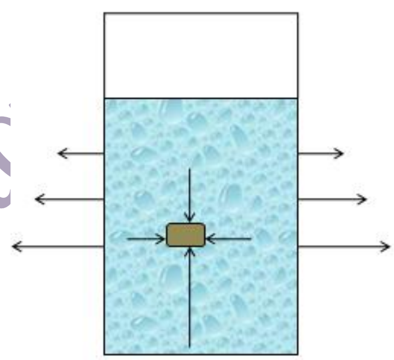
- *Τα ρευστά* είναι τα υγρά και τα αέρια σώματα, τα οποία δεν έχουν δικό τους σχήμα, αλλά παίρνουν το σχήμα του δοχείου που τα περιέχει
- *Τα υγρά* όταν εισέρχονται σε ένα δοχείο καταλαμβάνουν το σχήμα του δοχείου, ενώ ο όγκος τους παραμένει σταθερός
- *Τα υγρά* είναι πρακτικά ασυμπίεστα, δηλ ο όγκος τους είναι ανεξάρτητος από την πίεση
- *Τα αέρια* όταν εισέρχονται σε ένα δοχείο, καταλαμβάνουν όλο τον όγκο του δοχείου
- *Τα αέρια* είναι συμπιεστά, δηλ ο όγκος τους εξαρτάται από την πίεση

- *Πυκνότητα ομογενούς ρευστού*: $\rho = \frac{m}{V}$
- *Πίεση σε σημείο ρευστού*: $P = \frac{F}{A}$

- Την πίεση σε ένα υγρό τη μετράμε με ειδικά όργανα που ονομάζονται μανόμετρα
- Η πίεση είναι μονόμετρο μέγεθος και μετριέται σε $\frac{N}{m^2} = Pa$
- Ένα ρευστό ισορροπεί όταν οποιαδήποτε στοιχειώδη μάζα του δεν κινείται
- Το ρευστό ασκεί δύναμη πάντα κάθετη σε οποιαδήποτε επιφάνεια



- Η συνολική πίεση που ασκεί ένα ρευστό σε ένα σημείο οφείλεται:

✓ Στο βάρος του υγρού όταν το υγρό βρίσκεται σε πεδίο βαρύτητας

✓ Σε κάποιο εξωτερικό αίτιο, όπως η δύναμη που ασκεί κάποιο έμβολο σε μία περιοχή του υγρού

ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

Τι ονομάζουμε υδροστατική πίεση: Η πίεση που οφείλεται στο βάρος του υγρού ονομάζεται υδροστατική πίεση. Προφανώς η υδροστατική πίεση υφίσταται μόνο στην περίπτωση όπου το υγρό βρίσκεται σε πεδίο βαρύτητας

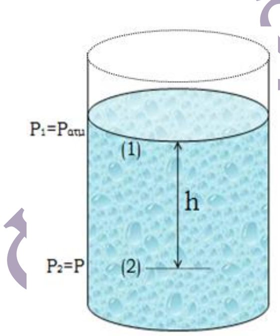
Τι ονομάζουμε ατμοσφαιρική πίεση: Είναι η πίεση της ατμόσφαιρας της Γης, η πίεση στη βάση του αέριου όγκου μέσα στον οποίο ζούμε. Η μέση τιμή της στην επιφάνεια της θάλασσας υπό κανονικές συνθήκες είναι $P_{ατμ} = 1{,}013 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2} = 1{,}013 \cdot 10^5 Pα = 1 atm$

Θεμελιώδης νόμος υδροστατικής:

Υδροστατική πίεση: η πίεση που ασκούν τα ρευστά εξαιτίας του βάρους τους (όταν ισορροπούν).

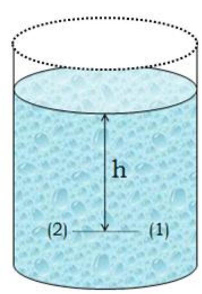
Νόμος της υδροστατικής πίεσης: $P = \rho \cdot g \cdot h$

Η σχέση που δίνει την υδροστατική πίεση σε κάποιο σημείο του χώρου που καταλαμβάνει ένα υγρό σε ισορροπία είναι: $P = \rho \cdot g \cdot h$



όπου h: το βάθος του σημείου (η απόσταση από την ανώτερη επιφάνεια του υγρού) και ρ: η πυκνότητα του υγρού. Για το σημείο 2 έχουμε: $P_2 = \rho \cdot g \cdot h$. Όταν η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού είναι σε επαφή με τον ατμοσφαιρικό αέρα, τότε η ολική πίεση στο σημείο 2 είναι: $P = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h$

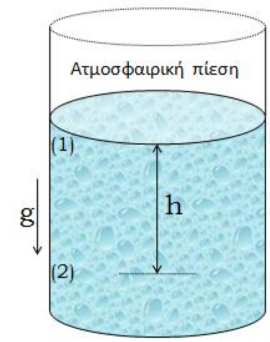
Συνεπώς: Δύο σημεία του ίδιου υγρού που ισορροπεί στο ίδιο βάθος έχουν την ίδια πίεση, δηλαδή $P_1 = P_2$



Παράδειγμα 1: *Να βρεθεί η υδροστατική πίεση, και η ολική πίεση στο σημείο 2.*

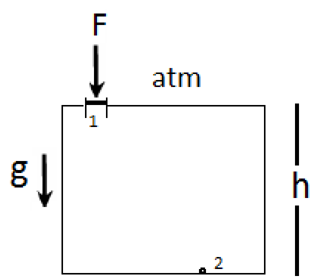
$$P_{υδροσ} = \rho \cdot g \cdot h$$

$$P_2 = P_1 + P_{υδρ} = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h$$



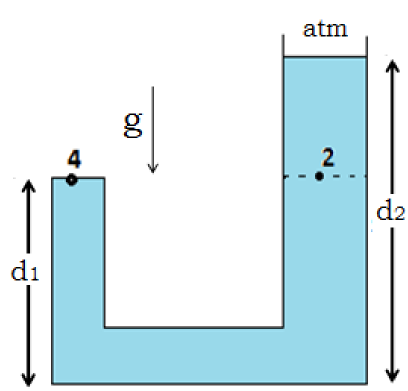
Παράδειγμα 2: *Να βρεθεί η ολική πίεση στο σημείο 2:*

$P_2 = P_1 + \rho \cdot g \cdot h = P_{atm} + P_F + \rho \cdot g \cdot h \Rightarrow P_2 = P_{atm} + \dfrac{F}{A} + \rho \cdot g \cdot h$ όπου Α είναι το εμβαδόν του εμβόλου

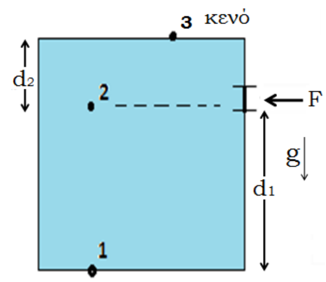


Παράδειγμα 3: *Να βρεθεί η πίεση στο σημείο 4:* $P_4 = P_2$ διότι τα σημεία βρίσκονται στην ίδια ευθεία

$$P_4 = P_2 = P_{ατμ} + \rho \cdot g \cdot (d_2 - d_1)$$



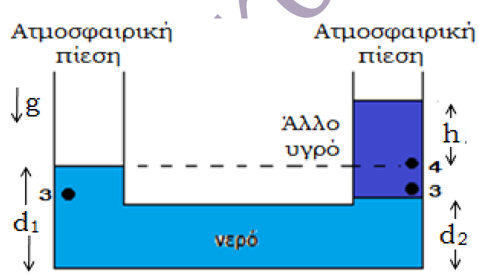
Παράδειγμα 4: *Να βρεθούν οι πιέσεις στα σημεία 1 και 2 στην περίπτωση κλειστού δοχείου που δεν υπάρχει εξωτερικά ατμοσφαιρική πίεση και βρισκόμαστε εντός πεδίου βαρύτητας*



$$P_1 = P_2 + \rho \cdot g \cdot d_1 = P_F + \rho \cdot g \cdot d_1 = \frac{F}{A} + \rho \cdot g \cdot d_1$$

$$P_3 = P_2 + \rho \cdot g \cdot d_2 = \frac{F}{A} + \rho \cdot g \cdot d_2$$

Παράδειγμα 5: *Να βρεθεί η πίεση στο σημείο 4 στην περίπτωση που γνωρίζουμε μόνο τα* d_1, d_2, $\rho_{\upsilon\gamma\rho}$, $\rho_{\nu\varepsilon\rho o\acute{\upsilon}}$ *και* P_{atm} *καθώς και στην περίπτωση που γνωρίζουμε* h, $\rho_{\upsilon\gamma\rho}$, $\rho_{\nu\varepsilon\rho o\acute{\upsilon}}$ *και* P_{atm}



Τη μελέτη αυτής της ισορροπίας τη διευκολύνει η παρατήρηση ότι οι πιέσεις στη διαχωριστική επιφάνεια (1) των δυο υγρών και στην ακριβώς απέναντί της επιφάνεια (2) του άλλου σωλήνα είναι ίσες.

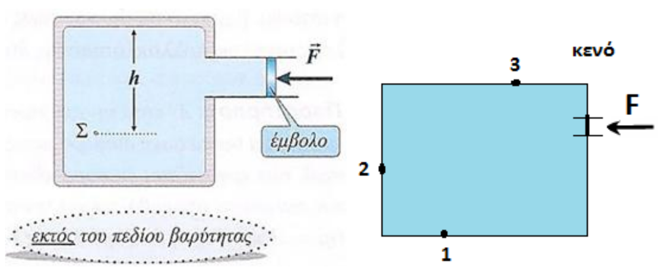
$P_3 = P_4 + \rho_{\upsilon\gamma\rho} \cdot g \cdot (d_1 - d_2)$ και $P_3 = P_{atm} + \rho_{\nu\varepsilon\rho} \cdot g \cdot (d_1 - d_2)$

Εξισώνοντας, έχουμε: $P_4 + \rho_{\upsilon\gamma\rho} \cdot g \cdot (d_1 - d_2) = P_{atm} + \rho_{\nu\varepsilon\rho} \cdot g \cdot (d_1 - d_2) \Rightarrow P_4 = (\rho_{\nu\varepsilon\rho} - \rho_{\upsilon\gamma\rho}) \cdot g \cdot (d_1 - d_2)$

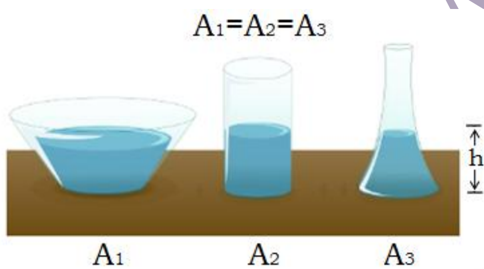
Στην περίπτωση που μας είχαν δώσει ως δεδομένο το h, τότε

$$P_4 = P_{\alpha\tau\mu} + \rho_{\upsilon\gamma\rho} \cdot g \cdot h$$

Παράδειγμα 6: Όταν το υγρό βρίσκεται εκτός πεδίου βαρύτητας δεν υπάρχει υδροστατική πίεση, επομένως η πίεση σε οποιοδήποτε σημείο του υγρού, θα οφείλεται μόνο σε κάποιο εξωτερικό αίτιο. Για τον ίδιο λόγο, σε οποιοδήποτε από τα σημεία 1, 2 και 3 θα ασκείται η ίδια πίεση: $P_1 = P_2 = P_3 = P_F = \dfrac{F}{A}$



Παράδειγμα 7: *Να συγκριθούν α) Οι πιέσεις στον πυθμένα, β) Οι δυνάμεις που ασκούνται, γ) Τα βάρη των υγρών. Δίνεται ότι οι βάσεις των δοχείων έχουν ίδιο εμβαδό Α*



α) $P_1 = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h$ $\qquad P_2 = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h$ $\qquad P_3 = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h$

Άρα οι πιέσεις στις βάσεις των δοχείων είναι ίσες

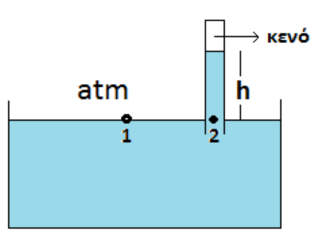
β) $P_1 = P_2 = P_3 \Rightarrow \dfrac{F_1}{A_1} = \dfrac{F_2}{A_2} = \dfrac{F_3}{A_3} \xrightarrow{A_1 = A_2 = A_3} F_1 = F_2 = F_3$

Άρα οι δυνάμεις στις βάσεις των δοχείων είναι ίσες

γ) Από το σχήμα παρατηρώ ότι τη μεγαλύτερη ποσότητα υγρού την έχει το δοχείο 1. Άρα $w_1 > w_2 > w_3$

Παράδειγμα 8: *Να βρείτε το ύψος h της στήλης.* Έχουμε: $P_1 = P_{atm}$ και $P_2 = P_{κενού} + \rho \cdot g \cdot h$

$$P_1 = P_2 \Rightarrow P_{atm} = P_{κενού} + \rho \cdot g \cdot h \xrightarrow{P_{κενού} = 0} P_{atm} = \rho \cdot g \cdot h \Rightarrow h = \frac{p_{atm}}{\rho \cdot g}$$

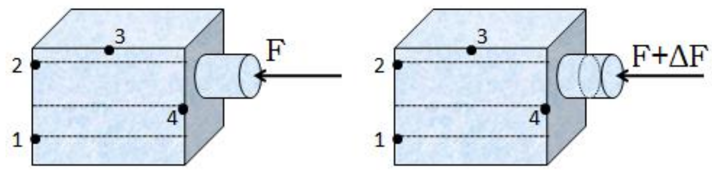


Αρχή του Pascal:

Σε ένα κλειστό υγρό που ισορροπεί, η επιπλέον πίεση που δημιουργείται σε ένα σημείο μεταφέρεται αναλλοίωτη σε όλο το υγρό.

- Όταν το δοχείο βρίσκεται εκτός πεδίου βαρύτητας, τα σημεία 1, 2, 3 και 4 έχουν την ίδια πίεση

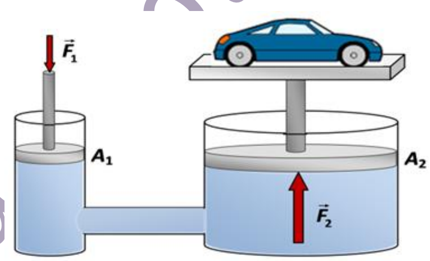
Αν αυξηθεί η δύναμη που ασκείται στο έμβολο κατά ΔF, θα αυξηθεί και η πίεση σε όλα τα σημεία.



- Όταν το δοχείο βρίσκεται εντός πεδίου βαρύτητας, τα σημεία 1, 2, 3 και 4 έχουν διαφορετική πίεση, ανάλογα με το βάθος στο οποίο βρίσκονται. Αν αυξηθεί η δύναμη που ασκείται στο έμβολο κατά ΔF, θα αυξηθεί και η πίεση σε όλα τα σημεία και σε αυτήν την περίπτωση

Παράδειγμα 9: Υδραυλικός ανυψωτήρας - πιεστήριο.

Που στηρίζεται η λειτουργία του «υδραυλικού ανυψωτήρα»; Στην μετάδοση της πίεσης (Αρχή του Pascal) λόγω ενός εξωτερικού αιτίου σε όλα τα σημεία του υγρού.



Για το πρώτο έμβολο ισχύει: $P_1 = \dfrac{F_1}{A_1}$ και για το δεύτερο έμβολο ισχύει: $P_2 = \dfrac{F_2}{A_2}$

$$P_1 = P_2 \Rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1} \Rightarrow F_2 = F_1 \cdot \frac{A_2}{A_1}$$

Επομένως με μικρή δύναμη στο έμβολο (1), μπορούμε να πάρουμε στο έμβολο (2) μεγάλη δύναμη, ώστε να ανυψώσουμε βαριά αντικείμενα π.χ. αυτοκίνητα.

Δηλ.: *ο «υδραυλικός ανυψωτήρας» λειτουργεί ως ένα είδος μοχλού ή πιο απλά πολλαπλασιαστής δύναμης*

Παράδειγμα 10: Υδραυλικός ανυψωτήρας και ενέργεια

Η ενέργεια που ξοδεύουμε, μέσω του έργου $\left(dW_{F_1}\right)$ της δύναμης F_1, για την μετακίνηση του εμβόλου (1) κατά dy_1 είναι: $E_{\delta\alpha\pi} = dW_{F_1} = F_1 \cdot dy_1$ (1) Ενώ η ενέργεια που παρέχει το υγρό στο έμβολο (2) είναι: $E_{\upsilon\gamma\rho} = dW_{F_2} = F_2 \cdot dy_2$ (2)

Επειδή όμως το υγρό είναι ασυμπίεστο ισχύει ότι:

$$dV_1 = dV_2 \Rightarrow A_1 \cdot dy_1 = A_2 \cdot dy_2 \Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = \frac{dy_1}{dy_2} \, (3)$$

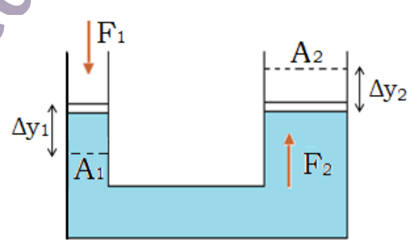
Στον «υδραυλικό ανυψωτήρα» δείξαμε ότι: $F_2 = F_1 \cdot \frac{A_2}{A_1} \Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = \frac{F_2}{F_1}$ (4)

Από (3)και (4): $\frac{F_2}{F_1} = \frac{dy_2}{dy_1} \Rightarrow F_2 \cdot dy_1 = F_1 \cdot dy_2$ οπότε από (1)και (2)προκύπτει ότι: $E_{\delta\alpha\pi} = E_{\upsilon\gamma\rho}$

Άρα: *«Η ενέργεια που ξοδεύουμε για να μετακινήσουμε το έμβολο (1) του υδραυλικού ανυψωτήρα, μεταφέρεται μέσω του υγρού, αμετάβλητο, στο έμβολο (2) και επομένως στο σώμα που ανυψώνει. Με την προϋπόθεση βέβαια ότι δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας λόγω τριβών».*

Παράδειγμα 11: Να βρεθεί ο λόγος της ενέργειας που ξοδέψαμε για να μετακινήσουμε το έμβολο (1) προς την ενέργεια που παρέχει το υγρό στο έμβολο (2). Δίνεται ότι $A_2 = 5A_1$

$$P_1 = P_2 \Rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1} \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{5A_1}{A_1} = 5 \Rightarrow F_2 = 5F_1$$



Επειδή όμως το υγρό είναι ασυμπίεστο ισχύει ότι:

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 \Rightarrow A_1 \cdot \Delta y_1 = A_2 \cdot \Delta y_2 \Rightarrow A_1 \cdot \Delta y_1 = 5 \cdot A_1 \cdot \Delta y_2 \Rightarrow \Delta y_2 = \frac{\Delta y_1}{5}$$

$$\frac{WF_1}{WF_2} = \frac{F_1 \cdot \Delta y_1}{F_2 \cdot \Delta y_2} = \frac{F_1 \cdot \Delta y_1}{5F_1 \cdot \frac{\Delta y_1}{5}} = 1$$

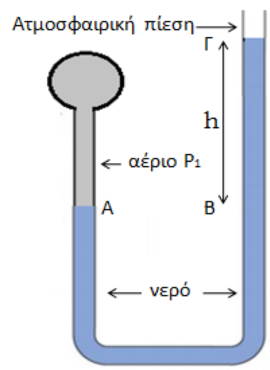
Παράδειγμα 12: Να βρεθεί η πίεση του αερίου P_1

$$P_A = P_{αερίου} = P_1$$

$$P_B = P_Γ + \rho \cdot g \cdot h = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h$$

Όμως: P_A=P_B άρα έχουμε:

$$P_A = P_B \Rightarrow P_1 = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h$$



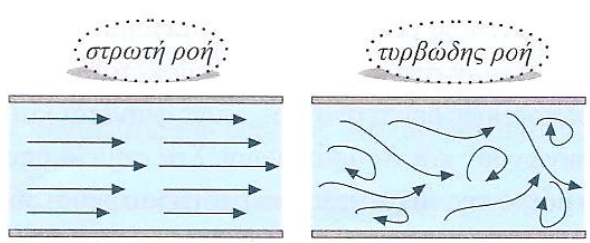
ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ

Όταν ένα ρευστό είναι σε κίνηση, τότε όλες οι στοιχειώδεις μάζες του κινούνται. Η ροή ενός ρευστού ονομάζεται στρωτή, όταν τα παρακείμενα επίπεδα (στρώσεις) που το αποτελούν κινούνται απρόσκοπτα το ένα σε σχέση με το άλλο.

Ένα παράδειγμα είναι η ροή του νερού που εξέρχεται από τη βρύση όταν την έχουμε ανοίξει λίγο, οπότε η ποσότητα του νερού που εξέρχεται από αυτήν είναι μικρή.

Αντίθετα, στην τυρβώδη ή στροβιλώδη ροή δημιουργούνται στο ρευστό δίνες, οι οποίες χαλάνε την ομαλή πορεία κίνησης των στρώσεων του υγρού.

Ένα παράδειγμα είναι η ροή του νερού που εξέρχεται από μια βρύση, που έχουμε ανοίξει πολύ, οπότε παρατηρούμε τυρβώδη ροή, στην οποία τα σωματίδια του νερού έχουν πολύπλοκη ροή.



Μόνιμη ροή: η ροή όπου η ταχύτητα του ρευστού σε κάθε σημείο του παραμένει σταθερή με την πάροδο του χρόνου.

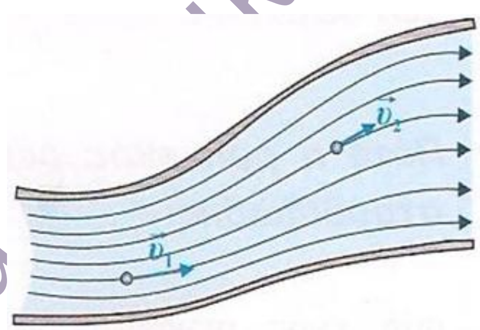
Τι ονομάζουμε ιδανικό ρευστό:

Για να θεωρείται ένα ρευστό ιδανικό, πρέπει:

(α) Να είναι εντελώς ασυμπίεστο, (β) Να μην εμφανίζει εσωτερικές τριβές και τριβές με τα τοιχώματα του σωλήνα μέσα στον οποίο ρέει. Η ροή ενός ιδανικού ρευστού είναι στρωτή και θα μελετήσουμε μόνο τη ροή ιδανικών υγρών

Τι ονομάζουμε ρευματική γραμμή:

Είναι η πορεία που ακολουθεί μία στοιχειώδης μάζα του ρευστού. Η ταχύτητα κάθε στοιχείου ενός ιδανικού ρευστού είναι εφαπτόμενη στη ρευματική γραμμή στο σημείο που βρίσκεται. Στην περίπτωση της στρωτής ροής, οι ρευματικές γραμμές δεν τέμνονται, μπορούν να πυκνώνουν και να αραιώνουν. Στα σημεία όπου οι ρευματικές γραμμές είναι πιο πυκνές το μέτρο της ταχύτητας του στοιχείου ρευστού είναι πιο μεγάλο. Επίσης, στην περιοχή όπου οι ρευματικές γραμμές είναι παράλληλες και ισαπέχουσες, κάθε στοιχείο του ρευστού έχει την ίδια ταχύτητα.

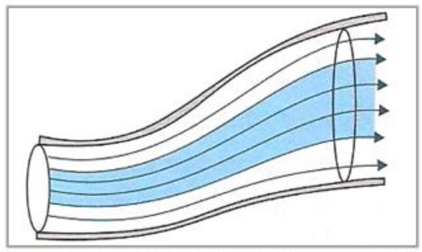


Ιδιότητες των ρευματικών γραμμών:

Ποτέ δεν τέμνονται, στην στρωτή ροή (διαφορετικά θα είχαμε δυο ή περισσότερες ταχύτητες το ρευστού σε ένα σημείο του). Η πυκνότητα των ρευματικών γραμμών, είναι ανάλογη της ταχύτητας του ρευστού, δηλ. εκεί όπου η ταχύτητα του στοιχείου του ρευστού είναι μεγάλη, θα έχουμε πύκνωση των ρευματικών γραμμών. Στις περιοχές , όπου οι ρευματικές γραμμές είναι παράλληλες, κάθε στοιχείο του ρευστού έχει την ίδια ταχύτητα

Τι ονομάζουμε ρευματική φλέβα:

Είναι το σύνολο των παρακείμενων ρευματικών γραμμών. Το ρευστό που ρέει σε μία φλέβα δεν αναμειγνύεται με το περιεχόμενο άλλης φλέβας του σωλήνα μεταφοράς του ρευστού. Με άλλα λόγια, το ρευστό που ρέει σε μία φλέβα παραμένει σε αυτήν τη φλέβα σε όλη τη διάρκεια της ροής του.



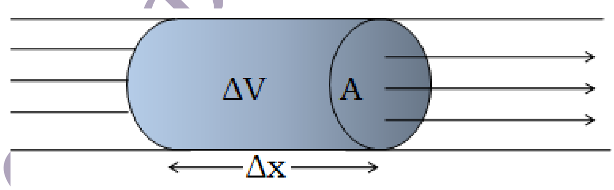
Η γαλάζια περιοχή αποτελεί μία φλέβα του ρευστού

Τι ονομάζουμε παροχή ενός σωλήνα ή μιας φλέβας ενός ρευστού: Είναι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του υγρού που περνάει από μία διατομή: $\Pi = \frac{dV}{dt}$ Η παροχή έχει μονάδες μέτρησης στο S.I. το 1 m^3/s

Ποιος είναι ο τύπος που συνδέει την παροχή με την ταχύτητα ροής του ρευστού:

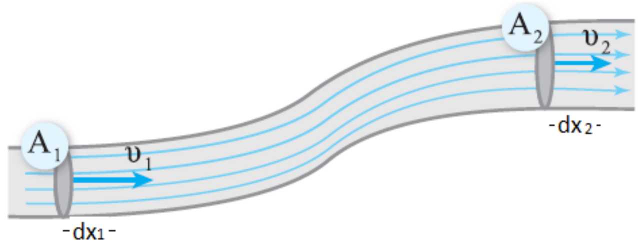
Αν θεωρήσουμε ότι το εμβαδόν διατομής του σωλήνα ή της φλέβας ισούται με A, τότε ο όγκος dV του ρευστού που διέρχεται από τη διατομή αυτή σε χρόνο dt είναι:

$$\Pi = \frac{dV}{dt} = \frac{A \cdot dx}{dt} = A \cdot \upsilon$$



Η παροχή σωλήνα ή φλέβας σε κάποια θέση είναι ίση με το γινόμενο του εμβαδού της διατομής επί την ταχύτητα του ρευστού στη θέση αυτή.

Ποια είναι η εξίσωση συνέχειας και σε ποια βασική αρχή της φυσικής βασίζεται:



Επειδή το ρευστό είναι ασυμπίεστο, πρέπει η ποσότητα του ρευστού μάζας ***dm₁*** που διέρχεται σε χρόνο ***dt*** από την επιφάνεια εμβαδού ***A₁*** να ισούται με την ποσότητα ρευστού μάζας ***dm₂*** που διέρχεται από την επιφάνεια εμβαδού ***A₂*** στον ίδιο χρόνο: $dm_1 = dm_2 \Rightarrow \rho \cdot dV_1 = \rho \cdot dV_2 \Rightarrow dV_1 = dV_2$

όπου dV_1 και dV_2 είναι οι στοιχειώδεις όγκοι που καταλαμβάνουν μέσα στο σωλήνα οι ποσότητες ρευστού μάζας dm_1 και dm_2 αντίστοιχα. Έχουμε:

$$dV_1 = dV_2 \Rightarrow A_1 \cdot dx_1 = A_2 \cdot dx_2 \Rightarrow A_1 \cdot \upsilon_1 \cdot dt = A_2 \cdot \upsilon_2 \cdot dt \Rightarrow A_1 \cdot \upsilon_1 = \mathrm{A}_2 \cdot \upsilon_2 \Rightarrow \Pi_1 = \Pi_2$$

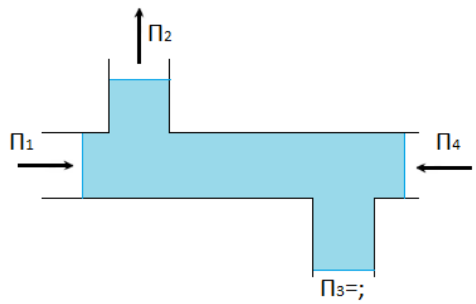
Η εξίσωση συνέχειας αναφέρει ότι $\Pi_1 = \Pi_2$

Παρατηρήσεις:

- Η παροχή κατά μήκος ενός σωλήνα που διαρρέεται από ιδανικό ρευστό παραμένει σταθερή. Αυτό σημαίνει ότι κατά μήκος ενός σωλήνα που δεν έχει σταθερή διατομή η ταχύτητα που υγρού δεν είναι παντού ίδια. Μάλιστα, στα σημεία όπου στενεύει ο σωλήνας η ταχύτητα ροής του ρευστού είναι πιο μεγάλη. Το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση ενός ποταμού. Στα σημεία όπου ένα ποτάμι είναι ρηχό (μικρό εμβαδόν εγκάρσιας διατομής) το νερό κυλάει γρηγορότερα σε σχέση με τα σημεία στα οποία το ποτάμι βαθαίνει. Το ίδιο συμβαίνει με το λάστιχο νερού όταν τοποθετούμε το δάκτυλο μας στην έξοδο του νερού με σκοπό να το αναγκάσουμε να κινηθεί με μεγαλύτερη ταχύτητα και έτσι να αυξήσουμε την εμβέλεια ποτίσματος.
- Η «εξίσωσης της συνέχειας» εφαρμόζεται κατά μήκος φλέβας ή σωλήνα και όχι ρευματικής γραμμής.
- Η «εξίσωση της συνέχειας βασίζεται στην *«αρχή διατήρησης της ύλης»*.

- Παράδειγμα 13: *Δίνεται ότι:* $\Pi_1 = 1\frac{m^3}{s}$, $\Pi_2 = 0{,}5\frac{m^3}{s}$, $\Pi_4 = 0{,}25\frac{m^3}{s}$ *Να βρεθεί:*

α) η φορά και η παροχή Π_3, β) ο ρυθμός μεταβολής της μάζας στην παροχή Π_4 αν $\rho = 1\frac{L}{kg}$

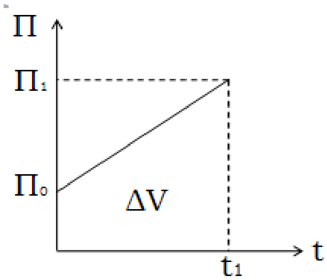


α) Πρέπει η παροχή που εισέρχεται να ισούται με την παροχή που εξέρχεται. Έστω ότι η παροχή της Π_3 εισέρχεται. Τότε θα έχουμε: $\Pi_{εισ} = \Pi_{εξ} \Rightarrow \Pi_1 + \Pi_4 + \Pi_3 = \Pi_2 \Rightarrow 1 + 0{,}25 + \Pi_3 = \Pi_2 \Rightarrow \Pi_3 = -0{,}75\frac{m^3}{s}$, άρα η παροχή της Π_3 εξέρχεται

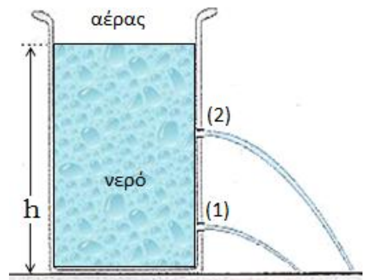
β) $\left.\frac{dm}{dt}\right|_{\Pi_4} = \frac{\rho \cdot dV_4}{dt} = \rho \cdot \Pi_4 \xrightarrow{*} 10^{-3} \cdot 0{,}25 = 25 \cdot 10^{-5}\frac{kg}{s}$

$* \rho = 1\frac{L}{kg} \xrightarrow{1L = 10^{-3} m^3} \rho = 10^{-3}\frac{m^3}{kg}$

Παρατήρηση: Όταν η παροχή ενός σωλήνα δεν είναι σταθερή, τότε για να βρω τον όγκο πρέπει να βρω το εμβαδό του διαγράμματος παροχής συναρτήσει του χρόνου. Η παροχή μπορεί να μην είναι σταθερή στην περίπτωση αυξομείωσης της βρύσης σε ένα λάστιχο νερού.



Ένα πρόβλημα στο οποίο θέλει προσοχή η εφαρμογή της «εξίσωσης της συνέχειας»: Εδώ για την ταχύτητα εκροής του υγρού από τις οπές (1) και (2) δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την εξίσωση της συνέχειας ξεχωριστά για την ελεύθερη επιφάνεια και τις οπές (1) και (2).



Δηλαδή είναι λάθος να γράψουμε:

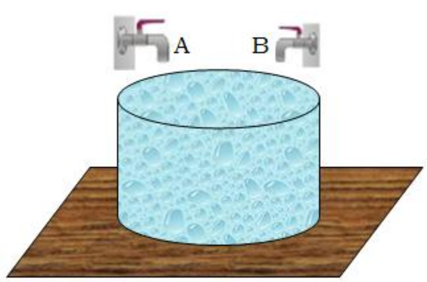
$$\Pi_{\varepsilon\pi\iota\phi} = \Pi_1 \Rightarrow A_{\varepsilon\pi\iota\phi} \cdot \upsilon_{\varepsilon\pi\iota\phi} = A_1 \cdot \upsilon_1 \xrightarrow{A_{\varepsilon\pi\iota\phi} >> A_1} \upsilon_{\varepsilon\pi\iota\phi} = 0$$

$$\Pi_{\varepsilon\pi\iota\phi} = \Pi_2 \Rightarrow A_{\varepsilon\pi\iota\phi} \cdot \upsilon_{\varepsilon\pi\iota\phi} = A_2 \cdot \upsilon_2 \xrightarrow{A_{\varepsilon\pi\iota\phi} >> A_2} \upsilon_{\varepsilon\pi\iota\phi} = 0$$

Αφού η «εξίσωση της συνέχειας» εκφράζει την «αρχή διατήρησης της ύλης» θα έπρεπε να ισχύει: $\Pi_{\varepsilon\pi\iota\phi} = \Pi_1 + \Pi_2$ Επομένως σε αυτήν την περίπτωση εφαρμόζουμε την «εξίσωση του Bernoulli» για κάθε οπή, όπως θα δούμε παρακάτω, και βγάζουμε τους τύπους: $\upsilon_1 = \sqrt{2gh_1}$ και $\upsilon_2 = \sqrt{2gh_2}$ (Θεώρημα Torricelli), αρκεί να πούμε μια φορά μόνο ότι:

Επειδή η ελεύθερη επιφάνεια είναι πολύ μεγάλου εμβαδού, πρακτικά παραμένει ακίνητη ή κατεβαίνει πολύ αργά, ώστε να μπορούμε να θεωρούμε $\rightarrow \upsilon_{\varepsilon\pi\iota\phi} = 0$

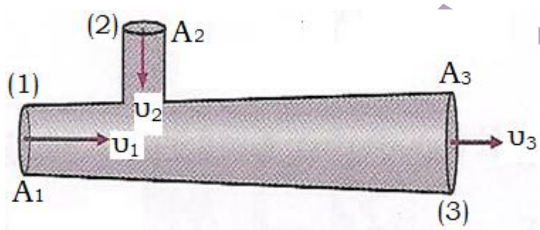
Παράδειγμα 14: Αν είναι ανοικτή μόνο η βρύση A, η μεγάλη δεξαμενή του σχήματος γεμίζει σε χρόνο t_1. Αν είναι ανοικτή μόνο η βρύση B, η δεξαμενή γεμίζει σε χρόνο t_2. Αν είναι ανοικτές και οι δυο βρύσες ταυτόχρονα, σε πόσο χρόνο $t_{o\lambda}$ γεμίζει η δεξαμενή;



Λύση: Έστω ΔV ο όγκος της δεξαμενής, Π_1, Π_2 οι παροχές νερού από τις βρύσες (1) και (2) αντίστοιχα και Π η παροχή του νερού και από τις δυο βρύσες μαζί. Εφαρμόζοντας την «εξίσωση της συνέχειας» έχουμε: $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 \Rightarrow \frac{\Delta V}{t_{o\lambda}} = \frac{\Delta V}{t_1} + \frac{\Delta V}{t_2} \Rightarrow t_{o\lambda} = \frac{t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2}$

Παράδειγμα 15: *Ανάμιξη υγρών διαφορετικών πυκνοτήτων σε υδραυλική εγκατάσταση–υπολογισμός τελικής πυκνότητας*

Από τις εισόδους (1) και (2) εισέρχονται δυο διαφορετικά υγρά με πυκνότητες ρ_1 = 700 Kg/m^3, ρ_2 = 1000 Kg/m^3 αντίστοιχα. Οι είσοδοι (1) , (2) και (3) έχουν διατομές A_1 = 8 cm^2, A_2 = 10 cm^2 και A_3 = 12 cm^3 αντίστοιχα. Για τις ταχύτητες εισόδου των υγρών έχουμε: υ_1 = 10 m/s και υ_2 = 4 m/s. Μετά την ανάμειξη των δυο υγρών προκύπτει υγρό πυκνότητας ρ που εξέρχεται από την έξοδο (3) με ταχύτητα υ_3.



A) Ποια είναι η ταχύτητα υ_3;

B) Πόση είναι η πυκνότητα ρ του εξερχόμενου υγρού;

Λύση:

A) «Εξίσωση συνέχειας»: $\Pi_1 + \Pi_2 = \Pi_3 \Rightarrow A_1 \cdot \upsilon_1 + A_2 \cdot \upsilon_2 = A_3 \cdot \upsilon_3 \Rightarrow \upsilon_3 = 10 m/s$

B) Για την απάντηση στο ερώτημα αυτό χρησιμοποιούμε την «αρχή διατήρησης της μάζας», που σημαίνει ότι όσο υγρό μπαίνει σε χρόνο Δt ,τόσο υγρό βγαίνει, στον ίδιο χρόνο Δt από την υδραυλική εγκατάσταση. Επομένως: $\Delta m_1 + \Delta m_2 = \Delta m_3 \Rightarrow \rho_1 \cdot \Delta V_1 + \rho_2 \cdot \Delta V_2 = \rho_3 \cdot \Delta V_3 \Rightarrow \frac{\rho_1 \cdot \Delta V_1}{\Delta t} + \frac{\rho_2 \cdot \Delta V_2}{\Delta t} = \frac{\rho \cdot \Delta V_3}{\Delta t}$

$$\Rightarrow \rho_1 \cdot \Pi_1 + \rho_2 \cdot \Pi_2 = \rho_3 \cdot \Pi_3 \Rightarrow \rho_1 \cdot A_1 \cdot \upsilon_1 + \rho_2 \cdot A_2 \cdot \upsilon_2 = \rho \cdot A_3 \cdot \upsilon_3 \Rightarrow \rho = 800 kg/m^3$$

- ***<u>Κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου:</u>***

$$\frac{K}{\Delta V}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\Delta m\cdot\upsilon^2}{\Delta V}\xrightarrow{\frac{\Delta m}{\Delta V}=\rho}\frac{K}{\Delta V}=\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\upsilon^2 \quad \text{με μονάδες μέτρησης } \frac{J}{m^3}$$

- ***<u>Δυναμική βαρυτική ενέργεια ανά μονάδα όγκου:</u>***

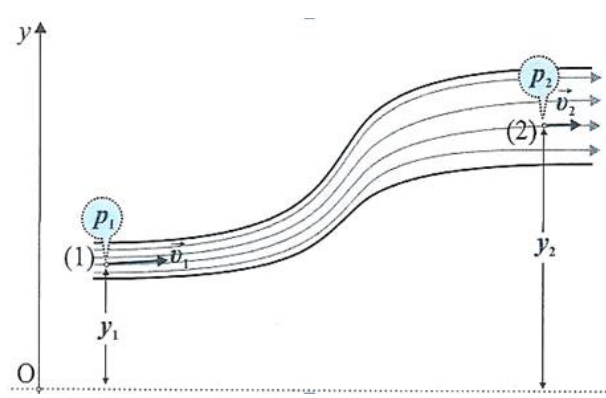
$$\frac{U_{\beta\alpha\rho.\delta\upsilon\nu.}}{\Delta V}=\frac{\Delta m\cdot g\cdot y}{\Delta V}\xrightarrow{\frac{\Delta m}{\Delta V}=\rho}\frac{U_{\beta\alpha\rho.\delta\upsilon\nu.}}{\Delta V}=\rho\cdot g\cdot y \quad \text{με μονάδες μέτρησης } \frac{J}{m^3}$$

Ποια είναι η εξίσωση Bernoulli και σε ποια βασική αρχή της φυσικής βασίζεται:

Η εξίσωση Bernoulli αναφέρεται σε δύο οποιαδήποτε σημεία μιας ρευματικής γραμμής και συσχετίζει την πίεση του υγρού στα δύο αυτά σημεία, την υψομετρική τους διαφορά, καθώς και την ταχύτητα του ρευστού στα σημεία αυτά. Αν θεωρήσουμε ένα ιδανικό ρευστό, που η ροή του είναι στρωτή και μόνιμη, τότε για δύο σημεία (1) και (2) της ίδιας ρευματικής γραμμής μπορούμε να γράψουμε:

$$P_1+\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\upsilon_1^2+\rho\cdot g\cdot y_1=P_2+\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\upsilon_2^2+\rho\cdot g\cdot y_2$$

Το άθροισμα της πίεσης P, της κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου $\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\upsilon^2$ και της δυναμικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου $\rho\cdot g\cdot y$ έχει την ίδια σταθερή τιμή σε οποιοδήποτε σημείο μιας ρευματικής γραμμής, δηλαδή: $P+\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\upsilon^2+\rho\cdot g\cdot y=\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$



Παρατηρήσεις:

- Η «Εξίσωση του Bernoulli» εφαρμόζεται κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής.
- Η «Εξίσωση του Bernoulli» εκφράζει την «αρχή διατήρησης της ενέργειας».
- Προσοχή!! Η «εξίσωση του Bernoulli» ισχύει με τις εξής *παραδοχές*:

❖ Η ροή να είναι μόνιμη.

❖ Οι τριβές που εμφανίζει το ρευστό να είναι αμελητέες.

❖ Το ρευστό να είναι ασυμπίεστο.

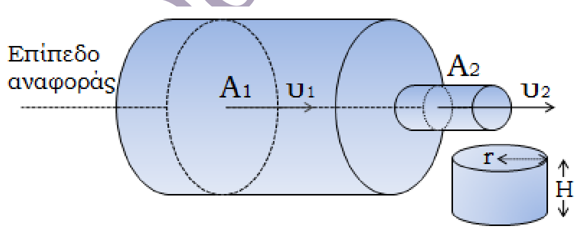
❖ Η ανταλλαγή θερμότητας του ρευστού με το περιβάλλον αμελητέα.

❖ Μεταξύ των σημείων της ρευματικής γραμμής, όπου εφαρμόζεται, να μην υπάρχει συσκευή που να προσφέρει ενέργεια στο ρευστό (π.χ. αντλία, ανεμιστήρας) ή να απορροφά ενέργεια από αυτό (π.χ. τουρμπίνα)

Παράδειγμα 16: Δίνεται $A_1 = 2 \cdot A_2$, υ_1, ρ_1 Να βρεθεί:

α) $P_1 - P_2$;

β) Σε πόσο χρόνο γεμίζει το δοχείο ύψους H και ακτίνας r;



α) $Bernoulli_{1\to 2}$: $P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \upsilon_1^2 + 0 = P_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \upsilon_2^2 + 0 \Rightarrow P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2)$ (1)

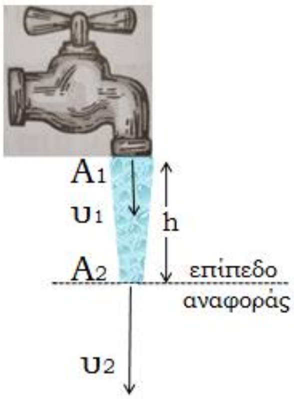
Όμως: $\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1 \cdot \upsilon_1 = A_2 \cdot \upsilon_2 \xrightarrow{A_1 = 2A_2} \upsilon_2 = 2 \cdot \upsilon_1$ (2)

$(1) \xrightarrow{(2)} P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (4\upsilon_1^2 - \upsilon_1^2) \Rightarrow P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot 3 \cdot \upsilon_1^2$

β) Όγκος δοχείου: $V = \beta\acute{\alpha}\sigma\eta \cdot \acute{\upsilon}\psi o\varsigma = \pi \cdot r^2 \cdot H$

$\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta V}{\Pi} \Rightarrow \frac{\pi \cdot r^2 \cdot H}{A_1 \cdot \upsilon_1}$

Παράδειγμα 17:Δίνεται A_1, h, g, V_1



α) Να βρεθούν τα A_2, υ_2

β) $\left.\frac{dm}{dt}\right|_{\mathrm{A}_2}$

α) $\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow \mathrm{A}_1 \cdot \upsilon_1 = \mathrm{A}_2 \cdot \upsilon_2 \Rightarrow A_2 = \frac{A_1 \cdot \upsilon_1}{\upsilon_2}$ (1)

$$Bernoulli_{1\to 2}:\ P_1 + \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\upsilon_1^2 + \rho\cdot g\cdot h = P_2 + \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\upsilon_2^2 + 0$$

Όμως $P_1 = P_2 = P_{\alpha\tau\mu}$, άρα $P_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\upsilon_1^2 + \rho\cdot g\cdot h = P_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\upsilon_2^2 \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}\upsilon_1^2 + g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot\upsilon_2^2 \Rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_1^2 + 2\cdot g\cdot h}$$

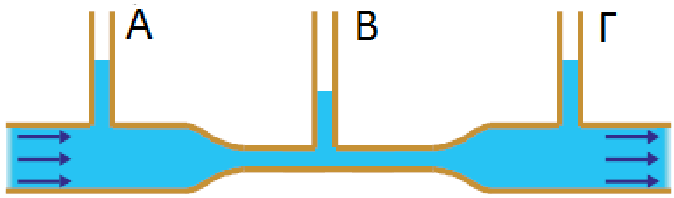
$$(1) \Rightarrow A_2 = \frac{A_1\cdot\upsilon_1}{\sqrt{\upsilon_1^2 + 2\cdot g\cdot h}}$$

β) $\left.\frac{dm}{dt}\right|_{\mathrm{A}_2} = \frac{\rho\cdot dV_2}{dt} = \rho\cdot\Pi_2 = \rho\cdot\mathrm{A}_2\cdot\upsilon_2$

Ποια μορφή παίρνει η εξίσωση Bernoulli στην περίπτωση όπου ο σωλήνας είναι οριζόντιος;

Αν ο σωλήνας στον οποίο κινείται το ρευστό είναι οριζόντιος, τότε δεν υπάρχει αλλαγή του ύψους μεταξύ των δύο σημείων μιας οριζόντιας γραμμής, οπότε η εξίσωση Bernoulli γράφεται:

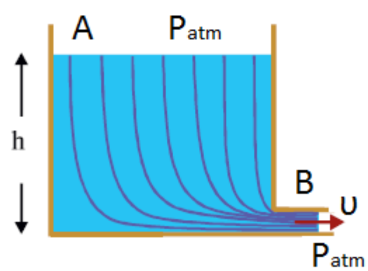
$$P_1 + \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\upsilon_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\upsilon_2^2 \quad \text{ή} \quad P + \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\upsilon^2 = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$$



Στο στενό τμήμα σου σωλήνα η πίεση είναι μικρότερη και γι αυτό το ύψος της στήλης Β είναι μικρότερο

Από την εξίσωση συνέχειας είναι γνωστό ότι στα στενά σημεία ενός σωλήνα (μικρότερο εμβαδόν διατομής) η ταχύτητα του ρευστού είναι μεγαλύτερη. Από τον τύπο $P + \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\upsilon^2 = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$ είναι φανερό ότι στα σημεία όπου η ταχύτητα είναι μεγαλύτερη, η πίεση είναι μικρότερη. Με άλλα λόγια, στα σημεία όπου ο σωλήνας στενεύει η πίεση του ρευστού είναι μικρότερη.

Θεώρημα Torricelli: Το μέτρο της ταχύτητας εκροής υγρού από το στόμιο του δοχείου που βρίσκεται σε βάθος h από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού ισούται με το μέτρο της ταχύτητας που θα είχε το υγρό αν έπεφτε ελεύθερα από ύψος h.



Το σημείο Α βρίσκεται στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού, ενώ το σημείο Β βρίσκεται στην έξοδο από το στόμιο, οπότε: $P_A + \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\upsilon_A^2 + \rho\cdot g\cdot h = P_B + \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\upsilon_B^2$

Είναι $P_A = P_B = P_{atm}$ και $\upsilon_A = 0$

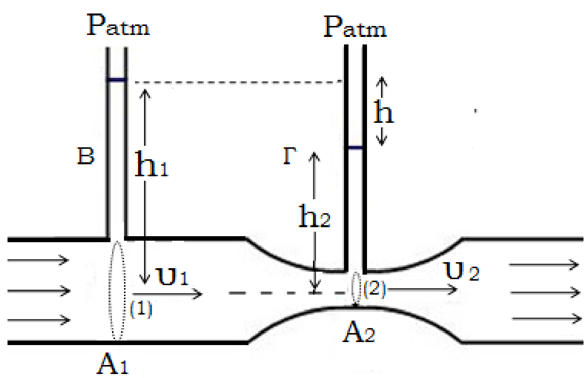
$$P_{atm} + \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\upsilon_A^2 + \rho\cdot g\cdot h = P_{atm} + \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\upsilon_B^2 \Rightarrow \upsilon_B = \sqrt{2\cdot g\cdot h}$$

Το αποτέλεσμα που προέκυψε περιγράφεται από το θεώρημα Torricelli.

Αν αφήσουμε μία οποιαδήποτε ποσότητα νερού να εκτελέσει ελεύθερη πτώση από ύψος h πάνω από το έδαφος, τότε το μέτρο της ταχύτητας με την οποία θα φτάσει στο έδαφος μπορεί να υπολογιστεί από τους νόμους της ελεύθερης πτώσης. Είναι:

$\upsilon = g \cdot t$ και $h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ Με απαλοιφή του χρόνου προκύπτει ότι: $\upsilon = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$

Τι είναι το ροόμετρο Venturi και τι μπορούμε να μετρήσουμε με αυτό;



Το ροόμετρο Venturi είναι μία διάταξη με την οποία μπορούμε να μετρήσουμε την ταχύτητα ροής σε κάποιο σημείο ενός σωλήνα. Τα σημεία (1) και (2) βρίσκονται στην ίδια οριζόντια διεύθυνση.

Από την εξίσωση Bernoulli έχουμε: $Bernoulli_{1\to 2}: \; P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \upsilon_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \upsilon_2^2$ (1)

Από την εξίσωση συνέχειας έχουμε: $\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow \mathrm{A}_1 \cdot \upsilon_1 = \mathrm{A}_2 \cdot \upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_2} \cdot \upsilon_1$ (2)

$(1) \xrightarrow{(2)} \; P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \upsilon_1^2 \left(\frac{\mathrm{A}_1^2}{\mathrm{A}_2^2} - 1\right)$ (3)

Όταν οι ρευματικές γραμμές είναι οριζόντιες, τότε η μεταβολή της πίεσης κάθετα σε αυτές οφείλεται αποκλειστικά στο βάρος του υγρού και μπορεί να υπολογιστεί με το θεμελιώδη νόμο της υδροστατικής

$P_1 = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_1$ και $P_2 = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_2$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στη σχέση (3) προκύπτει:

$P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h_1 - P_{atm} - \rho \cdot g \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \upsilon_1^2 \left(\frac{\mathrm{A}_1^2}{\mathrm{A}_2^2} - 1\right) \Rightarrow$

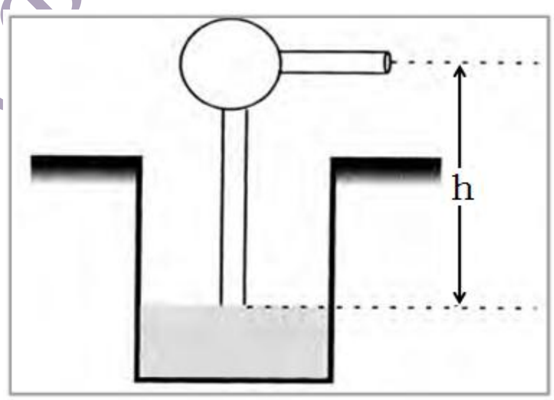
$$\rho \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \upsilon_1^2 (\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1) \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1}}$$

(4) Αν θέλουμε να βρούμε την ταχύτητα υ_2 , τότε

αντικαθιστούμε τη σχέση (4) στη σχέση (2), οπότε προκύπτει: $\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}$

<u>Παρατήρηση:</u> Η Εξίσωση Bernoulli δεν ισχύει όταν κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής παρεμβάλλεται συσκευή παραγωγής ή απορρόφησης ενέργειας (αντλία ή τουρμπίνα). Τότε εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε.

Άσκηση 3.27 του σχολικού βιβλίου (αντλία): Μια αντλία χρησιμοποιείται για την άντληση νερού από πηγάδι βάθους 5 *m*. Το νερό βγαίνει από την αντλία με σωλήνα διατομής 10 cm^2 και με ταχύτητα $\upsilon = 20$ m/s. Υπολογίστε την ισχύ της αντλίας. Δίνεται η πυκνότητα του νερού $\rho = 10^3$ Kg/m^3 και $g = 10$ m/s^2.



<u>Λύση</u>: Θ.Μ.Κ.Ε. για την άντληση μιας στοιχειώδους ποσότητας νερού dm:

$$dK = dW_w + dW_{Fαντλίας} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot dm \cdot \upsilon^2 = -dm \cdot g \cdot h + dW_{Fαντλίας} \Rightarrow$$

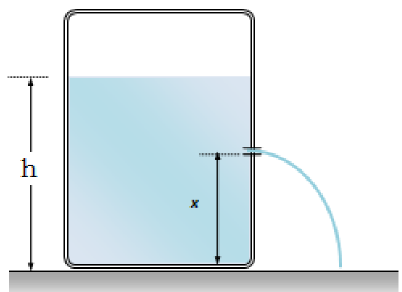
$$dW_{Fαντλίας} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot dm\cdot \upsilon^2 + dm\cdot g\cdot h \Rightarrow P_{αντλίας} = \frac{dW_{Fαντλίας}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dm}{dt}\upsilon^2 + \frac{dm}{dt}g\cdot h \Rightarrow$$

$$P_{αντλίας} = \frac{dW_{Fαντλίας}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\rho\cdot dV}{dt}\upsilon^2 + \frac{\rho\cdot dV}{dt}g\cdot h = \frac{1}{2}\rho\cdot\Pi\cdot\upsilon^2 + \rho\cdot\Pi\cdot g\cdot h \Rightarrow$$

$$P_{αντλίας} = \frac{1}{2}\rho\cdot A\cdot\upsilon\cdot\upsilon^2 + \rho\cdot A\cdot\upsilon\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}\rho\cdot A\cdot\upsilon^3 + \rho\cdot A\cdot\upsilon\cdot g\cdot h \Rightarrow P_{αντλίας} = 5000W$$

Άσκηση 3.30 σχολικού βιβλίου- μέγιστο βεληνεκές

Ένα δοχείο με κατακόρυφα τοιχώματα περιέχει νερό μέχρι ύψους h. Σε ποιο ύψος (x) πρέπει να τρυπήσουμε το δοχείο, ώστε η φλέβα που θα δημιουργηθεί να συναντά το έδαφος στη μεγαλύτερη δυνατή απόσταση από τη βάση του δοχείου;



Λύση: Από το «θεώρημα του Torricelli», έχουμε για τη ταχύτητα εκροής του υγρού από την οπή:

$\upsilon = \sqrt{2g(h-x)}$ **(1)**

Για την οριζόντια βολή του ρευστού έχουμε:

$x = \frac{1}{2}g\Delta t^2 \Leftrightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$ **(2)**

Έστω s το βεληνεκές της βολής: $s = \upsilon\Delta t \xrightarrow[(2)]{(1)} s = \sqrt{2g(h-x)}\sqrt{\frac{2x}{g}} \Leftrightarrow$

$s^2 = 2g(h-x)\frac{2x}{g} \Leftrightarrow 4x^2 - 4hx + s^2 = 0$ (3)

Η (3) για να έχει πραγματικές λύσεις πρέπει: $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 16h^2 - 16s^2 \geq 0 \Leftrightarrow s \leq h \Leftrightarrow s_{max} = h$.

Επομένως από την (3) έχουμε: $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{4h}{8} \Leftrightarrow x = \boldsymbol{\frac{h}{2}}$