ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
12 Νοεμβρίου 2016

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

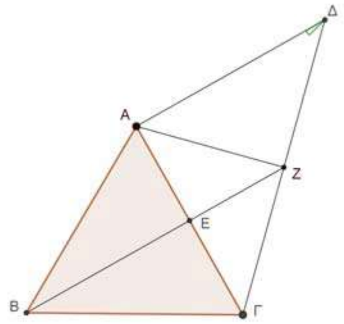
$$\mathrm{A}=\frac{(-20)^2}{5^2}+\frac{15^3}{(-5)^3}+\frac{(-8)^3}{2^3}-\left(\frac{-3}{9}\right)^{-3}.$$

Λύση

$$\mathrm{A}=\frac{(-20)^2}{5^2}+\frac{15^3}{(-5)^3}+\frac{(-8)^3}{2^3}-\left(\frac{-3}{9}\right)^{-3}=\left(\frac{-20}{5}\right)^2+\left(\frac{15}{-5}\right)^3+\left(\frac{-8}{2}\right)^3-\left(\frac{9}{-3}\right)^3$$

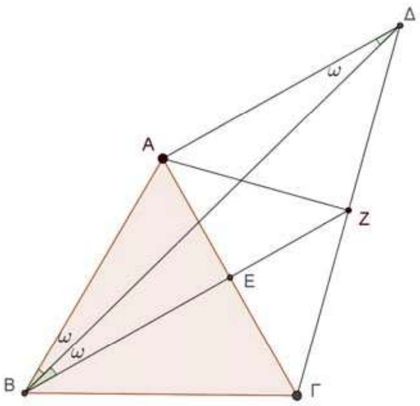
$$=(-4)^2+(-3)^3+(-4)^3-(-3)^3=(-4)^2+(-4)^3=16-64=-48.$$

Πρόβλημα 2
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Στο σημείο Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{A\Delta}=\alpha$ κάθετο προς την πλευρά ΑΓ. Η προέκταση της διαμέσου ΒΕ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ στο σημείο Ζ.



(α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{ZA}=\mathrm{Z\Gamma}$.
(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{A\hat{\Delta}B}$.

Λύση
(α) Η διάμεσος ΒΕ του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα και μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ. Επομένως το σημείου Ζ απέχει ίσες αποστάσεις από τα σημεία Α και Γ, δηλαδή $\mathrm{ZA}=\mathrm{Z\Gamma}$.



Σχήμα 2

(β) Επειδή είναι $A\Delta = \alpha$, το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με

$$A\hat{\Delta}B = A\hat{B}\Delta \qquad (1)$$

Η διάμεσος ΒΕ του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ είναι και ύψος, άρα κάθετη προς την πλευρά ΑΓ, όπως είναι κάθετη και η ΑΔ, από την υπόθεση. Επομένως είναι $BE \parallel A\Delta$, οπότε

$$A\hat{\Delta}B = \Delta\hat{B}E \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι

$$A\hat{B}\Delta = \Delta\hat{B}E. \qquad (3)$$

Άρα η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}E$, οπότε θα έχουμε

$$A\hat{B}\Delta = \Delta\hat{B}E = \frac{A\hat{B}E}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ,$$

αφού η ΒΕ είναι και διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, δηλαδή $A\hat{B}E = \dfrac{A\hat{B}\Gamma}{2} = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

Επομένως, λόγω της (1) έχουμε $A\hat{\Delta}B = 15^\circ$.

Πρόβλημα 3

Ένα κατάστημα πωλούσε μία τηλεόραση πριν τις εκπτώσεις 540 ευρώ. Την περίοδο των εκπτώσεων την πωλούσε με έκπτωση $\alpha\%$. Με το τέλος των εκπτώσεων το κατάστημα αύξησε την τιμή που πωλούσε την τηλεόραση στις εκπτώσεις κατά $\beta\%$. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα η τιμή πώλησης της τηλεόρασης να γίνει ίση με την τιμή που είχε πριν τις εκπτώσεις . Να βρείτε την τιμή του β συναρτήσει της τιμής του α.

Λύση

Η τιμή πώλησης της τηλεόρασης την περίοδο των εκπτώσεων είναι

$$540 - \frac{540\alpha}{100} \text{ ευρώ.}$$

Η τιμή της τηλεόρασης μετά την περίοδο των εκπτώσεων θα γίνει

$$540 - \frac{540\alpha}{100} + \left(540 - \frac{540\alpha}{100}\right)\frac{\beta}{100} \text{ ευρώ.}$$

Σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος θα ισχύει:

$$540-\frac{540\alpha}{100}+\left(540-\frac{540\alpha}{100}\right)\frac{\beta}{100}=540 \Leftrightarrow \left(540-\frac{540\alpha}{100}\right)\beta=540\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{540(100-\alpha)}{100}\cdot\beta=540\alpha \Leftrightarrow \beta=\frac{540\alpha\cdot 100}{540(100-\alpha)} \Leftrightarrow \beta=\frac{100\alpha}{100-\alpha}.$$

Πρόβλημα 4

Όλα τα ψηφία του θετικού ακέραιου αριθμού A είναι ίσα είτε με 8 είτε με 9 και καθένα από αυτά τα ψηφία εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά στον αριθμό. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του A, αν αυτός διαιρείται με το 4 και με το 3.

Λύση

Για να διαιρείται ένας αριθμός με 4, το τελευταίο διψήφιο τμήμα πρέπει να διαιρείται με το 4 (κριτήρια διαιρετότητας Α Γυμνασίου). Οι πιθανές περιπτώσεις για το τελευταίο διψήφιο τμήμα του αριθμού είναι: $88, 89, 98, 99$. Από αυτούς μόνο ο 88 διαιρείται με το 4, οπότε ο A πρέπει να λήγει σε 88. Επίσης, ξέρουμε ότι ένας ακέραιος διαιρείται με το 3, όταν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με 3.

Αν υποθέσουμε ότι ο αριθμός Α είναι διψήφιος, τότε πρέπει $\mathrm{A}=88$, ο οποίος δεν διαιρείται με το 3.

Αν ο αριθμός είναι τριψήφιος, τότε θα είναι είτε ο 888 είτε ο 988. Όμως στον 888 δεν χρησιμοποιείται το ψηφίο 9, ενώ ο 988 έχει άθροισμα ψηφίων 25 και δεν διαιρείται με το 3.

Αν ο αριθμός είναι τετραψήφιος είναι ένας από τους παρακάτω:

$$8888, 8988, 9888, 9988.$$

Όμως οι αριθμοί $8888, 9988$ έχουν άθροισμα ψηφίων 32 και 34 αντίστοιχα, άρα δεν διαιρούνται με το 3.

Επομένως, οι μόνοι τετραψήφιοι που ικανοποιούν τις συνθήκες είναι οι $8988, 9888$, οπότε η ελάχιστη τιμή του Α είναι 8988.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν $\alpha=\frac{12^\nu}{3^\nu}:2^{2\nu-1}$ και $\beta=10^{2\nu+1}:100^\nu$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\frac{\left(\alpha^3-\beta\right)^3+\alpha^2\beta-2\beta+2\alpha^2}{\alpha^2+\alpha\beta-10\alpha}$$

.

Λύση

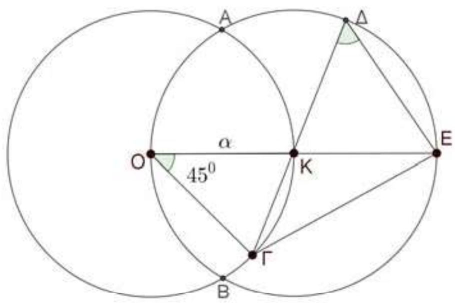
Έχουμε ότι $\alpha=\frac{12^\nu}{3^\nu}:2^{2\nu-1}=\left(\frac{12}{3}\right)^\nu:2^{2\nu-1}=4^\nu:2^{2\nu-1}=2^{2\nu}:2^{2\nu-1}=2^{2\nu-(2\nu-1)}=2.$

και $\beta = 10^{2\nu+1} : 100^{\nu} = 10^{2\nu+1} : 10^{2\nu} = 10$, οπότε είναι $\alpha^2 = 4,\ \alpha^3 = 8$ και

$$\mathrm{A} = \frac{(\alpha^3-\beta)^3+\alpha^2\beta-2\beta+2\alpha^2}{\alpha^2+\alpha\beta-10\alpha} = \frac{(8-10)^3+40-20+8}{4+20-20} = \frac{-8+40-20+8}{4} = 5$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{OK} = \alpha$ και δύο κύκλοι ακτίνας α που έχουν κέντρα στα σημεία Ο και Κ, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Το σημείο Γ ανήκει στο τόξο ΚΒ και η ευθεία ΓΚ τέμνει τον κύκλο C_2 κέντρου Κ και ακτίνας α στο σημείο Δ. Η ευθεία ΟΚ τέμνει τον κύκλο C_2 κέντρου Κ και ακτίνας α στο σημείο Ε. Αν είναι $\mathrm{K}\hat{\mathrm{O}}\Gamma = 45^\circ$, να βρείτε :

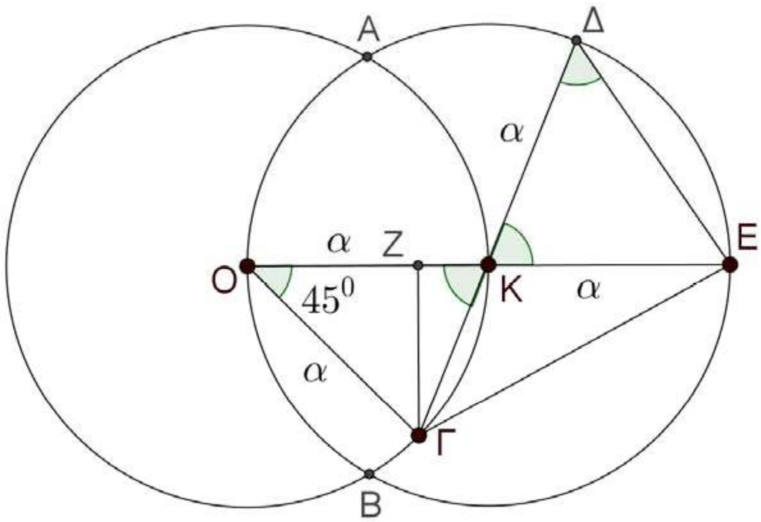


(α) πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{K}\hat{\Delta}\mathrm{E}$,

(β) το εμβαδόν του τριγώνου ΟΓΕ συναρτήσει του α .

Λύση

(α) Το τρίγωνο ΟΚΓ έχει $\mathrm{OK} = \mathrm{O}\Gamma = \alpha$, οπότε είναι ισοσκελές με βάση ΚΓ. Άρα έχει τις προσκείμενες στη βάση γωνίες του ίσες, οπότε θα είναι:



Σχήμα 2

$$\mathrm{O}\hat{\mathrm{K}}\Gamma = \frac{180^\circ-45^\circ}{2} = \frac{135^\circ}{2} = 67{,}5^\circ \text{ μοίρες.}$$

Επίσης, επειδή οι γωνίες $\Delta\hat{\mathrm{K}}\mathrm{E}$ και $\mathrm{O}\hat{\mathrm{K}}\Gamma$ είναι κατά κορυφή, έχουμε

$$\Delta\hat{\mathrm{K}}\mathrm{E} = \mathrm{O}\hat{\mathrm{K}}\Gamma = 67{,}5^\circ \text{ μοίρες.}$$

Η γωνία $\mathrm{K}\hat{\Delta}\mathrm{E}$ είναι μία από τις ίσες γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου ΔΚΕ (έχει $\mathrm{K}\Delta = \mathrm{KE} = \alpha$), οπότε

$$\mathrm{K}\hat{\Delta}\mathrm{E}=\frac{180^{\circ}-67,5^{\circ}}{2}=\frac{112,5^{\circ}}{2}=56,25^{\circ} \text{ μοίρες}$$

(β) Έστω ΓΖ το ύψος του τριγώνου ΟΓΕ από την κορυφή Γ. Τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΓΖ έχουμε

$$\Gamma\mathrm{Z}=\alpha\cdot\eta\mu 45^{\circ}=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2},$$

οπότε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΓΕ είναι

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{O}\Gamma\Delta\right)=\frac{1}{2}\cdot 2\alpha\cdot\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}=\frac{\alpha^{2}\sqrt{2}}{2}.$$

Πρόβλημα 3

Ο Γιώργος και οι φίλοι του έχουν 450 καραμέλες τις οποίες μοίρασαν μεταξύ τους σε ίσα μερίδια και ο καθένας πήρε ακέραιο αριθμό καραμέλες. Όμως τρεις από τους φίλους του Γιώργου του επέστρεψαν το 20% του μεριδίου τους. Έτσι ο Γιώργος πήρε συνολικά περισσότερες από 120 καραμέλες. Να βρείτε πόσοι ήταν συνολικά ο Γιώργος και οι φίλοι του και πόσες καραμέλες πήρε ο Γιώργος.

Λύση

Έστω ότι ο Γιώργος και οι φίλοι του ήταν συνολικά x, .όπου $x\geq 4$, από την υπόθεση. Τότε ο καθένας τους αρχικά πήρε $\frac{450}{x}$ καραμέλες. Ο τρεις φίλοι επέστρεψαν στο Γιώργο συνολικά

$$3\cdot\frac{20}{100}\cdot\frac{450}{x}=\frac{270}{x} \text{ καραμέλες.}$$

Ο Γιώργος πήρε συνολικά

$$\frac{450}{x}+\frac{270}{x}=\frac{720}{x} \text{ καραμέλες.}$$

Σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος , πρέπει:

$$\frac{720}{x}>120\Leftrightarrow 120x<720\Leftrightarrow x<6.$$

Επομένως οι δυνατές τιμές για το x είναι $x=4$ ή $x=5$. Όμως η τιμή $x=4$ απορρίπτεται, γιατί η διαίρεση $450:4$ δεν δίνει ακέραιο πηλίκο. Άρα είναι $x=5$ και ο Γιώργος πήρε συνολικά $\frac{720}{5}=144$ καραμέλες.

Πρόβλημα 4

Δίνονται οι αριθμοί

$$\mathrm{A}=\overline{3a5b}=3\cdot 10^{3}+a\cdot 10^{2}+5\cdot 10+b \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=\overline{5c3d}=5\cdot 10^{3}+c\cdot 10^{2}+3\cdot 10+d.$$

(α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ψηφία a,b,c,d , ισχύει ότι: $\frac{\mathrm{A}}{36}<\frac{\mathrm{B}}{45}$

(β) Αν ανάμεσα στα κλάσματα $\frac{\mathrm{A}}{36},\ \frac{\mathrm{B}}{45}$ υπάρχουν ακριβώς δύο ακέραιοι, να βρεθούν οι δυνατές τιμές των ψηφίων a,b,c,d .

Λύση

(α) Ισχύει ότι $\frac{\text{A}}{36}=\frac{\overline{3a5b}}{36}<\frac{3959}{36}<\frac{3960}{36}=110$. Επίσης η μικρότερη τιμή του $\overline{5c3d}$ λαμβάνεται όταν $c = d = 0$, άρα

$$\frac{\text{B}}{45}=\frac{\overline{5c3d}}{45}>\frac{5030}{45}>111.$$

Επομένως, για οποιαδήποτε ψηφία a,b,c,d ισχύει ότι:

$$\frac{\text{A}}{36}=\frac{\overline{3a5b}}{36}<110<111<\frac{\overline{5c3d}}{45}=\frac{\text{B}}{45}.$$

(β) Από το πρώτο ερώτημα ξέρουμε ότι πάντα υπάρχουν δύο ακέραιοι ανάμεσά τους, το 110 και το 111, αφού δείξαμε ότι $\frac{\text{A}}{36}<110<111<\frac{\text{B}}{45}$.

Για να είναι μόνο αυτοί οι ακέραιοι ανάμεσά τους, θα πρέπει

$$109\leq\frac{\overline{3a5b}}{36}<110<111<\frac{\overline{5c3d}}{45}\leq 112.$$

Από την ανισότητα αριστερά παίρνουμε ότι $\overline{3a5b}>109\cdot 36\Leftrightarrow\overline{3a5b}>3924$, οπότε πρέπει $a=9$ και $b\geq 4$.

Από την ανισότητα δεξιά παίρνουμε

$$\frac{\overline{5c3d}}{45}\leq 112\Leftrightarrow\overline{5c3d}<112\cdot 45\Leftrightarrow\overline{5c3d}<5040,$$

οπότε $c=0$ και το d μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από 0 μέχρι 9.