

# Ενδοσχολική επιμόρφωση στο 10<sup>ο</sup> Πειραματικό Δ.Σ. Καστοριάς

## *Τα Μαθηματικά μέσα από τις δραστηριότητες Μελέτη περίπτωσης: Το παιχνίδι*



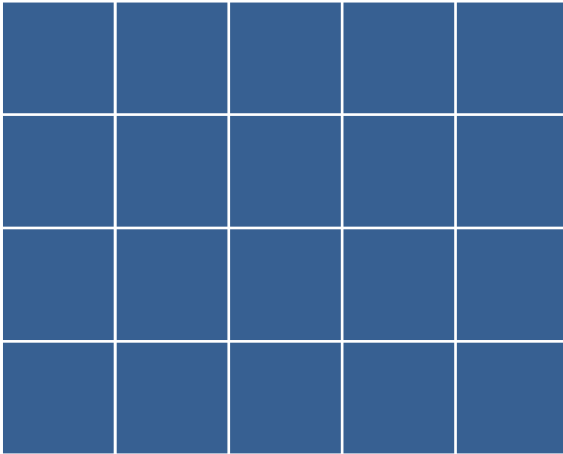
Ιωάννης Ρίζος  
Εντεταλμένος Διδάσκων και Μεταδιδακτορικός Ερευνητής  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας  
Τμήμα Μαθηματικών

## Σύντομη περιγραφή – Στόχοι

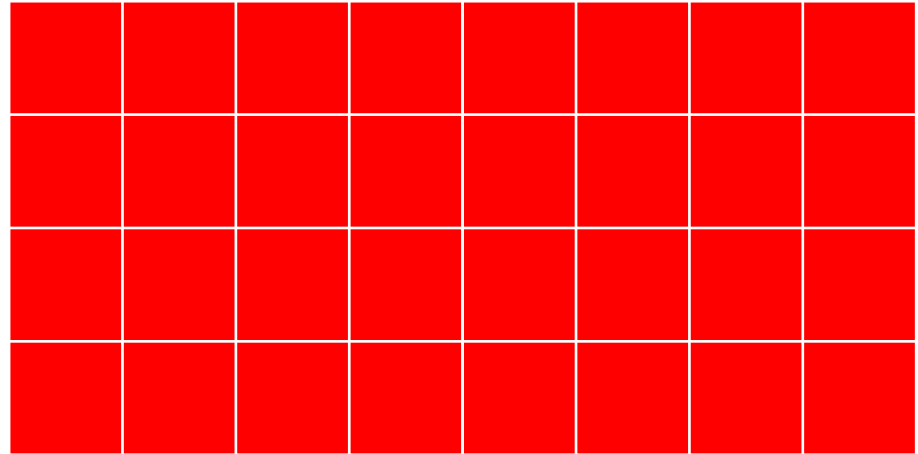
- Μια οριζόντια δράση που μας δίνει τη δυνατότητα να συγκροτήσουμε μια επαγγελματική κοινότητα μάθησης, να αλληλεπιδράσουμε ως εκπαιδευτικοί, να συζητήσουμε ελεύθερα, να προβληματιστούμε δημιουργικά, να μοιραστούμε απόψεις και πρακτικές.
- Πρώτη συνάντηση (12/3): Σχετικά με τους αριθμούς (μαθηματικό υπόβαθρο, συνηθισμένα λάθη και δυσκολίες των μαθητών, η διαχείριση των παρανοήσεων, συζήτηση)
- Δεύτερη συνάντηση (9/4): Σχετικά με τις δραστηριότητες και ιδιαίτερα το παιχνίδι (διδακτικές προτάσεις, συζήτηση, προοπτικές)

## Ένας (όχι και τόσο) φανταστικός διάλογος σε μια τάξη Ε΄ Δημοτικού

- *Κυρία, καλημέρα! Εχθές ασχολήθηκα αρκετή ώρα με τις ασκήσεις που μας είχατε βάλει για το σπίτι. Τις έλυσα όλες και μάλιστα έκανα και μία ανακάλυψη!*
- *Μπράβο, Γιάννη! Θα ήθελες να μου πεις τι ανακάλυψες;*
- *Παρατήρησα ότι όταν η περίμετρος ενός ορθογωνίου αυξάνεται, αυξάνεται και το εμβαδόν του. Δείτε για παράδειγμα το σχήμα:*



Περίμετρος: 18 εκ.  
Εμβαδόν: 20 τ. εκ.



Περίμετρος: 24 εκ.  
Εμβαδόν: 32 τ. εκ.

## Εισαγωγικά ερωτήματα

- i. Πώς θα αντιμετωπίζατε τον μαθητή;
- ii. Θα συζητούσατε το θέμα στην τάξη;
- iii. Πώς θα διαχειριζόσασταν μαθηματικά τον ισχυρισμό του Γιάννη;

## Σχετικά με τις δραστηριότητες

- Η έννοια της *δραστηριότητας* ή του *προβλήματος πλαισίου* είναι περιεκτικότερη από την αντίστοιχη έννοια του παραδοσιακού προβλήματος που περιγράφεται με λέξεις και (υποτίθεται πως) αφορά μια ρεαλιστική κατάσταση.
- Ένα πρόβλημα πλαισίου μπορεί να είναι λεκτικό, να έχει τη μορφή **παιχνιδιού**, χειραπτικού υλικού ή λογοτεχνικού κειμένου και να συνοδεύεται από εικόνες, σχήματα ή πίνακες.
- Τα προβλήματα πλαισίου μοιάζουν πολύ με τα προβλήματα που μπορεί να συναντήσει κάποιος στην καθημερινή ζωή.

## Οι δραστηριότητες...

- Δίνουν συχνά λιγότερες ή και περισσότερες πληροφορίες απ' όσες χρειάζονται και απαιτούν από τους μαθητές να διερευνήσουν την κατάσταση, να διατυπώσουν εικασίες ή να κάνουν εκτιμήσεις.
- Θέτουν συνήθως ένα ανοιχτό ερώτημα αντί να ζητούν μια ποσοτική απάντηση.
- Παρακινούν έμμεσα τους μαθητές να σκεφτούν τι είδους Μαθηματικά πρέπει να χρησιμοποιήσουν προκειμένου να απαντήσουν στην ερώτηση.



- Το να περιγράφεται μια ιστορία στην εκφώνηση ενός προβλήματος, δεν καθιστά αναγκαία το πρόβλημα αυτό δραστηριότητα/ πρόβλημα πλαισίου.
- Τα συνηθισμένα “πραγματικά” προβλήματα που υπάρχουν στα σχολικά βιβλία λειτουργούν σχεδόν αποκλειστικά ως πεδίο εφαρμογής των γνώσεων που διδάχθηκαν προηγουμένως οι μαθητές.



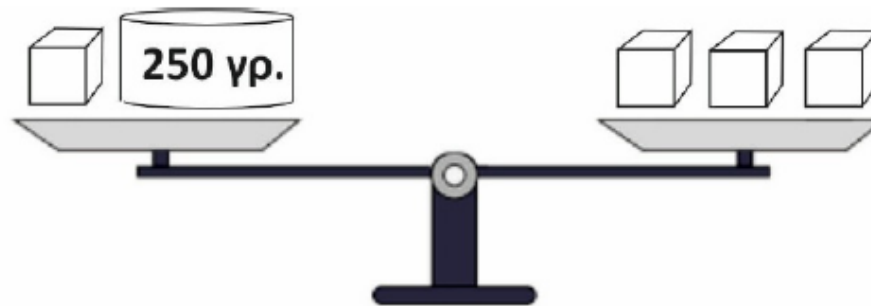
- Αντιθέτως, τα προβλήματα πλαισίου λειτουργούν ως πηγή για τη μαθησιακή διαδικασία. Όταν οι μαθητές εργάζονται επάνω σε τέτοιου είδους προβλήματα, έχουν τη δυνατότητα να ανακαλύψουν μόνοι τους τα απαραίτητα μαθηματικά εργαλεία και να τα κατανοήσουν. Αναπτύσσουν στρατηγικές επίλυσης που συνδέονται στενά με το πλαίσιο. Σταδιακά, ορισμένες πτυχές της κατάστασης πλαισίου μπορούν να *γενικευθούν*, πράγμα που σημαίνει ότι το συγκεκριμένο πρόβλημα αποκτά τον χαρακτήρα του *μοντέλου*, στη βάση του οποίου μπορούν να επιλυθούν και άλλα παρόμοια προβλήματα.

Δύο παραδείγματα δραστηριοτήτων (ή ασκήσεων που μπορούν να μετατραπούν σε δραστηριότητες) από τον, πρόσφατο, 19<sup>ο</sup> μαθητικό διαγωνισμό «Παιχνίδι και Μαθηματικά» και οι διδακτικές τους προεκτάσεις.



**ΘΕΜΑ 1ο**

Η παρακάτω ζυγαριά ισορροπεί. Ο κάθε κύβος ζυγίζει ..... γρ.



# Από το σχολικό βιβλίο της Στ' Δημοτικού



**Κεφάλαιο 27ο**

Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι μειωτέος ή αφαιρετέος

## Μαθηματικά σε κίνηση!



Σχηματίζω την εξίσωση ενός προβλήματος.  
Χρησιμοποιώ τις αντίστροφες πράξεις της αφαίρεσης για να λύσω μια εξίσωση.

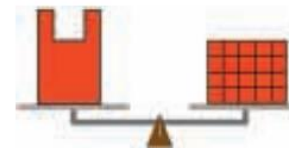


### Δραστηριότητα 1η

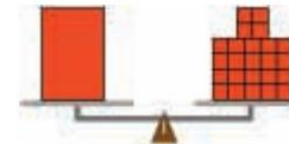
Στη διπλανή ζυγαριά από έναν άγνωστο αριθμό κύβων (**κ**) αφαιρώ 4 κύβους και η ζυγαριά ισορροπεί.

- Γράψε την εξίσωση που περιγράφει αυτή την ισορροπία:  
.....  $\kappa - 4 = 20$  .....
- Κατόπιν προσθέτω 4 κύβους σε κάθε πλευρά.
- Εξήγησε: Γιατί η ζυγαριά συνεχίζει να ισορροπεί;  
.....  $\kappa - 4 + 4 = 20 + 4$  .....
- Αρχικά στον αριστερό δίσκο είχαμε  $\kappa - 4$  κύβους. Τώρα πόσους έχουμε;
- Γράψε την ισότητα που περιγράφει τώρα την ισορροπία  
.....  $\kappa = 24$  .....
- Παρατηρώντας τις αλλαγές που έγιναν, μπορείς να διατυπώσεις έναν κανόνα για τον τρόπο που βρίσκουμε τη λύση όταν ο άγνωστος της εξίσωσης είναι μειωτέος;

Για να βρω το μειωτέο  $\kappa$ , προσθέτω στη διαφορά τον αφαιρετέο.



.....  $\kappa$  .....



# Από το Πανελλήνιο Σχολικό Δίκτυο

<https://users.sch.gr/thafounar/classB/lessons/balance/balance.php>

Λύση εξίσωσης με το ζυγό

Νέα εξίσωση ◀ 2 ▶ Διαίρεσε

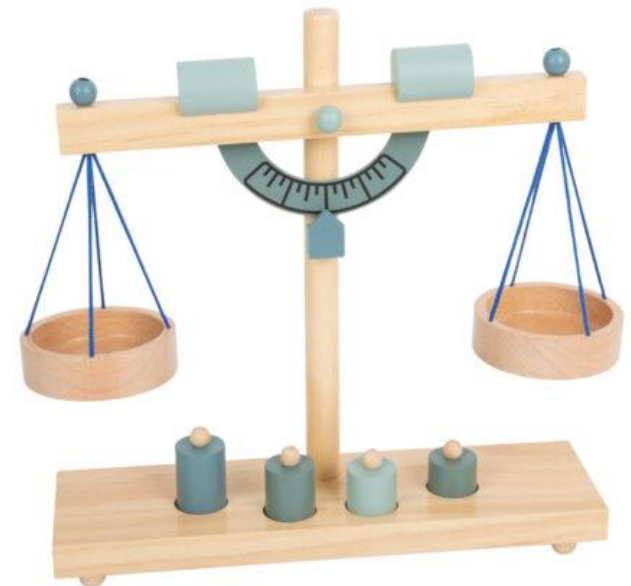
$3x+200 = x+600$  +X -X 100 -100

The image shows a balance scale with two pans. The left pan is higher and contains three blocks labeled 'X' and two blocks labeled '100'. The right pan is lower and contains one block labeled 'X' and six blocks labeled '100'. This visualizes the equation  $3x+200 = x+600$ .

## Πώς βλέπουν τα παιδιά το “=”;

Δείξτε έναν αριθμό ισοτήτων στον πίνακα ή δώστε στα παιδιά μια φωτοτυπία με ισότητες, κάποιες εκ των οποίων να είναι εσφαλμένες, π.χ.  $5+3=9$ , και ζητήστε τους να διαπιστώσουν αν κάπου υπάρχει λάθος και αν υπάρχει να το διορθώσουν.

Τι παρατηρείτε; Τα παιδιά βλέπουν το “=” ως ισορροπία μεταξύ δύο μερών (όπως π.χ. συμβαίνει σε μία ζυγαριά) ή ως μια προτροπή «να κάνουν κάτι» (ή να υπολογίσουν «πόσο κάνει»);



**Θέμα 9ο**

Μια γυάλα περιέχει κόκκινες, μπλε, πράσινες και πορτοκαλί μπίλιες. Οι μισές από τις μπίλιες είναι κόκκινες και το  $\frac{1}{5}$  είναι πορτοκαλί. Οι μπλε μπίλιες είναι όσες και οι πράσινες. Αν οι πορτοκαλί μπίλιες είναι 12, πόσες είναι οι κόκκινες και πόσες οι μπλε μπίλιες;

**Λύση**

**Απάντηση:** .....

## Ας αντιστρέψουμε την κατάσταση...

Ζητήστε από τα παιδιά (όλων των τάξεων του Δημοτικού) να δημιουργήσουν ένα δικό τους πρόβλημα με δύο ερωτήματα, βασισμένο στην ακόλουθη κατάσταση:

«Στη γυάλα Α υπάρχουν 30 κόκκινες και 9 μπλε μπίλιες. Στη γυάλα Β υπάρχουν 9 πράσινες και 12 πορτοκαλί μπίλιες»

Ποια θα μπορούσαν να είναι τα παιδαγωγικά οφέλη αυτής της αντιστροφής;



## Κατ' επέκταση...

ας δώσουμε περισσότερο βάρος στην ενεργοποίηση της σκέψης και της επικοινωνίας, ώστε η τάξη να μετατραπεί σε μαθησιακή κοινότητα (learning community).

Συνήθως οι περισσότερες ερωτήσεις που γίνονται στην τάξη ελέγχουν απλώς την ικανότητα των μαθητών να θυμούνται ή να εκτελούν κάτι συγκεκριμένο. Τέτοιες ερωτήσεις ονομάζονται «κλειστές», διότι επιδέχονται μοναδική σωστή απάντηση. Υπάρχουν όμως ερωτήσεις που προωθούν υψηλότερου επιπέδου ικανότητες, όπως κρίση, σύνθεση κ.λπ. Τέτοιες ερωτήσεις ονομάζονται «ανοικτές», διότι επιδέχονται μια σειρά απαντήσεων (π.χ. γράψτε δύο αριθμούς με άθροισμα 10 ή δύο κλάσματα με άθροισμα 1).

## Σχετικά με το παιχνίδι

Το παιχνίδι μπορεί να οριστεί ως μια δραστηριότητα η οποία συχνά θεωρείται “διασκέδαση”, διέπεται όμως από ακριβείς κανόνες που περιλαμβάνουν διαφορετικούς βαθμούς στρατηγικής ή τύχης, και έναν ή περισσότερους παίκτες που συνεργάζονται ή ανταγωνίζονται (με τον εαυτό τους, το παιχνίδι, ο ένας με τον άλλον ή έναν υπολογιστή) μέσω της χρήσης γνώσεων ή δεξιοτήτων σε μια προσπάθεια επίτευξης ενός συγκεκριμένου στόχου.

## Σχετικά με το παιχνίδι

Τόσο τα ψηφιακά (σε Η/Υ, κονσόλες, tablet, κ.λπ.) όσο και τα μη ψηφιακά παιχνίδια (π.χ. επιτραπέζια παιχνίδια και παιχνίδια με κάρτες) μπορούν να υποστηρίξουν αποτελεσματικά τη συμμετοχή των μαθητών στο μάθημα των Μαθηματικών. Ωστόσο λίγα πράγματα είναι γνωστά μέχρι στιγμής για τις προτιμήσεις των εκπαιδευτικών αναφορικά με τα είδη των παιχνιδιών και τους παράγοντες που τις επηρεάζουν.

## Σχετικά με το παιχνίδι

Για παράδειγμα, έρευνα έχει δείξει ότι μαθητές Δημοτικού άρχισαν να αμφισβητούν τις δικές τους παρερμηνείες σε σχέση με τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση παίζοντας “Guestimate”. Οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού κάποιου αριθμού που συνήθως περιελάμβανε ένα δεκαδικό μέρος με έναν άλλο αριθμό, συχνά μικρότερο από το ένα. Το παιχνίδι βοήθησε τους μαθητές να παλέψουν με μια κοινή παρανόηση, ότι ο πολλαπλασιασμός κάνει πάντα το αποτέλεσμα μεγαλύτερο.

## Σχετικά με το παιχνίδι

Πέρα από τη βελτίωση της κατανόησης και της επίδοσης στα Μαθηματικά, το παιχνίδι έχει συσχετιστεί με μια σειρά άλλων πλεονεκτημάτων. Συγκεκριμένα, έχει αποδειχθεί ότι τα μη-ψηφιακά παιχνίδια Μαθηματικών μπορούν να μειώσουν το μαθηματικό άγχος (anxiety), να ενθαρρύνουν την ενεργητική μάθηση, τη συνεργασία και τη διαδραστικότητα. Βελτιώνουν τη χρήση του μαθηματικού λεξιλογίου και αυξάνουν την επάρκεια των μαθητών στη μαθηματική συλλογιστική. Επιπλέον, σχετίζονται με την αύξηση του χρόνου που οι μαθητές περνούν συζητώντας για τα Μαθηματικά.

Τα αποτελέσματα για τα ψηφιακά παιχνίδια είναι παρόμοια, τόσο στον γνωστικό όσο και στον συναισθηματικό τομέα.

# Πολλαπλασιασμός δεκαδικών αριθμών



Δημιουργήστε καλύτερα μαθήματα γρηγορότερα

Αρχική

Δυνατότητες

Πλάνα τιμών

🔍 Κοινότητα

4:39

◀ 4 από 10 ▶

100

10

$$0,008 \times \boxed{\phantom{000}} = 0,8$$



Υποβολή απαντήσεων



# Παιχνίδια με στόχο την εκτίμηση...

<https://www.mathgames.com/estimation>

Choose the best answer

Luke has 45 pencils in his pencil case, and during class he is given back 18 pencils that he had lent out. Estimate how many pencils Luke has now.

100

70

# Παιχνίδια με στόχο την εκτίμηση...

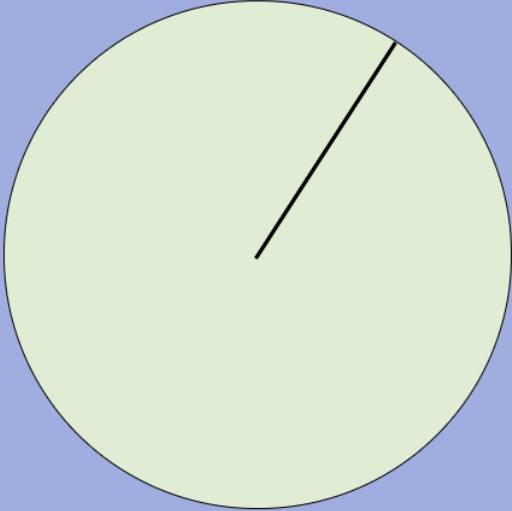
<https://nrich.maths.org/games/estimating-angles>

## Estimating Angles

Target angles between  $0^\circ$  and  $90^\circ$  1 player

Round: 1  
Target angle:  $16^\circ$

Score: 0  
Average score: 0



Click on the circle to start.  
Click again to stop.

Restart

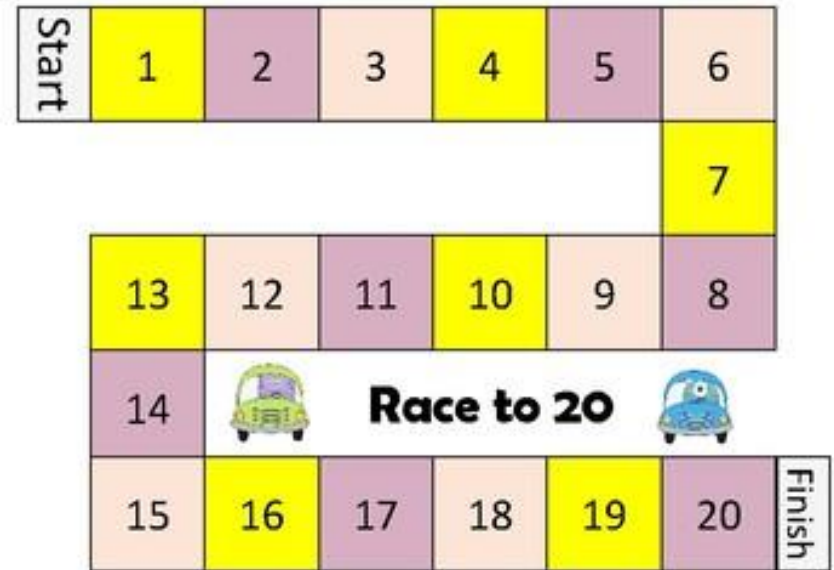
Error	Score
$0^\circ-5^\circ$	10
$6^\circ-10^\circ$	5
$11^\circ-15^\circ$	2



# Ο αγώνας για το 10 ή ο αγώνας για το 20 κ.λπ.



**Race to 10**



Χρωματίστε τον χάρτη με τέτοιο τρόπο ώστε δύο γειτονικές περιφερειακές ενότητες να μην έχουν το ίδιο χρώμα...





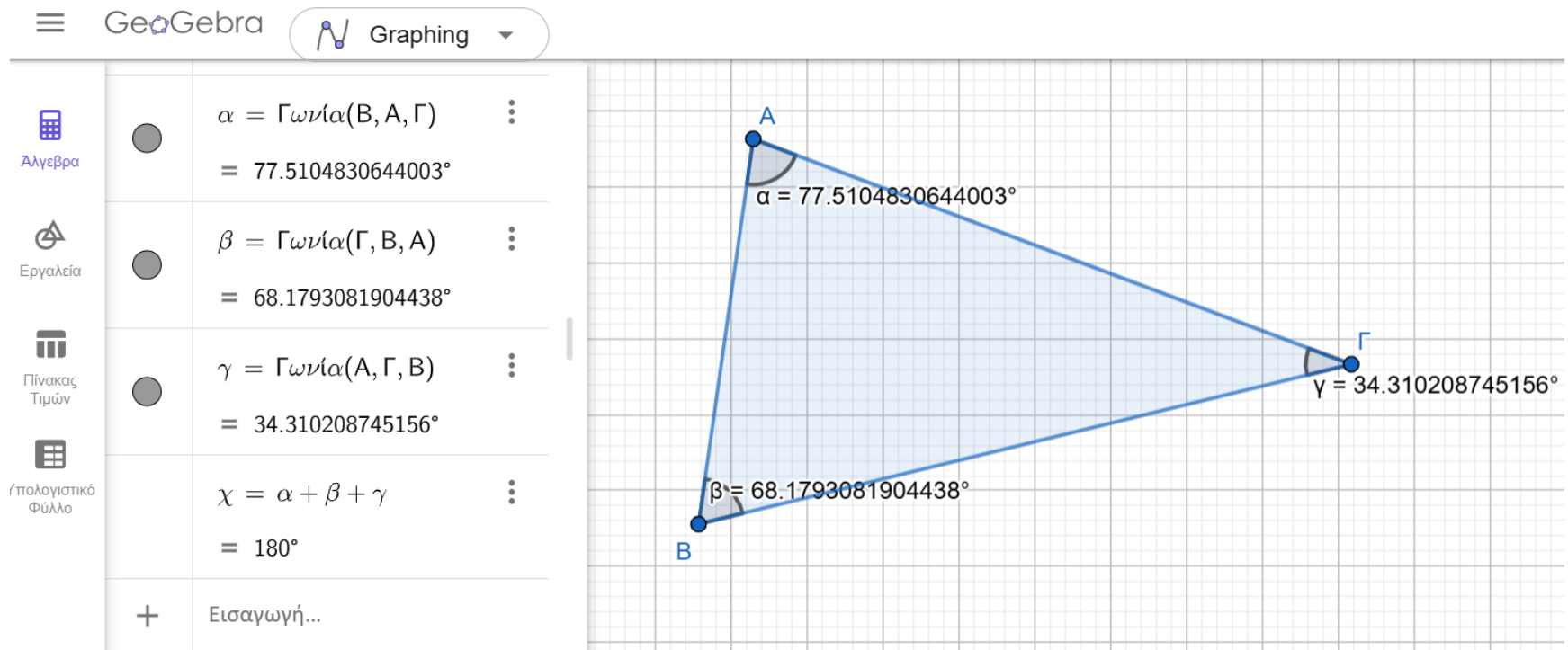
Διαθέτουμε πολλούς μοναδιαίους κύβους. Το εμβαδόν μιας έδρας κάθε κύβου είναι 1 τ.μ. και το συνολικό εμβαδόν της επιφάνειάς του είναι 6 τ.μ.

- i. Ενώνουμε δύο κύβους, έδρα με έδρα. Ποιο είναι το εμβαδόν της συνολικής επιφάνειας;
- ii. Ενώνουμε τρεις κύβους, έδρα με έδρα. Ποιο είναι το εμβαδόν της συνολικής επιφάνειας;
- iii. Τι ισχύει για οκτώ κύβους;



- α) Ένα κουτί έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, με διαστάσεις 6εκ., 9εκ., 18εκ. Θέλουμε να γεμίσουμε (χωρίς κενά) το κουτί με ίσους κύβους, τους λιγότερους δυνατούς.
- Πόσο μήκος πρέπει να έχει η ακμή του κάθε κύβου;
  - Πόσοι κύβοι θα γεμίσουν το κουτί;
- β) Να λύσετε το πρόβλημα αν οι διαστάσεις του κουτιού είναι 5εκ., 9εκ., 16εκ.
- γ) Μπορείτε να βρείτε έναν κανόνα που να μας δίνει τη λύση του προβλήματος, όποιες κι αν είναι οι διαστάσεις του κουτιού;

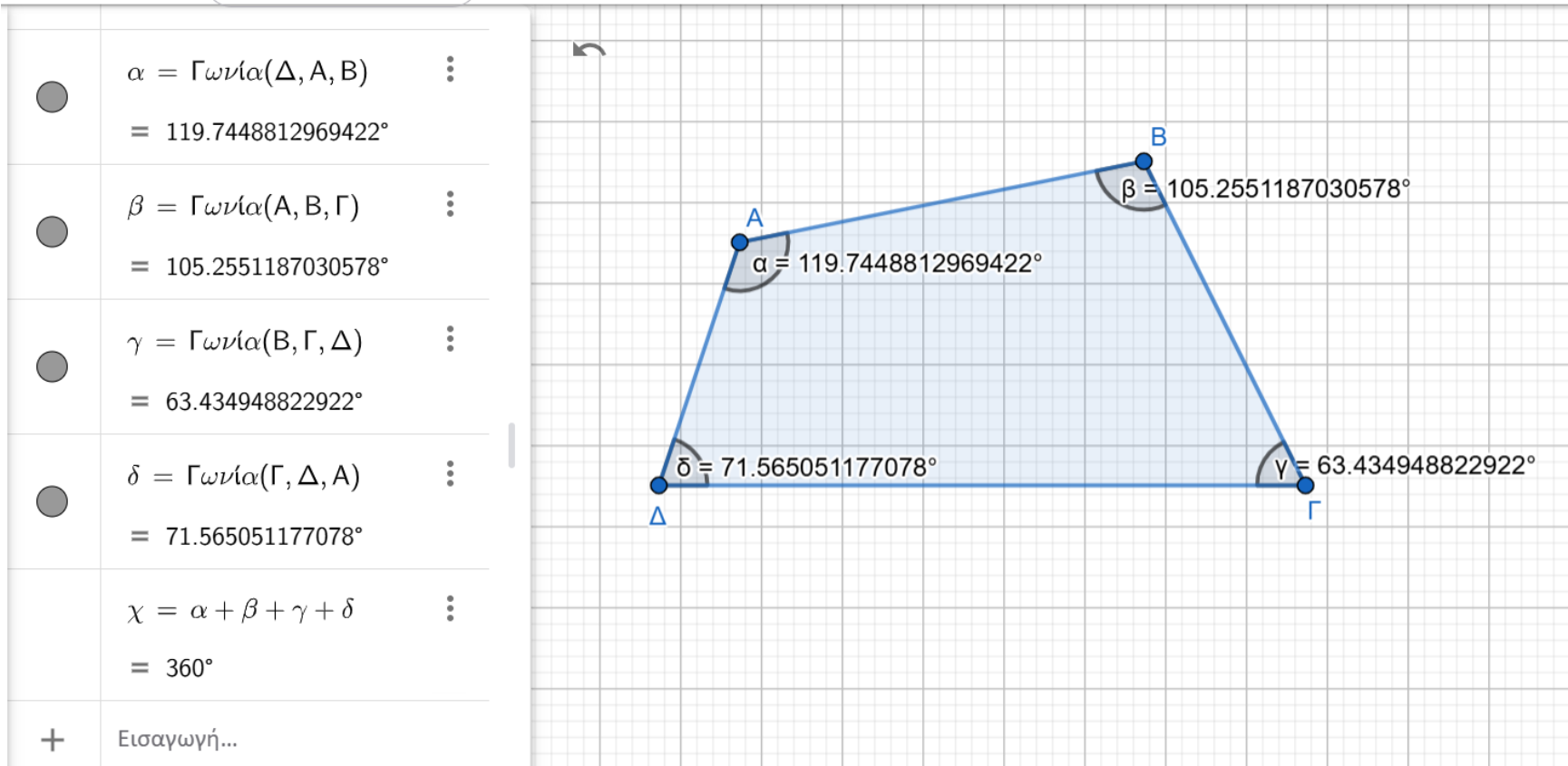
# Άθροισμα γωνιών τριγώνου



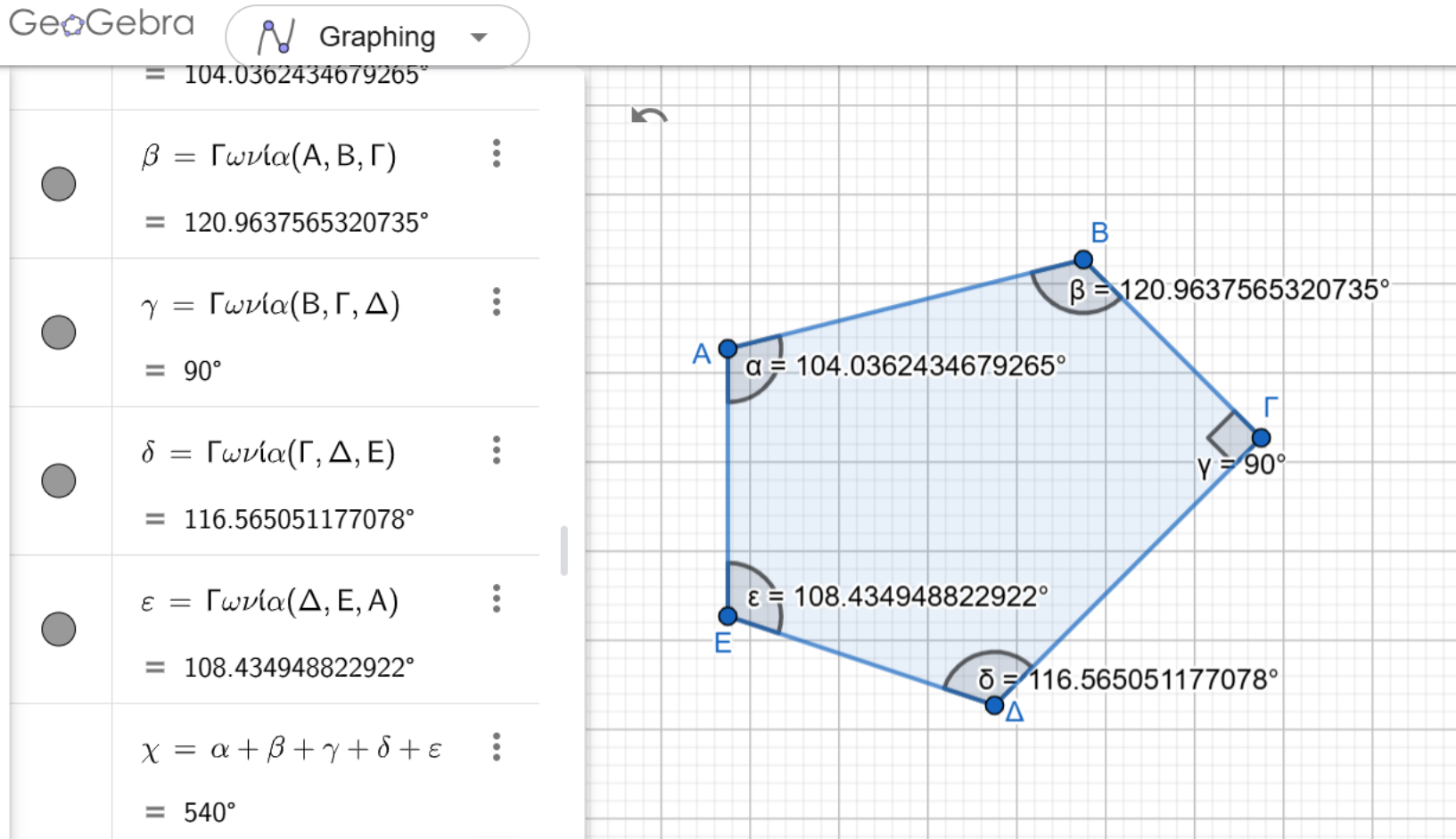
# Άθροισμα γωνιών τετραπλεύρου

GeoGebra

Graphing

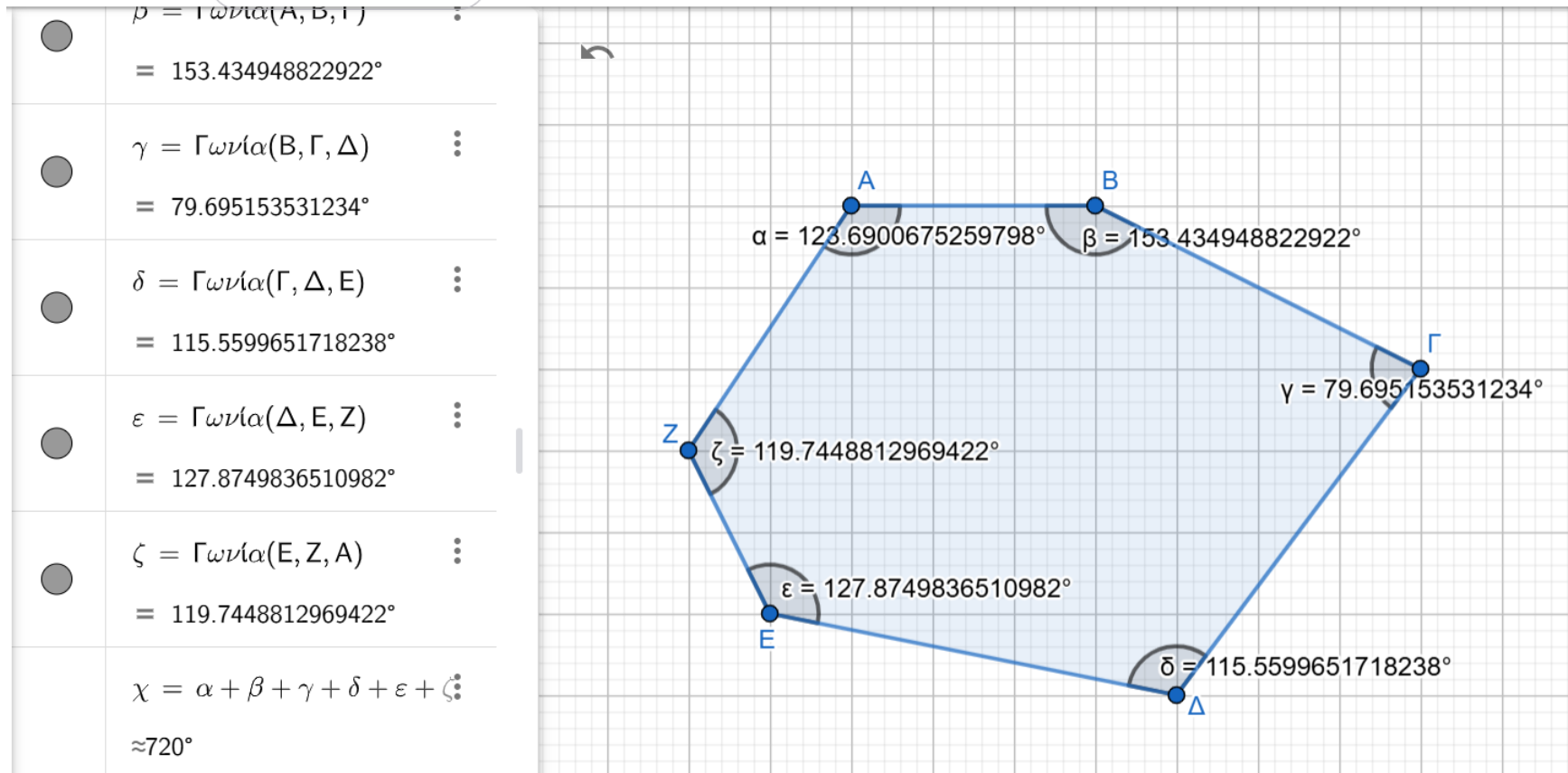


# Άθροισμα γωνιών πενταγώνου



# Άθροισμα γωνιών εξαγώνου

GeoGebra Graphing





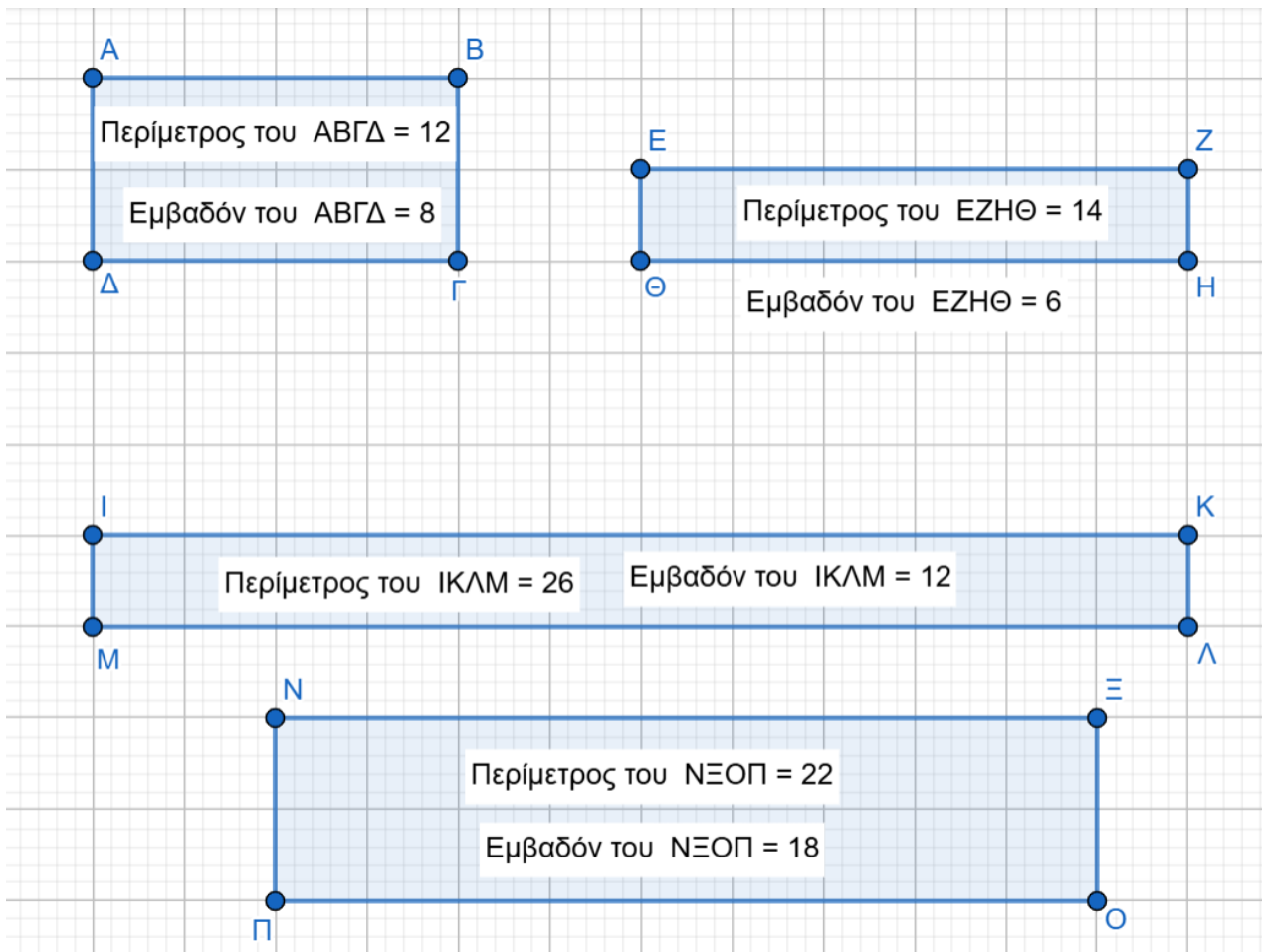
## Άθροισμα γωνιών (κυρτού) $n$ -γώνου

Πολύγωνο	Άθροισμα γωνιών
3	2 ορθές
4	4 ορθές
5	6 ορθές
6	8 ορθές
...	...
$n$	;

# Ας επανέλθουμε στα εισαγωγικά ερωτήματα



# Ας επανέλθουμε στα εισαγωγικά ερωτήματα



# Συζήτηση



Σας ευχαριστώ για τη συνεργασία!