

Συμπληρωματικές σημειώσεις

- Είναι $0,\bar{9} = 0,999 \dots = 1$

Απόδειξη 1η

Θέτουμε $x = 0,999 \dots$ και έχουμε διαδοχικά:

$$x = 0,999 \dots$$

$$10x = 9,999 \dots$$

$$10x = 9 + 0,999 \dots$$

$$10x = 9 + x$$

$$(10 - 1)x = 9$$

$$9x = 9$$

$$x = 1$$

Απόδειξη 2η

$$0,999 \dots = 0,9 + 0,09 + 0,009 + \dots$$

$$0,999 \dots = 9(0,1 + 0,01 + 0,001 + \dots)$$

$$0,999 \dots = 9\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots\right)$$

Έστω

$$S = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$$

οπότε

$$10S = 10\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots\right)$$

$$10S = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots$$

$$10S = 1 + S$$

$$9S = 1$$

$$S = \frac{1}{9}$$

Επομένως

$$0,999 \dots = 9 \cdot \frac{1}{9}$$

$$0,999 \dots = 1$$