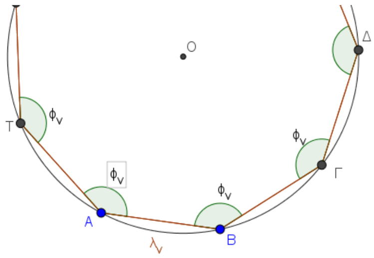
Κεφ. 11 Μέτρηση κύκλου –Ορισμοί - Αποδείξεις

1) Ορισμός κανονικού πολυγώνου

Κανονικό πολύγωνο λέγεται ένα πολύγωνο όταν έχει όλες τις <u>πλευρές του ίσες</u> και <u>όλες τις γωνίες του ίσες</u>.

Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι <u>όμοια</u>.

2) Γωνία κανονικού ν-γώνου

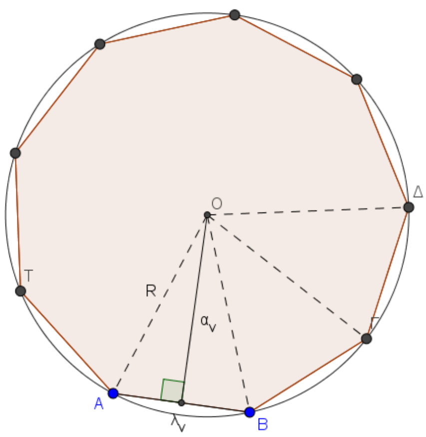


$$\boldsymbol{\varphi_\nu = 180^\circ - \frac{360^\circ}{\nu}}$$

3) Θεώρημα Ι

Κάθε κανονικό πολύγωνο εγγράφεται σε έναν κύκλο και περιγράφεται σε έναν άλλον. Οι δύο αυτοί κύκλοι είναι ομόκεντροι.

4) Στοιχεία κανονικού πολυγώνου



Το κοινό κέντρο των δύο αυτών κύκλων λέγεται κέντρο του πολυγώνου.

Η πλευρά του κανονικού πολυγώνου συμβολίζεται $\boldsymbol{\lambda_\nu}$

Η ακτίνα **R** του περιγεγραμμένου κύκλου λέγεται ακτίνα του πολυγώνου,

Απόστημα $\boldsymbol{\alpha_\nu}$ του πολυγώνου είναι η απόσταση του κέντρου από μια πλευρά του, δηλαδή η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου.

Κεντρική γωνία $\boldsymbol{\omega_\nu}$ του πολυγώνου λέγεται η επίκεντρη γωνία που αντιστοιχεί στη πλευρά του κανονικού πολυγώνου, δηλαδή η γωνία υπό την οποία φαίνεται κάθε πλευρά του πολυγώνου από το κέντρο του.

5) Θεώρημα ΙΙ

Σε κάθε κανονικό ν-γωνο ακτίνας R ισχύουν οι εξής σχέσεις:

I.	$\boldsymbol{\alpha_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2}$	**II.**	$\boldsymbol{P_\nu = \nu\lambda_\nu}$
III.	$\boldsymbol{\omega_\nu = \frac{360^\circ}{\nu}}$	**IV.**	$\boldsymbol{E_\nu = \frac{1}{2} P_\nu \alpha_\nu}$

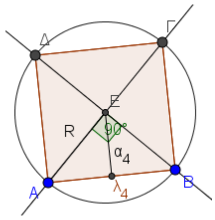
ΠΟΡΙΣΜΑ

Σε δύο κανονικά ν-γωνα ο λόγος των πλευρών τους ισούται με το λόγο των ακτίνων τους και το λόγο των αποστημάτων τους.

$$\boldsymbol{\frac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu} = \frac{R}{R'} = \frac{\alpha_\nu}{\alpha'_\nu}}$$

6) Εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και στοιχεία τους

I. Τετράγωνο



Έστω ένας κύκλος (O,R). Αν φέρουμε δύο κάθετες διαμέτρους ΑΓ και ΒΔ, τότε: $\widehat{\mathbf{AOB}} = \widehat{\mathbf{BO\Gamma}} = \widehat{\mathbf{\Gamma O\Delta}} = \widehat{\mathbf{\Delta OA}} = 90°$ οπότε ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΑ και επομένως το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.
Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος έχουμε:

$$\boldsymbol{\lambda_4^2 = AB^2 = OA^2 + OB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2}$$

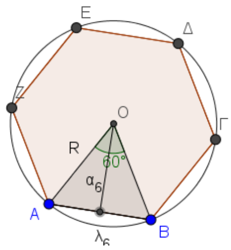
Δηλ. $\boldsymbol{\lambda_4 = R\sqrt{2}}$

Από τη βασική σχέση $\boldsymbol{\alpha_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2}$ για ν=4 έχουμε:

$$\boldsymbol{\alpha_4^2 + \frac{{\lambda_4}^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow \alpha_4^2 + \frac{\left(R\sqrt{2}\right)^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow \alpha_4^2 = R^2 - \frac{2\,R^2}{4} = \frac{R^2}{2}}$$

Δηλ. $\boldsymbol{\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}}$

II. Κανονικό εξάγωνο



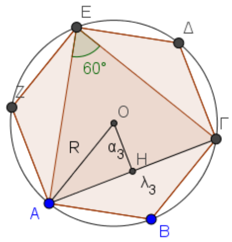
Έστω κύκλος (O,R) και ΑΒ η πλευρά του κανονικού εξαγώνου που θέλουμε να εγγράψουμε στον (O,R). Τότε $\widehat{\mathbf{AOB}}$ =**60°** και επειδή ΟΑ = ΟΒ =R το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο.
Δηλ. $\boldsymbol{\lambda_6 = R}$

Έτσι για την εγγραφή κανονικού εξαγώνου σε κύκλο, παίρνουμε πάνω στον κύκλο έξι διαδοχικά τόξα ΑΒ , ΒΓ , ΓΔ , ΔΕ , ΕΖ και ΖΑ με αντίστοιχη χορδή R, το καθένα, οπότε το ΑΒΓΔΕΖ είναι κανονικό εξάγωνο.
Από τη βασική σχέση $\boldsymbol{\alpha_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2}$ για ν=6 έχουμε:

$$\boldsymbol{\alpha_6^2 + \frac{{\lambda_6}^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow \alpha_6^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}}$$

Δηλ. $\boldsymbol{\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}}$

III. Ισόπλευρο τρίγωνο



Αν τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε και Ζ διαιρούν τον κύκλο σε έξι ίσα τόξα, τότε τα σημεία Α, Γ, Ε είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου, αφού **ΑΓ = ΓΕ = ΕΑ = 120°**.
Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο επειδή $\widehat{\mathbf{A\Gamma\Delta}}$ =**180°**, η ΑΔ είναι διάμετρος και επομένως, οπότε

$$\boldsymbol{\lambda_3^2 = A\Gamma^2 = A\Delta^2 - \Delta\Gamma^2 = (2R)^2 - R^2 = 3R^2}$$

Δηλ. $\boldsymbol{\lambda_3 = R\sqrt{3}}$

Από τη βασική σχέση $\boldsymbol{\alpha_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2}$ για ν=3 έχουμε:

$$\boldsymbol{\alpha_3^2 + \frac{{\lambda_3}^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow \alpha_3^2 + \frac{\left(R\sqrt{3}\right)^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow \alpha_3^2 = R^2 - \frac{3\,R^2}{4} = \frac{R^2}{4}}$$

Δηλ. $\boldsymbol{\alpha_3 = \frac{R\sqrt{3}}{2}}$

Τα στοιχεία των παραπάνω πολυγώνων στον επόμενο πίνακα:

	Τετράγωνο	**Κανονικό εξάγωνο**	**Ισόπλευρο τρίγωνο**
Πλευρά α_ν	$\boldsymbol{\lambda_4 = R\sqrt{2}}$	$\boldsymbol{\lambda_6 = R}$	$\boldsymbol{\lambda_3 = R\sqrt{3}}$
Απόστημα α_ν	$\boldsymbol{\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}}$	$\boldsymbol{\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}}$	$\boldsymbol{\alpha_3 = \frac{R\sqrt{3}}{2}}$

7) Μήκος του κύκλου (Ο,R) λέγεται το όριο της ακολουθίας (Pν) των περιμέτρων των κανονικών πολυγώνων των εγγεγραμμένων στον κύκλο (Ο,R) όταν το πλήθος ν των πλευρών αυξάνεται απεριόριστα. Το μήκος του κύκλου (Ο,R) είναι ο αριθμός L.

8) Αποδεικνύεται ότι ο λόγος L/2R του μήκους ενός κύκλου (Ο,R) προς τη διάμετρό του είναι σταθερός, δηλαδή ο ίδιος για οποιονδήποτε κύκλο.

9) Έτσι είναι $\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{2R}} = \boldsymbol{\pi}$ από όπου προκύπτει ότι το μήκος L κύκλου (Ο,R) είναι $\mathbf{L = 2\pi R}$

10) Μήκος τόξου $\widehat{\mathbf{AB}}$ του κύκλου (Ο,R) είναι ο μοναδικός θετικός αριθμός S που είναι όριο της ακολουθίας (Pν) των περιμέτρων των τεθλασμένων των εγγεγραμμένων στο τόξο $\widehat{\mathbf{AB}}$.

Το μήκος S τόξου μ^0 δίνεται από τον τύπο $\boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{\pi R \mu^\circ}}{\mathbf{180^\circ}}$

11) <u>Το τόξο κύκλου (Ο,R) με μήκος R</u> λέγεται <u>ακτίνιο 1(rad)</u>. Ένα τόξο α rad έχει μήκος $\mathbf{S = \alpha R}$

Αν ένα τόξο μ^0 είναι α rad, τότε ισχύει $\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\pi}} = \frac{\boldsymbol{\mu^\circ}}{\mathbf{180^\circ}}$

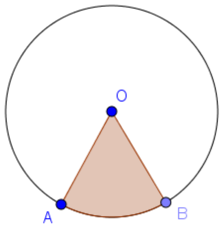
12) Εμβαδόν κυκλικού δίσκου

Ορισμός :Ονομάζουμε εμβαδόν κυκλικού δίσκου (Ο,R) το όριο της ακολουθίας (Eν) των εμβαδών των κανονικών ν-γώνων των εγγεγραμμένων στον κύκλο (Ο,R), όταν το πλήθος ν των πλευρών αυξάνεται απεριόριστα.

Το εμβαδόν Ε κυκλικού δίσκου (Ο,R) είναι $\mathbf{E = \pi R^2}$

13) Εμβαδόν κυκλικού τομέα

Ορισμός: Κυκλικός τομέας λέγεται το σύνολο των κοινών σημείων της επίκεντρης γωνίας $\widehat{\mathbf{AOB}}$ και του κυκλικού δίσκου (Ο,R).

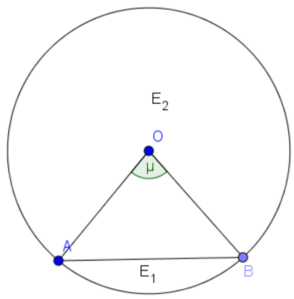


Το εμβαδόν E_μ κυκλικού τομέα μ^0 δίνεται από τον τύπο $\boldsymbol{E_\mu} = \frac{\boldsymbol{\pi R^2 \mu^\circ}}{\mathbf{360^\circ}}$

Επίσης ισχύει και ο τύπος $E_\mu = \frac{1}{2} S R$ όπου S το μήκος του τόξου ΑΒ.

14) Εμβαδόν κυκλικού τμήματος

Ορισμός : Κυκλικό τμήμα λέγεται το καθένα από τα δύο σημειοσύνολα E_1, E_2 στα οποία χωρίζεται ένας κυκλικός δίσκος (Ο,R) από μια χορδή του.



Το εμβαδόν E_1 υπολογίζεται από την $\mathbf{E_1 = E_\mu - (OAB)}$

ενώ το E_2 από την ισότητα $\mathbf{E_1 = E - E_\mu}$ όπου Ε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (Ο,R).