot x_1 - k_1 \cdot x - k_2 \cdot x + k_2 \cdot x_2 + m \cdot g \Rightarrow$$

$$\Sigma F = -k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 + m \cdot g - (k_1 + k_2) \cdot x \xrightarrow{(4)} \Sigma F = -(k_1 + k_2) \cdot x$$

η οποία αποτελεί ικανή συνθήκη για να κάνει το σώμα απλή αρμονική ταλάντωση με $D = k$ και $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1 + k_2}}$

Περίπτωση 6: Ελατήρια σε κεκλιμένο επίπεδο:



Στη θέση όπου το σώμα ισορροπεί, τα ελατήρια είναι επιμηκυμένα κατά x_1 και x_2

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m \cdot g \cdot \eta\mu\phi + F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau\,(1)} = F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau\,(2)} \Rightarrow m \cdot g \cdot \eta\mu\phi + k_1 \cdot x_1 = k_2 \cdot x_2 \quad (5)$$

Στην τυχαία θέση όπου η απομάκρυνση του σώματος από τη Θ.Ι. είναι x, ισχύει:

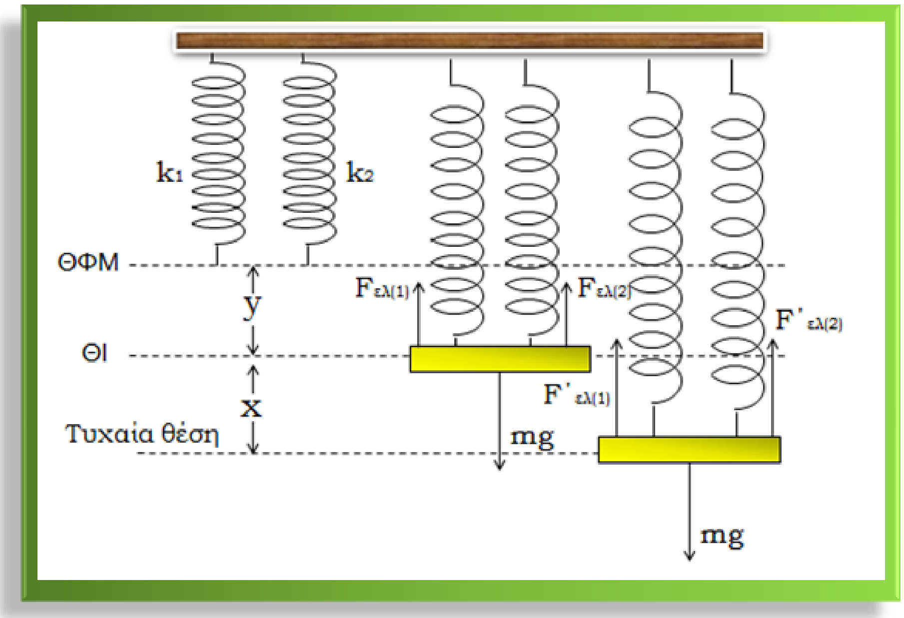
$$\Sigma F = F'_{\varepsilon\lambda\alpha\tau\,(2)} - F'_{\varepsilon\lambda\alpha\tau\,(1)} - m \cdot g \cdot \eta\mu\phi = k_2 \cdot (x_2 - x) - k_1 \cdot (x_1 + x) - m \cdot g \cdot \eta\mu\phi$$

$$\Sigma F = k_2 \cdot x_2 - k_2 \cdot x - k_1 \cdot x_1 - k_1 \cdot x - m \cdot g \cdot \eta\mu\phi \Rightarrow \Sigma F = k_2 \cdot x_2 - k_1 \cdot x_1 - m \cdot g \cdot \eta\mu\phi - (k_1 + k_2) \cdot x \xrightarrow{(5)} \Sigma F = -(k_1 + k_2) \cdot x$$

η οποία αποτελεί ικανή συνθήκη για να κάνει το σώμα απλή αρμονική ταλάντωση με $D = k$ και

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

Περίπτωση 7: Παράλληλα ελατήρια: Στη Θ.Ι του σώματος ισχύει:



$\Sigma F = 0 \Rightarrow m \cdot g = F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau\,(1)} + F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau\,(2)} \Rightarrow m \cdot g = (k_1 + k_2) \cdot y$ (6)

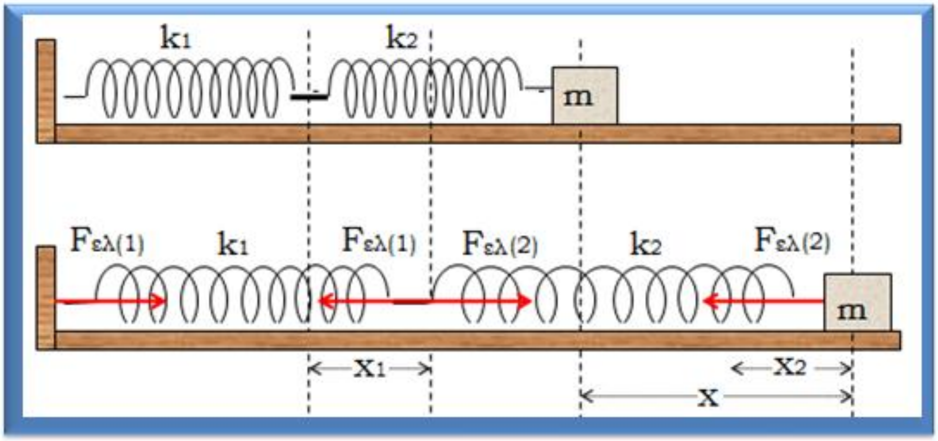
Σε μία τυχαία θέση όπου το σώμα απέχει κατά x από τη θέση ισορροπίας, θα έχουμε:

$\Sigma F = -F'_{\varepsilon\lambda\alpha\tau\,(1)} - F'_{\varepsilon\lambda\alpha\tau\,(2)} + m \cdot g = -k_1 \cdot (y + x) - k_2 \cdot (y + x) + m \cdot g = -k_1 \cdot y - k_1 \cdot x - k_2 \cdot y - k_2 \cdot x + m \cdot g \xrightarrow{(6)}$

$\Sigma F = -(k_1 + k_2) \cdot x$ η οποία αποτελεί ικανή συνθήκη για να κάνει το σώμα απλή αρμονική ταλάντωση με $D = k$ και $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$

Περίπτωση 8: Ελατήρια σε σειρά:

Στη θέση ισορροπίας τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος. Όταν το σώμα βρίσκεται σε τυχαία απομάκρυνση x από τη Θ.Ι. του, τα ελατήρια θα είναι επιμηκυμένα κατά x_1 και x_2. Προφανώς ισχύει: $x_1 + x_2 = x$ (1)



Το ελατήριο σταθεράς k_2 δέχεται την $\vec{F}_{\varepsilon\lambda\alpha\tau\,(2)}$ από το σώμα m η οποία είναι η ίδια που ασκείται στο ελατήριο k_2 από το ελατήριο σταθεράς k_1.

Το ελατήριο σταθεράς k_1 δέχεται την $\vec{F}_{\varepsilon\lambda\alpha\tau\,(1)}$ από το ελατήριο σταθεράς k_2 η οποία είναι ίδια με την $\vec{F}_{\varepsilon\lambda\alpha\tau\,(1)}$ που δέχεται το ελατήριο k_1 από τον τοίχο.

Λόγω δράσης – αντίδρασης ισχύει: $F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau\,(1)} = F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau\,(2)} = F$ Έχουμε: $F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau\,(2)} = k_2 \cdot x_2 = F$ και $F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau\,(1)} = k_1 \cdot x_1 = F$, οπότε η (1) γράφεται: $\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = x \Rightarrow F = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2} \cdot x$.

Στην τυχαία θέση του σώματος είναι $\Sigma F = -F = -\frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2} \cdot x$, σχέση που μας δείχνει ότι

το σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με $D = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}$