ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
1 Νοεμβρίου 2014

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=\frac{13}{9}-\frac{74}{9}\cdot\frac{3}{37}+\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}:8$

Λύση

$$A=\frac{13}{9}-\frac{74}{9}\cdot\frac{3}{37}+\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}:8=\frac{13}{9}-\frac{74\cdot 3}{9\cdot 37}+\left(\frac{4}{3}\right)^{2}:8$$
$$=\frac{13}{9}-\frac{2}{3}+\frac{16}{9}:8=\frac{13}{9}-\frac{2}{3}+\frac{16:8}{9}=\frac{13}{9}-\frac{6}{9}+\frac{2}{9}=\frac{9}{9}=1.$$

Πρόβλημα 2

Ένας έμπορος συλλεκτικών αντικειμένων αγόρασε δύο παλαιά ραδιόφωνα Α κα Β αντί 200 ευρώ και στη συνέχεια τα πούλησε με συνολικό κέρδος 40% πάνω στην τιμή της αγοράς τους. Αν το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε με κέρδος 25% και το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε με κέρδος 50%, πάνω στην τιμή της αγοράς τους, να βρείτε πόσο πλήρωσε ο έμπορος για να αγοράσει το καθένα από τα ραδιόφωνα Α και Β.

Λύση

Έστω ότι ο έμπορος αγόρασε x ευρώ το ραδιόφωνο Α. Τότε η τιμή αγοράς του ραδιοφώνου Β ήταν $200-x$ ευρώ. Τότε το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε $x+\frac{25x}{100}=\frac{125x}{100}$ ευρώ, ενώ το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε $(200-x)\cdot\frac{150}{100}$ ευρώ. Συνολικά τα δύο ραδιόφωνα πουλήθηκαν $200\cdot\frac{140}{100}$ ευρώ, δηλαδή 280 ευρώ.

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει η εξίσωση

$$\frac{125x}{100}+(200-x)\cdot\frac{150}{100}=200\cdot\frac{140}{100}\Leftrightarrow 12,5x-15x+3000=2800$$
$$\Leftrightarrow 2,5x=200\Leftrightarrow x=80.$$

Άρα ο έμπορος αγόρασε 80 ευρώ το ραδιόφωνο Α και $200-80=120$ ευρώ το ραδιόφωνο Β.

Πρόβλημα 3

Χωρίς την εκτέλεση διαιρέσεων αριθμητή με παρανομαστή, να βρείτε τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο από τους παρακάτω αριθμούς:

$$\frac{1003}{2015}, \frac{1007}{2019}, \frac{1009}{2021}, \frac{997}{2009}, \frac{1011}{2023}, \frac{999}{2011}, \frac{1001}{2013}, \frac{1005}{2017}.$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι σε όλα τα δεδομένα κλάσματα την ίδια διαφορά:

(Παρανομαστής) - (Αριθμητής) = 1012.

Έτσι γράφουμε:

$$\frac{1003}{2015}=1-\frac{1012}{2015}, \frac{1007}{2019}=1-\frac{1012}{2019}, \frac{1009}{2021}=1-\frac{1012}{2021}, \frac{997}{2009}=1-\frac{1012}{2009}$$

$$\frac{1011}{2023}=1-\frac{1012}{2023}, \frac{999}{2011}=1-\frac{1012}{2011}, \frac{1001}{2013}=1-\frac{1012}{2013}, \frac{1005}{2017}=1-\frac{1012}{2017}$$

Γνωρίζουμε ότι μεταξύ ρητών αριθμών με τον ίδιο αριθμητή, μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει μικρότερο παρανομαστή, οπότε έχουμε:

$$\frac{1012}{2009}>\frac{1012}{2011}>\frac{1012}{2013}>\frac{1012}{2015}>\frac{1012}{2017}>\frac{1012}{2019}>\frac{1012}{2021}>\frac{1012}{2023}$$

Άρα έχουμε:

$$1-\frac{1012}{2009}<1-\frac{1012}{2011}<1-\frac{1012}{2013}<1-\frac{1012}{2015}<1-\frac{1012}{2017}<1-\frac{1012}{2019}<1-\frac{1012}{2021}<1-\frac{1012}{2023},$$

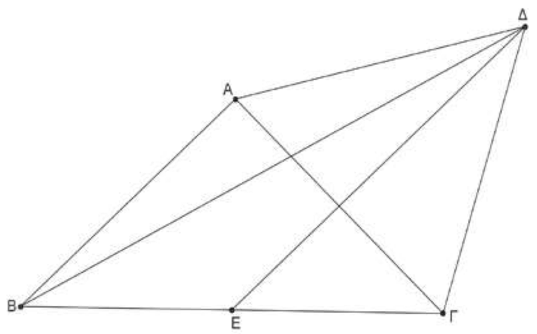
οπότε ο αριθμός $\frac{1011}{2023}$ είναι ο μεγαλύτερος από τους δεδομένους ρητούς αριθμούς, ενώ ο $\frac{997}{2009}$ είναι ο μικρότερος.

Πρόβλημα 4

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\hat{A}=90^\circ$ και $AB=A\Gamma$. Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισόπλευρο και το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευρά ΒΓ.

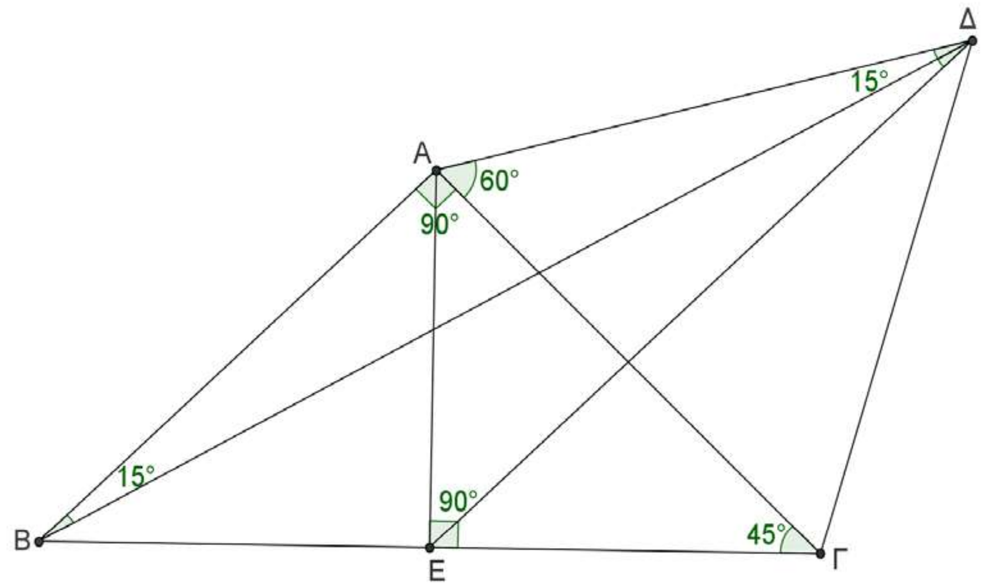
(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

(β) Βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $B\hat{\Delta}E$.



Σχήμα 1

Λύση



Σχήμα 2

(α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές θα έχει $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=45^\circ$ και η διάμεσός του ΑΕ είναι και ύψος του, οπότε το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο στο Ε με μία γωνία του 45°. Επομένως θα έχει $\mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\Gamma=180^\circ-\left(90^\circ+45^\circ\right)=45^\circ$, οπότε αυτό είναι ισοσκελές με $\mathrm{EA}=\mathrm{E}\Gamma$.

Επιπλέον, από το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε ότι: $\Delta\mathrm{A}=\Delta\Gamma$. Επομένως τα σημεία Δ και Ε ισαπέχουν από τα άκρα Α και Γ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ, οπότε η ευθεία ΔΕ είναι η μεσοκάθετη του ΑΓ.

(β) Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ λαμβάνουμε τις ισότητες $\mathrm{AB}=\mathrm{A}\Gamma=\mathrm{A}\Delta$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές. Από το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε $\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma=60^\circ$, οπότε $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}=\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma+\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}=60^\circ+90^\circ=150^\circ$. Επειδή ΑΒΔ ισοσκελές τρίγωνο έπεται ότι:

$$\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta=\frac{180^\circ-150^\circ}{2}=15^\circ.$$

Επειδή οι ευθείες ΑΒ και ΔΕ είναι παράλληλες, ως κάθετες προς την ίδια ευθεία ΑΓ, που τις τέμνει η ευθεία ΒΔ, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες του ίσες, οπότε:

$$\mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{E}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta=15^\circ$$

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\mathrm{A}=\dfrac{x^4-1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)}-\dfrac{6}{13}$, αν $x=\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{-2}$.

Λύση

Έχουμε

$$\mathrm{A}=\frac{x^4-1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)}-\frac{6}{13}=\frac{\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)}-\frac{6}{13}=\frac{x^2-1}{x^2-3}-\frac{6}{13},$$

οπότε για $x=\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}=\left(-\frac{4}{3}\right)^{2}=\frac{16}{9}$ λαμβάνουμε:

$$\mathrm{A}=\frac{x^2-1}{x^2-3}-\frac{6}{13}=\frac{\left(\frac{16}{9}\right)^2-1}{\left(\frac{16}{9}\right)^2-3}-\frac{6}{13}=\frac{\frac{256}{81}-1}{\frac{256}{81}-3}-\frac{6}{13}=\frac{175}{13}-\frac{6}{13}=\frac{169}{13}=13.$$

2^{ος} τρόπος

Για όσους δεν γνωρίζουν την παραγοντοποίηση της διαφοράς δύο τετραγώνων, προτείνουμε την ακόλουθη λύση:

Έχουμε $x=\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}=\left(-\frac{4}{3}\right)^{2}=\frac{16}{9}$, οπότε:

$$\mathrm{A}=\frac{\left(\frac{16}{9}\right)^4-1}{\left(\left(\frac{16}{9}\right)^2+1\right)\left(\left(\frac{16}{9}\right)^2-3\right)}-\frac{6}{13}=\frac{\frac{256\cdot 256-81\cdot 81}{81^2}}{\left(\frac{256+81}{81}\right)\left(\frac{256-243}{81}\right)}-\frac{6}{13}$$

$$=\frac{\frac{65536-6561}{81^2}}{\left(\frac{337}{81}\right)\left(\frac{13}{81}\right)}-\frac{6}{13}=\frac{\frac{58975}{81^2}}{\frac{337\cdot 13}{81^2}}-\frac{6}{13}=\frac{58975}{337\cdot 13}-\frac{6}{13}=\frac{175}{13}-\frac{6}{13}=\frac{169}{13}=13.$$

Πρόβλημα 2

Το πλήθος των μαθητών σε ένα Γυμνάσιο είναι τουλάχιστον 170 και το πολύ 230. Αν γνωρίζουμε ότι ακριβώς το 4% των μαθητών παίζουν βιολί και ότι το $\frac{1}{3}$ από αυτούς που παίζουν βιολί, παίζει και πιάνο, να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου.

Λύση

Έστω n το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου. Τότε το πλήθος των μαθητών που παίζει βιολί είναι $\frac{4n}{100}$. Το πλήθος των μαθητών που παίζει και βιολί και πιάνο είναι

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{4n}{100}=\frac{4n}{300}=\frac{n}{75}.$$

Επειδή ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου είναι θετικός ακέραιος, πρέπει ο αριθμητής n να είναι πολλαπλάσιο του παρανομαστή, δηλαδή πρέπει $n=75k$, όπου k θετικός ακέραιος..

Έτσι, από την υπόθεση $170\le n\le 230$, έχουμε:

$$170\le n=75k\le 230 \Leftrightarrow \frac{170}{75}\le k\le\frac{230}{75}\Leftrightarrow 2+\frac{20}{75}\le k\le 3+\frac{5}{75}\Leftrightarrow k=3.$$

Επομένως έχουμε $n=75\cdot 3=225$ μαθητές.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευρά α. Προεκτείνουμε την πλευρά $A\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma\Delta = \frac{\alpha}{2}$ και στη συνέχεια προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma Z = A\Delta$. Αν $E(AB\Delta)$ και $E(AB\Delta Z)$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Delta$ και του τετραπλεύρου $AB\Delta Z$, αντίστοιχα, να βρείτε το λόγο $\frac{E(AB\Delta)}{E(AB\Delta Z)}$.

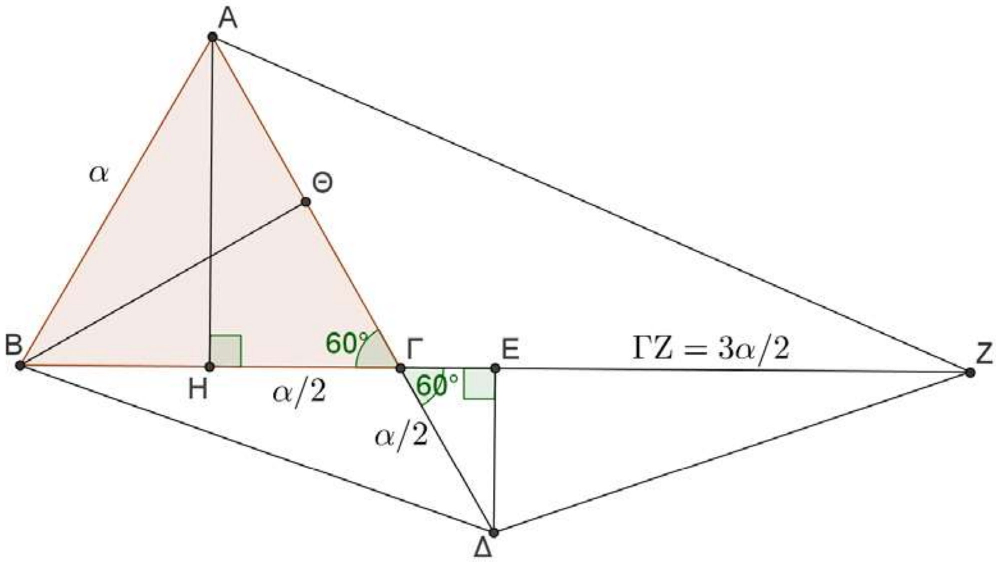
Λύση

Το τρίγωνο $AB\Delta$ έχει βάση $A\Delta = \frac{3\alpha}{2}$ και ύψος

$$B\Theta = AH = \sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3\alpha^2}{4}} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.$$

Άρα είναι:

$$E(AB\Delta) = \frac{1}{2}\cdot A\Delta \cdot B\Theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{3\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}\alpha^2}{8}.$$



Σχήμα 3

Για το τετράπλευρο $AB\Delta Z$ έχουμε: $E(AB\Delta Z) = E(ABZ) + E(B\Delta Z)$.

Στο τρίγωνο ABZ έχουμε βάση $BZ = \alpha + \frac{3\alpha}{2} = \frac{5\alpha}{2}$ και ύψος $AH = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$, οπότε έχει εμβαδό

$$E(ABZ) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{8}.$$

Στο τρίγωνο $B\Delta Z$ έχουμε βάση $BZ = \frac{5\alpha}{2}$ και ύψος ΔE το οποίο μπορεί να υπολογιστεί από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα $AH\Gamma$ και $\Gamma E\Delta$ ως εξής:

$$\frac{\mathrm{E\Delta}}{\mathrm{AH}}=\frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{A}\Gamma}\Leftrightarrow\frac{\mathrm{E\Delta}}{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{\alpha}{2}}{\alpha}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \mathrm{E\Delta}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{4}.$$

Διαφορετικά, μπορούμε να έχουμε: $\mathrm{E\Delta}=\Gamma\Delta\eta\mu 60^\circ=\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{4}$.

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{B\Delta Z}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{4}=\frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{16}.$$

Επομένως έχουμε:

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{AB\Delta Z}\right)=\mathrm{E}\left(\mathrm{ABZ}\right)+\mathrm{E}\left(\mathrm{B\Delta Z}\right)=\frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{8}+\frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{16}=\frac{15\sqrt{3}\alpha^2}{16},$$

οπότε θα είναι

$$\frac{\mathrm{E}\left(\mathrm{AB\Delta}\right)}{\mathrm{E}\left(\mathrm{AB\Delta Z}\right)}=\frac{\frac{3\sqrt{3}\alpha^2}{8}}{\frac{15\sqrt{3}\alpha^2}{16}}=\frac{6\sqrt{3}\alpha^2}{15\sqrt{3}\alpha^2}=\frac{2}{5}.$$

2^{ος} τρόπος

Έστω E(ΑΒΓ) = E. Τότε E(ΒΓΔ) = $\frac{\mathrm{E}}{2}$, γιατί έχει το ίδιο ύψος ΒΘ με το τρίγωνο ΑΒΓ και βάση ΓΔ = $\frac{\alpha}{2}$. Άρα είναι:

$$\mathrm{E(AB\Delta)}=\mathrm{E(AB\Gamma)}+\mathrm{E(B\Gamma\Delta)}=\frac{3\mathrm{E}}{2}.$$

Ακόμα έχουμε: E(ΑΓΖ) = $\frac{3\mathrm{E}}{2}$, γιατί έχει το ίδιο ύψος ΑΗ με το τρίγωνο ΑΒΓ και βάση ΓΖ = $\frac{3\alpha}{2}$. Τέλος έχουμε E(ΓΔΖ) = $\frac{3\mathrm{E}}{4}$, γιατί έχει το ίδιο ύψος ΔΕ με το τρίγωνο ΒΓΔ και βάση ΓΖ = $\frac{3\alpha}{2}$. Έτσι έχουμε:

$$\mathrm{E(AB\Delta Z)}=\mathrm{E}+\frac{\mathrm{E}}{2}+\frac{3\mathrm{E}}{2}+\frac{3\mathrm{E}}{4}=\frac{15\mathrm{E}}{4}$$

και επομένως

$$\frac{\mathrm{E}\left(\mathrm{AB\Delta}\right)}{\mathrm{E}\left(\mathrm{AB\Delta Z}\right)}=\frac{3\mathrm{E}/2}{15\mathrm{E}/4}=\frac{2}{5}.$$

Πρόβλημα 4

Ένα διαμάντι Δ κόβεται σε δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2 με βάρη $\beta\left(\Delta_1\right)$ και $\beta\left(\Delta_2\right)$, αντίστοιχα, και λόγο βαρών $\frac{\beta\left(\Delta_1\right)}{\beta\left(\Delta_2\right)}=\frac{3}{7}$. Δίνεται ότι η αξία ενός διαμαντιού είναι ευθέως ανάλογη προς το τετράγωνο του βάρους του.

Να προσδιορίσετε πόσο επί τις εκατό μειώθηκε η αξία του διαμαντιού Δ μετά την κοπή του στα δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2.

Λύση

Έστω $\alpha(\Delta), \alpha(\Delta_1)$ και $\alpha(\Delta_2)$ η αξία των διαμαντιών Δ, Δ_1 και Δ_2, αντίστοιχα. Τότε έχουμε

$$\frac{\alpha(\Delta)}{\beta(\Delta)^2} = \frac{\alpha(\Delta_1)}{\beta(\Delta_1)^2} = \frac{\alpha(\Delta_2)}{\beta(\Delta_2)^2} = \lambda$$

$$\Rightarrow \alpha(\Delta) = \lambda\beta(\Delta)^2, \alpha(\Delta_1) = \lambda\beta(\Delta_1)^2, \alpha(\Delta_2) = \lambda\beta(\Delta_2)^2$$

Άρα έχουμε

$$\frac{\alpha(\Delta_1)+\alpha(\Delta_2)}{\alpha(\Delta)} = \frac{\lambda\beta(\Delta_1)^2 + \lambda\beta(\Delta_2)^2}{\lambda\beta(\Delta)^2} = \frac{\beta(\Delta_1)^2 + \beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2} = \frac{\beta(\Delta_1)^2}{\beta(\Delta)^2} + \frac{\beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2} \quad (1)$$

Όμως από την υπόθεση έχουμε:

$$\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta_2)} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{\beta(\Delta_1)}{3} = \frac{\beta(\Delta_2)}{7} = \frac{\beta(\Delta_1)+\beta(\Delta_2)}{3+7} = \frac{\beta(\Delta)}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta)} = \frac{3}{10}, \frac{\beta(\Delta_2)}{\beta(\Delta)} = \frac{7}{10} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) λαμβάνουμε

$$\frac{\alpha(\Delta_1)+\alpha(\Delta_2)}{\alpha(\Delta)} = \frac{\beta(\Delta_1)^2}{\beta(\Delta)^2} + \frac{\beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2} = \left(\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta)}\right)^2 + \left(\frac{\beta(\Delta)}{\beta(\Delta)}\right)^2 = \frac{9}{100} + \frac{49}{100} = \frac{58}{100}.$$

Επομένως η αξία των δύο κομματιών του διαμαντιού ισούται με το 58% της αρχικής αξίας του, δηλαδή η αξία του μειώθηκε κατά 100-58 = 42%.

2$^{\text{ος}}$ τρόπος

Επειδή στον πρώτο τρόπο διαπιστώνουμε στη σχέση (1) ότι ο λόγος $\dfrac{\alpha(\Delta_1)+\alpha(\Delta_2)}{\alpha(\Delta)}$ εξαρτάται από τους λόγους των βαρών $\dfrac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta)}$ και $\dfrac{\beta(\Delta_2)}{\beta(\Delta)}$, μπορούμε, χωρίς απώλεια της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι $\beta(\Delta_1) = 3$ και $\beta(\Delta_1) = 7$ με $\beta(\Delta) = 10$.
Έτσι, αν υποθέσουμε ότι η αξία του τετραγώνου της μονάδας βάρους είναι 1, τότε έχουμε ότι $\alpha(\Delta_1) = 3^2 = 9$ και $\alpha(\Delta_2) = 7^2 = 49$ και $\alpha(\Delta) = 10^2 = 100$. Επομένως η μείωση της αξίας του διαμαντιού είναι $100-(9+49) = 42$, δηλαδή σε ποσοστό 42%.