ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΥΛΗ ΤΗΣ Γ' ΤΑΞΗΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο - Αλγεβρικές Παραστάσεις

Α. 1. 1

1. Τι ονομάζετε δύναμη α^ν με βάση τον πραγματικό α και εκθέτη το φυσικό ν>1;

- Ονομάζεται δύναμη α^ν με βάση τον αριθμό α και εκθέτη το φυσικό $\nu > 1$, το γινόμενο από ν παράγοντες ίσους με α.

$$\text{Δηλαδή, } \alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \cdots \cdot \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$$

- Ορίζουμε ακόμη:

$$\alpha^1 = \alpha$$

$$\alpha^0 = 1 \text{ με } \alpha \neq 0$$

$$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu} \text{ με } \alpha \neq 0 \text{ και } \nu = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots..$$

2. Ποιες είναι οι ιδιότητές των δυνάμεων με βάση πραγματικό και εκθέτη ακέραιο ;

- Για δυνάμεις, με εκθέτες γενικά ακέραιους αριθμούς, ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

α. $\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$ **β.** $\dfrac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$ **γ.** $\alpha^\nu \cdot \beta^\nu = (\alpha\cdot\beta)^\nu$

δ. $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^\nu = \dfrac{\beta^\nu}{\alpha^\nu}$ **ε.** $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$ **στ.** $\left(\alpha^\mu\right)^\nu = \alpha^{\mu\cdot\nu}$

- Οι ιδιότητες αυτές ισχύουν με την προϋπόθεση ότι κάθε φορά ορίζονται οι δυνάμεις και οι πράξεις που σημειώνονται.

3. Τι ονομάζεται τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού α;

- Ονομάζεται τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α και συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ ο θετικός αριθμός x που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, μας δίνει τον αριθμό α.

Επομένως : $\sqrt{\alpha} = x$ αν και μόνο αν $x^2 = \alpha$ $x, \alpha > 0$. Ορίζουμε ακόμη $\sqrt{0} = 0$

4. Ποιες είναι οι ιδιότητές των ριζών;

- Από τον ορισμό τις τετραγωνικής ρίζας ενός αριθμού $\alpha \geq 0$ έχουμε $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 = \alpha$
- Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$
- Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$, τότε $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$
- Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$, τότε $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

5. Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$ να αποδείξετε ότι, $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\cdot\beta}$

Απόδειξη

Είναι γνωστό ότι αν οι α και β είναι μη αρνητικοί αριθμοί τότε $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2$.

Έτσι: $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta} \Leftrightarrow \left(\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}\right)^2 = \left(\sqrt{\alpha\beta}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{\alpha}\right)^2\cdot\left(\sqrt{\beta}\right)^2 = \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha\beta = \alpha\beta$ που ισχύει.

6. Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta > 0$ να αποδείξετε ότι, $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

Απόδειξη

Είναι γνωστό ότι αν οι α και β είναι μη αρνητικοί αριθμοί τότε $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2$,

Έτσι: $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}} \Leftrightarrow \left(\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\right)^2 = \left(\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}\right)^2 \Leftrightarrow \dfrac{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2}{\left(\sqrt{\beta}\right)^2} = \dfrac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\alpha}{\beta}$, που ισχύει.

Α. 1. 2

7. Τι ονομάζεται αλγεβρική παράσταση;

- Ονομάζεται αλγεβρική παράσταση κάθε έκφραση που συνδυάζει πράξεις μεταξύ αριθμών και μεταβλητών.

8. Τι ονομάζεται αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης;

- Ονομάζεται αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης ο αριθμός που θα προκύψει αν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές της με αριθμούς και εκτελέσουμε τις πράξεις.

9. Πότε μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται ακέραια;

Μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται ***ακέραια,*** όταν μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών της είναι φυσικοί αριθμοί.

10. Τι ονομάζεται μονώνυμο και πια τα μέρη από τα οποία αποτελείται;

- Ονομάζεται μονώνυμο μια αλγεβρική παράσταση στην οποία σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού μεταξύ αριθμού και μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών.
- Σε ένα μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας που γράφεται πρώτος ονομάζεται συντελεστής του μονωνύμου, ενώ το γινόμενο όλων των μεταβλητών ονομάζεται κύριο μέρος του μονωνύμου.

11. Ποια μονώνυμα ονομάζονται όμοια;

- Ονομάζονται όμοια δύο ή περισσότερα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος.

12. Ποια μονώνυμα ονομάζονται ίσα και ποια αντίθετα;

- Ονομάζονται ίσα δύο μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή και το ίδιο κύριο μέρος.
- Ονομάζονται αντίθετα δύο μονώνυμα που έχουν αντίθετο συντελεστή και το ίδιο κύριο μέρος.

13. Τι ονομάζεται βαθμός μονωνύμου ως προς μία μεταβλητή του;

- Ονομάζεται βαθμός μονωνύμου ως προς μία μεταβλητή του ο εκθέτης της μεταβλητής αυτής.

14. Τι ονομάζουμε σταθερό και τι μηδενικό μονώνυμο και ποιος ο βαθμός τους;

- Ονομάζουμε σταθερό μονωνύμο κάθε αριθμό και μηδενικό μονώνυμο τον αριθμό 0.
- Το μηδενικό μονώνυμο δεν έχει βαθμό ενώ όλα τα άλλα σταθερά μονώνυμα είναι μηδενικού βαθμού.

15. Πως ορίζεται το άθροισμα ομοίων μονωνύμων;

- Το άθροισμα ομοίων μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο όμοιο με αυτά που έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους.

16. Τι ονομάζεται αναγωγή ομοίων όρων;

- Ονομάζεται αναγωγή ομοίων όρων η πρόσθεση ομοίων μονωνύμων.

17. Πως ορίζεται το γινόμενο μονωνύμων;

Το γινόμενο μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο με συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και κύριο μέρος γινόμενο όλων των μεταβλητών τους με εκθέτη κάθε μεταβλητής **το** άθροισμα **των** εκθετών της.

Α. 1. 3

18. Τι ονομάζεται πολυώνυμο;

- Ονομάζεται πολυώνυμο ένα άθροισμα μονωνύμων που δεν είναι όμοια.

19. Τι ονομάζεται βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μία μεταβλητή του;

- Ονομάζεται βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μία μεταβλητή του ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του ως προς την μεταβλητή αυτή.

20. Τι ονομάζουμε σταθερό και τι μηδενικό πολυώνυμο και ποιος ο βαθμός τους;

- Ονομάζουμε σταθερό πολυώνυμο κάθε αριθμό και μηδενικό πολυώνυμο τον αριθμό 0.
- Το μηδενικό πολυώνυμο δεν έχει βαθμό ενώ όλα τα άλλα σταθερά πολυώνυμα είναι μηδενικού βαθμού.

Α. 1. 4

21. Πως πολλαπλασιάζουμε:

α. Μονώνυμο με πολυώνυμο ; **β. Πολυώνυμο με πολυώνυμο ;**

Για να πολλαπλασιάσουμε:

α. Μονώνυμο με πολυώνυμο πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου και στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

β. Πολυώνυμο με πολυώνυμο πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με κάθε όρο του άλλου και στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

Α. 1. 5

22. Τι ονομάζεται ταυτότητα;

- Ονομάζεται ταυτότητα κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για κάθε τιμή των μεταβλητών αυτών.

23. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i. $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

ii. $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

iii. $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

iv. $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

v. $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = \alpha^2 - \beta^2$

Απόδειξη

i. $(\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta) = \alpha^2 + \underline{\underline{\alpha\cdot\beta}} + \underline{\underline{\beta\cdot\alpha}} + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\cdot\beta + \beta^2$

ii. $(\alpha-\beta)^2 = (\alpha-\beta)\cdot(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \underline{\underline{\alpha\cdot\beta}} - \underline{\underline{\beta\cdot\alpha}} + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\cdot\beta + \beta^2$

iii. $(\alpha+\beta)^3 = (\alpha+\beta)^2\cdot(\alpha+\beta) = (\alpha^2 + 2\alpha\cdot\beta + \beta^2)\cdot(\alpha+\beta) =$

$= \alpha^3 + \underline{2\alpha^2\cdot\beta} + \underline{\underline{\alpha\cdot\beta^2}} + \underline{\beta\cdot\alpha^2} + \underline{\underline{2\alpha\cdot\beta^2}} + \beta^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\cdot\beta + 3\alpha\cdot\beta^2 + \beta^3$

iv. $(\alpha-\beta)^3 = (\alpha-\beta)^2\cdot(\alpha-\beta) = (\alpha^2 - 2\alpha\cdot\beta + \beta^2)\cdot(\alpha-\beta) =$

$= \alpha^3 - \underline{2\alpha^2\cdot\beta} + \underline{\underline{\alpha\cdot\beta^2}} - \underline{\beta\cdot\alpha^2} + \underline{\underline{2\alpha\cdot\beta^2}} - \beta^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\cdot\beta + 3\alpha\cdot\beta^2 - \beta^3$

v. $(\alpha-\beta)\cdot(\alpha+\beta) = \alpha^2 - \alpha\cdot\beta + \beta\cdot\alpha - \beta^2$

Α. 1. 6

24. Τι ονομάζεται παραγοντοποίηση;

- Ονομάζεται παραγοντοποίηση ενός πολυωνύμου ή γενικότερα μιας αλγεβρικής παράστασης η διαδικασία μετατροπής της παράστασης σε γινόμενο.

25. Ποιες είναι οι χαρακτηριστικές περιπτώσεις παραγοντοποίησης;

- **Κοινός παράγοντας**

$$\alpha\beta + \alpha\gamma - \alpha\delta = \alpha(\beta + \gamma - \delta)$$

Όταν όλοι οι όροι μιας παράστασης έχουν κοινό παράγοντα, τότε η παράσταση μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα.

- **Ομαδοποίηση**

Όταν όλοι οι όροι του πολυωνύμου δεν έχουν κοινό παράγοντα, τους χωρίζουμε σε ομάδες έτσι ώστε:

- Κάθε ομάδα που δημιουργούμε να έχει κοινό παράγοντα,
- Οι παραστάσεις που μένουν μετά την εξαγωγή του κοινού παράγοντα να είναι ίδιες

$$\alpha\beta + \alpha\gamma - \delta\beta - \delta\gamma = \alpha(\beta + \gamma) - \delta(\beta + \gamma) = (\beta + \gamma)(\alpha - \delta)$$

- **Διαφορά τετραγώνων**

Η μέθοδος αυτή παραγοντοποίησης στηρίζεται στην ταυτότητα

$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$,

στην οποία αν εναλλάξουμε τα μέλη μετατρέπουμε μια διαφορά δύο ***τελείων τετραγώνων*** σε γινόμενο.

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$

- **Αθροισμα ή διαφορά κύβων**

Η παραγοντοποίηση του αθροίσματος ή της διαφοράς δύο κύβων βασίζεται στις δύο γνωστές μας ταυτότητες:

$$(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$$
$$(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 + \beta^3$$

Σε κάθε μια από τις οποίες αν εναλλάξουμε τα μέλη μετατρέπουμε τη διαφορά ή το άθροισμα δύο ***κύβων*** σε γινόμενο.

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$
$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

- **Ανάπτυγμα τετραγώνου**

Αν το πολυώνυμο είναι τριώνυμο και έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \quad ή \quad \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2,$$

τότε θα γίνει αντίστοιχα $(\alpha + \beta)^2$ ή $(\alpha - \beta)^2$,

που είναι γινόμενα παραγόντων αφού :

$(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta)$ και $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta)$

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$$
$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$$

- **Παραγοντοποιήσεις τριωνύμου της μορφής $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$**

Αν το πολυώνυμο είναι τριώνυμο και έχει τη μορφή $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ έχουμε:

$x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta =$

$\underline{x^2} + \underline{x\alpha} + \underline{x\beta} + \underline{\alpha\beta} =$ ***Ομαδοποίηση***

$x(x + \alpha) + \beta(x + \alpha) =$ ***Κοινός παράγοντας***

$(x + \alpha)(x + \beta)$

$$x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)\cdot(x + \beta)$$

Α. 1. 8

26. Τι ονομάζεται Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) και τι Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων;

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μικρότερο από τους εκθέτες του.

Α. 1. 9

27. Πότε μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται ρητή;

Μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται ρητή όταν είναι κλάσμα με όρους πολυώνυμα.

28. Πότε μια αλγεβρική παράσταση ορίζεται;

Μια αλγεβρική παράσταση ορίζεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών που περιέχει εκτός απ' αυτές που μηδενίζουν τον παρανομαστή αφού όπως γνωρίζουμε δεν ορίζεται κλάσμα με παρονομαστή μηδέν.

29. Πότε μια ρητή αλγεβρική παράσταση μπορεί να απλοποιηθεί;

Όπως μια αριθμητική παράσταση, έτσι και μια ρητή παράσταση, μπορεί να απλοποιηθεί, αν ο αριθμητής και ο παρονομαστής της είναι γινόμενα και έχουν κοινό παράγοντα.

Α. 1. 10

30. Πως κάνουμε πράξεις με ρητές αλγεβρικές παραστάσεις;

Για να κάνουμε πράξεις με ρητές αλγεβρικές παραστάσεις ακολουθούμε τους κανόνες που ισχύουν για τις πράξεις των κλασμάτων.

Δηλαδή:

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta} \quad \textit{και} \quad \frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\alpha-\gamma}{\beta} \qquad \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta} \quad \textit{και} \quad \frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\beta\delta} \quad \beta\delta\neq 0$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta} \quad \textit{και} \quad \frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma} \quad \beta\gamma\delta\neq 0 \qquad \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}=\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma} \quad \beta\gamma\delta\neq 0$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο - Εξισώσεις Ανισώσεις

Α. 2. 2

31. Τι ονομάζεται εξίσωση 2ου βαθμού, με έναν άγνωστο ;

- Ονομάζεται εξίσωση δευτέρου βαθμού με έναν άγνωστο κάθε ισότητα της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με α, β, γ πραγματικούς αριθμούς και $\alpha \neq 0$.
- Οι αριθμοί α και β ονομάζονται συντελεστές του δευτεροβαθμίου και πρωτοβαθμίου όρου αντίστοιχα και ο αριθμός γ σταθερός όρος.
- Επίλυση μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού λέγεται η διαδικασία εκείνη με την οποία βρίσκουμε τις τιμές του x που την επαληθεύουν.

32. Πότε μία εξίσωση δευτέρου βαθμού:

α. έχει δύο άνισες ρίζες; β. έχει μια διπλή ρίζα ; γ. δεν έχει ρίζες;

Η εξίσωση $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ με α, β, γ πραγματικούς αριθμούς, $\alpha \neq 0$ και διακρίνουσα: **$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$:**

α. έχει δύο ρίζες άνισες που δίνονται από τον τύπο $x = \frac{\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, όταν **$\Delta > 0$**

β. έχει δύο ρίζες ίσες που δίνονται από τον τύπο $x = \frac{-\beta}{2\alpha}$, όταν **$\Delta = 0$**

γ. δεν έχει ρίζες, όταν **$\Delta < 0$**

33. Πως παραγοντοποιείται το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ όταν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει λύσεις τις ρ_1, ρ_2;

- Αν ρ_1, ρ_2 είναι λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \cdot (x - \rho_1) \cdot (x - \rho_2)$$

Α. 2. 4

34. Τι ονομάζεται κλασματική εξίσωση και πότε ορίζεται αυτή;

Ονομάζεται κλασματική εξίσωση, κάθε εξίσωση που περιέχει άγνωστο στον παρανομαστή. Για να ορίζεται μια κλασματική εξίσωση, πρέπει οι παρανομαστές των κλασμάτων της να είναι διάφοροι του μηδενός.

Α. 2. 5

35. Πως συγκρίνουμε(διατάσουμε) δύο πραγματικούς αριθμούς;

Αν οι α και β είναι δύο πραγματικοί αριθμοί τότε:

- Λέμε ότι ο α είναι μεγαλύτερος του β και το συμβολίζουμε $\alpha > \beta$, όταν $\alpha - \beta > 0$.
- Λέμε ότι ο α είναι μικρότερος του β και το συμβολίζουμε $\alpha < \beta$, όταν $\alpha - \beta < 0$.
- Λέμε ότι ο α είναι ίσος με τον β και το συμβολίζουμε $\alpha = \beta$, όταν $\alpha - \beta = 0$.

Αντίστροφα

- Αν $\alpha - \beta > 0$, τότε ο α είναι μεγαλύτερος του β.
- Αν $\alpha - \beta < 0$, τότε ο α είναι μικρότερο του β.
- Αν $\alpha - \beta = 0$, τότε ο α είναι ίσος με τον β.

36. Τι ονομάζεται ανισότητα και ποια τα χαρακτηριστικά της;

- Η σχέση της μορφής $\alpha > \beta$ (ή $\alpha < \beta$) ονομάζεται ανισότητα με μέλη, πρώτο και δεύτερο, τα α και β (ή τα β και α) αντίστοιχα.
- Οι ανισότητες $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$ (ή $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$) λέγονται ομοιόστροφες (έχουν την ίδια φορά)
- Οι ανισότητες $\alpha < \beta$ και $\gamma > \delta$ (ή $\alpha > \beta$ και $\gamma < \delta$) λέγονται ετερόστροφες (έχουν αντίθετη φορά)
- Για να δηλώσουμε ότι ένας αριθμός α είναι ταυτόχρονα μεγαλύτερος του x και μικρότερος του y, γράφουμε τη « διπλή » ανισότητα $x < \alpha < y$.
- Για να δηλώσουμε ότι ένας αριθμός x είναι μεγαλύτερος ή ίσος με τον αριθμό α, γράφουμε $x \geq \alpha$.

37. Ποιες είναι οι ιδιότητες της διάταξης;

- Αν προσθέσουμε και στα δύο μέλη μιας ανισότητας τον ίδιο αριθμό, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δηλαδή αν $\alpha > \beta$, τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

- Αν προσθέσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες της ίδιας φοράς, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δηλαδή αν $α > β$ και $γ > δ$, τότε $α + γ > β + δ$.
- Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο θετικό αριθμό, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δηλαδή αν $α > β$ και $γ > 0$, τότε $α\cdot γ > β\cdot γ$ και $\frac{α}{γ} > \frac{β}{γ}$.
- Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, προκύπτει ανισότητα αντίθετης φοράς. Δηλαδή αν $α > β$ και $γ < 0$, τότε $α\cdot γ < β\cdot γ$ και $\frac{α}{γ} < \frac{β}{γ}$.
- Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη δύο ανισότητες που έχουν την ίδια φορά και θετικά μέλη προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά. Δηλαδή αν α, β, γ, δ θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $α > β$ και $γ > δ$ τότε $α\cdot γ > β\cdot δ$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο - Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

Α. 3. 1

38.Τι ονομάζεται γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους και τι λύση της;

- Ονομάζεται γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους κάθε εξίσωση της μορφής $αx + βy= γ$.
- Λύση της γραμμική εξίσωση $αx + βy= γ$ ονομάζεται κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) που την επαληθεύει.

39. Πως παριστάνεται γραφικά κάθε εξίσωση της μορφής $αx + βy= γ$ με $α \neq 0$ ή $β\neq 0$ και τι ισχύει γι' αυτή;

Κάθε εξίσωση της μορφής $αx + βy = γ$ με $α \neq 0$ ή $β\neq 0$ παριστάνεται γραφικά με μια ευθεία **ε** έτσι ώστε:

- Αν ένα σημείο ανήκει στην ευθεία, *ε* οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση $αx + βy = γ$.
- Αν οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν την εξίσωση $αx + βy = γ$ το σημείο ανήκει στην ευθεία *ε* .

40.Τι παριστάνουν οι εξισώσεις;

α. $y = k$ με $k \neq 0$ β. $y = 0$ γ. $x = k$ με $k \neq 0$ δ. $x = 0$

α. Η εξίσωση $y = k$ με $k \neq 0$ παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα x΄x και τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο (0, k)

β. Η εξίσωση $y = 0$ παριστάνει τον άξονα x΄x.

γ. Η εξίσωση $x = k$ με $k \neq 0$ παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα y΄y και τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο (k, 0)

δ. Η εξίσωση $x = 0$ παριστάνει τον άξονα y΄y.

41. Πως βρίσκουμε τις τομές μιας ευθείας $αx + βy= γ$ με $α \neq 0$ και $β\neq 0$ με τους άξονες x΄x και y΄y;

- Κάθε σημείο του x΄x έχει τεταγμένη 0, οπότε και το Α, σημείο τομής της $αx + βy = γ$ με τον x΄x, θα έχει τεταγμένη $y = 0$ και τετμημένη x με $αx + β\cdot 0 = γ$ ή $αx = γ$ ή $x = \frac{γ}{α}$.
- Κάθε σημείο του y΄y έχει τετμημένη 0, οπότε και το Β, σημείο τομής της $αx + βy = γ$ με τον y΄y, θα έχει τετμημένη $x = 0$ και τεταγμένη y με $α\cdot 0 +βy = γ$ ή $βy = γ$ ή $y = \frac{γ}{β}$.

Α. 3. 2

42.Τι ονομάζεται;

α. Γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y;

β. Λύση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y;

γ. Επίλυση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y;

α. Ονομάζεται γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ένα σύστημα της μορφής, $\begin{cases} \alpha x + \alpha y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$ με ένα τουλάχιστον από τα α, β, α΄, β΄ $\neq 0$.

β. Ονομάζεται λύση του γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y κάθε ζεύγος (x_0, y_0) που επαληθεύει τις εξισώσεις του.

γ. Ονομάζεται επίλυση του γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y η διαδικασία που ακολουθούμε για να βρούμε κάθε ζεύγος (x_0, y_0) που επαληθεύει τις εξισώσεις του.

43. Πως γίνεται η γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y και πότε αυτό έχει μία λύση, είναι αδύνατο, είναι αόριστο;

Για τη γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες που παριστάνουν τις εξισώσεις του συστήματος και:

- αν τέμνονται το σύστημα έχει ***μία λύση*** τις συντεταγμένες του κοινού τους σημείου.
- αν είναι παράλληλες δεν έχουν κοινό σημείο, οπότε το σύστημα *δεν έχει λύση* και λέμε ότι είναι ***αδύνατο.***
- Αν ***συμπίπτουν (ταυτίζονται)*** έχουν όλα τα σημεία τους κοινά και επομένως το σύστημα έχει ***άπειρες λύσεις*** και λέμε ότι είναι ***αόριστο***.

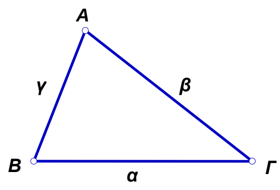
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ -ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1° - Γεωμετρία

Β. 1. 1

44. Τι ονομάζεται Τρίγωνο και ποια τα κύρια στοιχεία του;

- Ονομάζεται ***τρίγωνο*** το επίπεδο σχήμα που ορίζεται από τρία μη συνευθειακά σημεία τα οποία συνδέονται με ευθύγραμμα τμήματα.

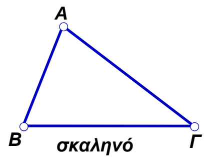


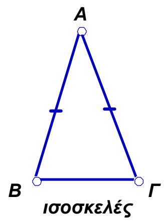
- Τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου είναι, οι πλευρές του και οι γωνίες του
- ***Πλευρές*** του τριγώνου ονομάζονται τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τις κορυφές του.
- ***Γωνίες*** του τριγώνου ονομάζονται οι γωνίες που ορίζονται από τις πλευρές του.

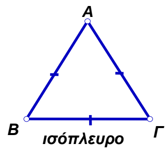
45. Ποια είναι τα είδη των τριγώνων ως προς τις πλευρές, και ως προς τις γωνίες τους;

Ένα τρίγωνο που εξετάζεται ως προς τις πλευρές του λέγεται:

- ***σκαληνό***, αν οι πλευρές του είναι άνισες,
- ***ισοσκελές***, αν δύο πλευρές του είναι ίσες,
- ***ισόπλευρο***, αν και οι τρεις πλευρές του είναι ίσες.

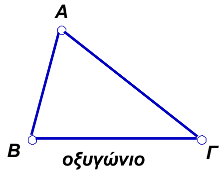


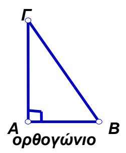


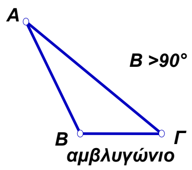


Ένα τρίγωνο που εξετάζεται ως προς τις γωνίες του λέγεται:

- ***οξυγώνιο***, αν όλες του οι γωνίες είναι οξείες,
- ***ορθογώνιο***, αν μία γωνία του είναι ορθή,
- ***αμβλυγώνιο***, αν μία γωνία του είναι αμβλεία.

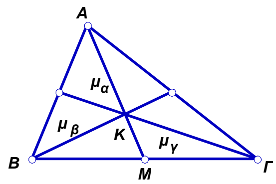




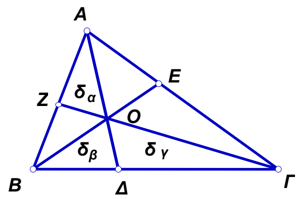


46. Τι ονομάζεται διάμεσος, διχοτόμος, ύψος, τριγώνου.

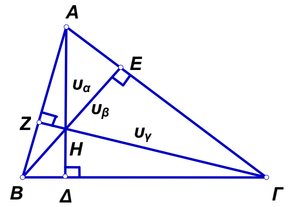
- ***Διάμεσος*** ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει μια κορυφή του με το μέσο της απέναντι πλευράς. Κάθε τρίγωνο ΑΒΓ έχει τρεις διάμεσους που συμβολίζονται μ_α , μ_β , μ_γ αντίστοιχα και διέρχονται το ίδιο σημείο.



- ***Διχοτόμος*** μιας γωνίας ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει την κορυφή της γωνίας με την απέναντι πλευρά και διχοτομεί τη γωνία αυτή. Κάθε τρίγωνο ΑΒΓ έχει τρεις διχοτόμους που συμβολίζονται δ_α, δ_β, δ_γ αντίστοιχα και διέρχονται από το ίδιο σημείο.

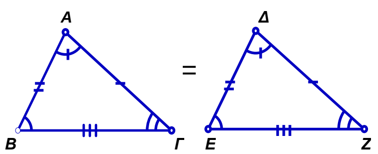


- ***Ύψος*** ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από μια κορυφή του κάθετο προς την ευθεία της απέναντι πλευράς.
  Κάθε τρίγωνο ΑΒΓ έχει τρία ύψη που συμβολίζονται υ_α , υ_β , υ_γ αντίστοιχα και διέρχονται το ίδιο σημείο.



47. Πότε δύο τρίγωνα λέγονται ίσα ;

Δύο τρίγωνα λέγονται ίσα, όταν έχουν τις γωνίες τους ίσες και τις ομόλογες πλευρές τους (πλευρές απέναντι από ίσες γωνίες) ίσες μία προς μία.



Έτσι αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα τότε ισχύουν $\left.\begin{array}{l} A = \Delta \\ B = E \\ \hat{\Gamma} = Z \end{array}\right\}$ Γωνίες και $\left.\begin{array}{l} AB = \Delta E \\ B\Gamma = EZ \\ A\Gamma = \Delta Z \end{array}\right\}$ Ομόλογες πλευρές

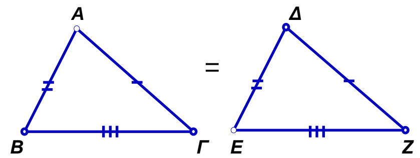
48. Πότε δύο τρίγωνα είναι ίσα; *(Κριτήρια ισότητας τριγώνων)*

Κριτήριο (Π. Π. Π.)

- Δύο τρίγωνα είναι ίσα, όταν οι τρεις πλευρές του ενός είναι ίσες με τις τρεις πλευρές του άλλου μία προς μία.

  Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} AB = \Delta E \\ B\Gamma = EZ \\ A\Gamma = \Delta Z \end{array}\right\} \text{ οπότε είναι } \overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{\Delta EZ}$$

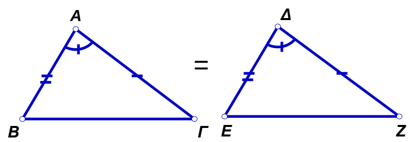


Κριτήριο (Π. Γ. Π.)

- Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν οι δύο πλευρές και η περιεχόμενη σ' αυτές γωνία του ενός είναι ίσες με τις δύο πλευρές και την περιεχόμενη σ' αυτές γωνία του άλλου αντίστοιχα.

  Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} AB = \Delta E \\ A\Gamma = \Delta Z \\ A = \Delta \end{array}\right\} \text{ οπότε είναι } \overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{\Delta EZ}$$

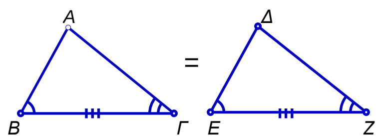


Κριτήριο (Π. Γ. Γ.)

- Δύο τρίγωνα είναι ίσα, όταν η μία πλευρά και οι προσκείμενες σ' αυτήν γωνίες του ενός είναι ίσες με την μία πλευρά και τις προσκείμενες σ' αυτήν γωνίες του άλλου αντίστοιχα.

  Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν:

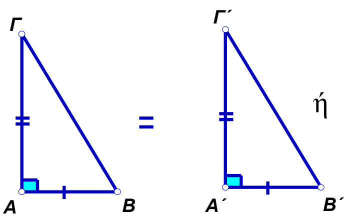
$$\left.\begin{array}{l} B\Gamma = EZ \\ B = E \\ \hat{\Gamma} = Z \end{array}\right\} \text{ οπότε είναι } \overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{\Delta EZ}$$



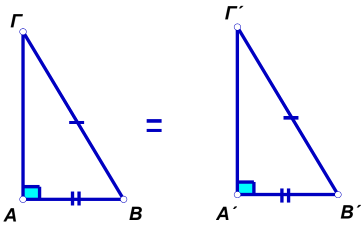
49. *Πότε δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα; (Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων)*

- Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία.

  Πχ. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν :

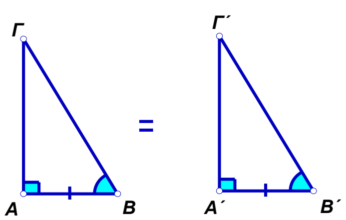


ή

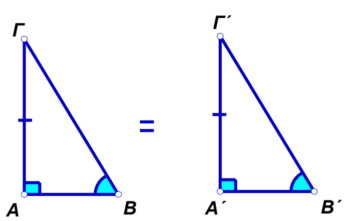


- Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.

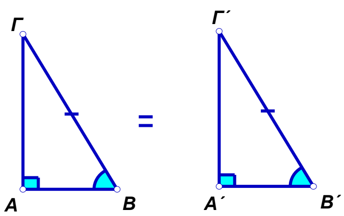
  Πχ. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν:



ή



ή



50. Ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος ;

- Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.
- Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος.

51. Ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου μιας γωνίας;

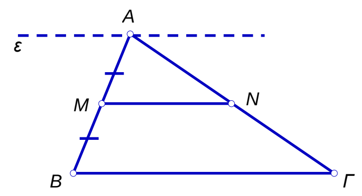
- Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.
- Κάθε σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές μιας γωνίας είναι σημείο της διχοτόμου της.

52. Να αποδείξετε ότι αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του , αυτή διέρχεται και από το μέσο της τρίτης πλευράς.

Απόδειξη

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και το σημείο Μ μέσο της πλευράς του ΑΒ. Από το Μ φέρουμε παράλληλη προς την ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ν. Θα δείξουμε ότι ΑΝ = ΝΓ.

Από το σημείο Α φέρνουμε μια βοηθητική ευθεία ε // ΒΓ. Οι παράλληλες ευθείες ε, ΜΝ και ΒΓ ορίζουν ίσα τμήματα στην ΑΒ, άρα θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ΑΓ. Επομένως ΑΝ = ΝΓ.



Β. 1. 2

53. Τι ονομάζεται λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων και με τι ισούται;

- Λόγος ενός ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, που συμβολίζεται $\frac{\Gamma\Delta}{AB}$, ονομάζεται ο αριθμός λ για τον οποίο ισχύει $\Gamma\Delta = \lambda \cdot AB$.
- Ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων ισούται με το λόγο **των μηκών τους** εφόσον έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης.

54. Πότε τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα β, δ;

Τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα β και δ όταν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

Η ισότητα $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ ονομάζεται **αναλογία** με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα ***α**, β, γ, **δ**.*

Τα ευθύγραμμα τμήματα **α, δ** ονομάζονται ***άκροι όροι,*** ενώ τα ευθύγραμμα τμήματα ***β, γ*** ονομάζονται ***μέσοι όροι*** της αναλογίας.

55. Ποιες είναι οι σημαντικότερες ιδιότητες των αναλογιών ;

Σε μια αναλογία με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα ***α, β, γ, δ*** εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των αναλογιών που ισχύουν και στους αριθμούς χρησιμοποιώντας τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων. Οι σημαντικότερες από τις ιδιότητες αυτές είναι:

- Σε κάθε αναλογία το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων.

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$$

- Σε κάθε αναλογία μπορούμε να εναλλάξουμε τους μέσους ή τους άκρους όρους και να προκύψει πάλι αναλογία.

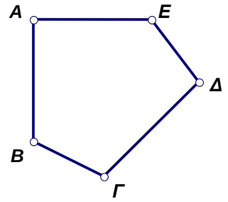
$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta} \text{ ή } \frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

- Λόγοι ίσοι μεταξύ τους είναι και ίσοι με το λόγο που έχει α-ριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και παρονομαστή το άθροισμα των παρονομαστών.

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \quad \text{τότε } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

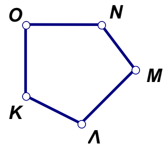
Β. 1. 4

56. Πότε δύο πολύγωνα λέγονται όμοια;



Δύο πολύγωνα λέγονται ***όμοια***, όταν το ένα είναι ***μεγέθυνση*** ή ***σμίκρυνση*** του άλλου. Αυτό σημαίνει ότι έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και τις ομόλογες (αντίστοιχες) πλευρές τους ανάλογες.

Έτσι τα πολύγωνα ΑΒΓΔΕ και ΟΚΛΜΝ που έχουν,



$$A = O,\ B = K,\ \hat{\Gamma} = \Lambda,\ \Delta = M,\ E = N$$

και $\frac{AB}{OK} = \frac{B\Gamma}{K\Lambda} = \frac{\Gamma\Delta}{\Lambda M} = \frac{\Delta E}{MN} = \frac{EA}{NO} = \lambda$ είναι όμοια.

<u>Το λ ονομάζεται λόγος ομοιότητας.</u>

57. Ποιες προτάσεις προκύπτουν από τον ορισμό της ομοιότητα δύο πολυγώνων;

Από τον ορισμό της ομοιότητας δύο πολυγώνων προκύπτουν οι επόμενες προτάσεις.

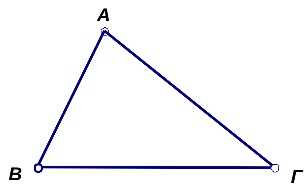
- Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια μεταξύ τους.
- Δύο ίσα πολύγωνα είναι και όμοια, με λόγο ομοιότητας 1.
- Κάθε πολύγωνο είναι όμοιο με τον εαυτό του.
- Δύο πολύγωνα όμοια προς τρίτο είναι και όμοια μεταξύ τους.

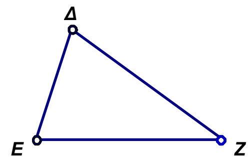
58. Πότε δύο τρίγωνα λέγονται όμοια;

- Δύο τρίγωνα λέγονται ***όμοια*** όταν έχουν τις γωνίες τους ***ίσες*** μία προς μία και τις ***ομόλογες*** (αντίστοιχες) πλευρές τους ανάλογες. Δηλαδή

  αν $\overset{\triangle}{AB\Gamma} \sim \overset{\triangle}{\Delta EZ}$, τότε $A = \Delta,\ B = E,\ \hat{\Gamma} = Z$

  και $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$





- Ο λόγος των αντιστοίχων (ομολόγων) πλευρών τους ονομάζεται λόγος ομοιότητας και συμβολίζεται με λ.

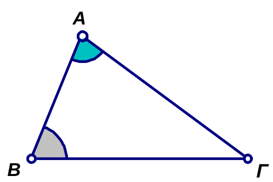
59. Πότε δύο τρίγωνα είναι όμοια;

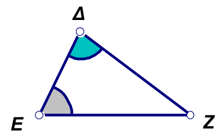
(Κριτήριο ομοιότητας τριγώνων)

- Δύο τρίγωνα είναι όμοια, όταν δύο γωνίες του ενός είναι ίσες με δύο γω-νίες του άλλου μία προς μία.

  Αν δηλαδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν $A = \Delta$, $B = E$, τότε

  $\overset{\triangle}{AB\Gamma} \sim \overset{\triangle}{\Delta EZ}$ και επομένως $\hat{\Gamma} = Z$ και $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$





Β. 1. 5

60. Με τι ισούται ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων;

- Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας τους.

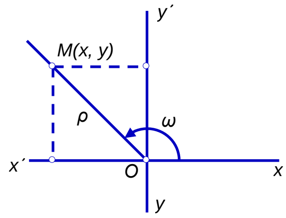
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2° - Τριγωνομετρία

Β. 2. 1

61. Πως ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οποιασδήποτε γωνίας;

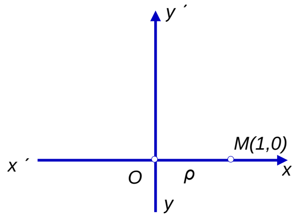
Έστω ω ($0° \le ω \le 180°$)η γωνία που παράγεται από τον ημιάξονα Οx, όταν αυτός στραφεί κατά τη θετική φορά. Αν πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο Μ(x, y) με xOM = ω και ΟΜ = $ρ = \sqrt{x^2 + y^2}$ τότε ορίζουμε:

$$ημω = \frac{y}{ρ}, \quad συνω = \frac{x}{ρ} \quad και \quad εφω = \frac{y}{x}$$



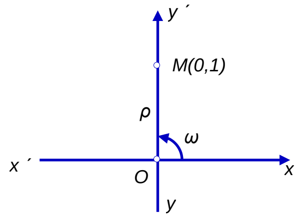
- Το ημω και συνω παίρνουν τιμές από το – 1 έως το +1.
- Η εφω παίρνει οποιαδήποτε τιμή.
- Αν το Μ(x, y) βρίσκεται στο 1 º τεταρτημόριο, τότε ημω> 0, συνω>0, εφω>0
- Αν το Μ(x, y) βρίσκεται στο 2 º τεταρτημόριο, τότε ημω> 0, συνω<0, εφω<0

62. Ποιοι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας ω = 0° ή ω = 90° ή ω = 180°;



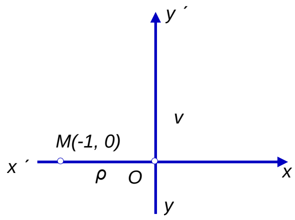
- Αν το Μ είναι σημείο του ημιάξονα Οx π.χ. το Μ(1,0), τότε ω = xOM = 0° και ρ = ΟΜ=1 οπότε έχουμε:

$ημ0° = \frac{y}{ρ} = \frac{0}{1} = 0,$ $\quad συν0° = \frac{x}{ρ} = \frac{1}{1} = 1,$ $\quad εφ0° = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$



- Αν το Μ είναι σημείο του ημιάξονα Οy π.χ. το Μ(0, 1), τότε ω = xOM = 90° και ρ = ΟΜ=1 οπότε έχουμε:

$ημ90° = \frac{y}{ρ} = \frac{1}{1} = 1,$ $\quad συν90° = \frac{x}{ρ} = \frac{0}{1} = 0,$ εφ90° δεν ορίζεται, αφού $x = 0$



- Αν το Μ είναι σημείο του ημιάξονα Οx΄ π.χ. το σημείο Μ(–1, 0), τότε ω = xOM = 180° και ρ = ΟΜ = 1 οπότε έχουμε:

$ημ180° = \frac{y}{ρ} = \frac{0}{1} = 0,$ $συν180° = \frac{x}{ρ} = \frac{-1}{1} = 1$, $εφ180° = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$

63. Ποιες σχέσεις συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς δύο παραπληρωματικών γωνιών;

Για δύο παραπληρωματικές γωνίες ω και 180° - ω ισχύουν:

$ημ(180° - ω) = ημω$

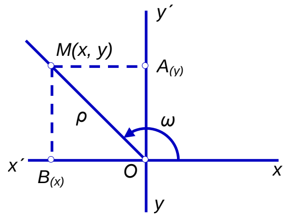
$συν(180° - ω) = -συνω$

$εφ(180° - ω) = -εφω$

64. Να αποδείξετε ότι για μια οποιαδήποτε γωνία ω ισχύουν οι τύποι:

$$\text{α. } ημ^2ω + συν^2ω = 1 \quad \text{και} \quad \text{β. } εφω = \frac{ημω}{συνω}$$

Απόδειξη α.



$$ημ^2ω + συν^2ω = \left(\frac{y}{ρ}\right)^2 + \left(\frac{x}{ρ}\right)^2 = \frac{y^2}{ρ^2} + \frac{x^2}{ρ^2} = \frac{y^2 + x^2}{ρ^2} = \frac{|y|^2 + |x|^2}{ρ^2} =$$

$$\frac{OA^2 + OB^2}{ρ^2} = \frac{OA^2 + AM^2}{ρ^2} = \frac{OM^2}{ρ^2} = \frac{ρ^2}{ρ^2} = 1$$

Απόδειξη β.

$$\frac{ημω}{συνω} = \frac{\frac{y}{ρ}}{\frac{x}{ρ}} = \frac{y \cdot ρ}{x \cdot ρ} = \frac{y}{x} = εφω$$

65. Να διατυπώσετε τον νόμο των ημιτόνων.

- Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\dfrac{α}{ημΑ} = \dfrac{β}{ημΒ} = \dfrac{γ}{ημγ}$

66. Να διατυπώσετε τον νόμο των συνημιτόνων.

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι σχέσεις

- $α^2 = β^2 + γ^2 - 2βγσυνΑ$
- $β^2 = γ^2 + α^2 - 2γασυνΒ$
- $γ^2 = α^2 + β^2 - 2αβσυνΓ$