Ερώτηση 3.

Δύο σώματα με ορμές των οποίων τα μέτρα είναι ίσα ($p_1 = p_2 = p$), κινούνται σε διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους και συγκρούονται πλαστικά.

Το μέτρο της ορμής του συσσωματώματος μετά την κρούση είναι ίσο με:

α) p.

β) $2p$.

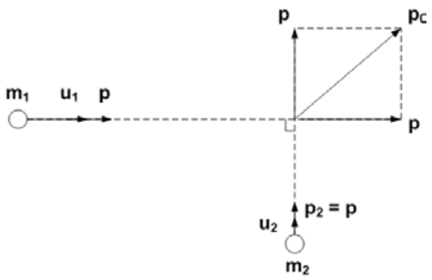
γ) $\sqrt{2}p$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Για την κρούση ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής, οπότε: $\vec{p}_{Αρχ} = \vec{p}_{Τελ}$. Το μέτρο της ολικής ορμής, p_0, του συστήματος πριν την κρούση είναι $p_o = \sqrt{p^2 + p^2} = \sqrt{2}p$.



Άρα $p_{Τελ} = \sqrt{2}p$.

Ερώτηση 7.

Ένα σώμα Α με ορμή μέτρου p και μάζα m συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με άλλο ακίνητο σώμα Β, ίδιας μάζας με το Α. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος Α είναι ίση με

α) μηδέν.

β) $-\dfrac{p^2}{2m}$.

γ) $\dfrac{p^2}{2m}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η β.

Επειδή η κρούση είναι ελαστική και τα δύο σώματα έχουν ίδια μάζα, τα σώματα ανταλλάσουν ταχύτητες. Επειδή το σώμα Β είναι αρχικά ακίνητο, το σώμα Α μετά την κρούση θα παραμείνει ακίνητο, κατά συνέπεια η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος Α θα είναι ίση με

$$\Delta K = K_{τελ} - K_{αρχ} = 0 - \frac{m\upsilon^2}{2} \Rightarrow \Delta K = -\frac{m^2\upsilon^2}{2m} \Rightarrow \Delta K = -\frac{p^2}{2m}$$

Ερώτηση 9.

Ένα σώμα A μάζας $m_1 = 2m$, το οποίο έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ συγκρούεται πλαστικά με σώμα B μάζας $m_2 = m$. Μετά την κρούση, το συσσωμάτωμα μένει ακίνητο. Ο λόγος των μέτρων των ταχυτήτων, $\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$, των δύο σωμάτων πριν την κρούση είναι:

α) $\frac{1}{2}$.

β) 2.

γ) 4.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η α.

Από την Αρχή Διατήρησης της Ορμής προκύπτει ότι για να είναι η ορμή του συστήματος πριν την κρούση μηδέν πρέπει το δεύτερο σώμα να κινείται και μάλιστα με ορμή αντίθετη από αυτήν του σώματος Α.

Εφαρμόζουμε την Διατήρησης της Ορμής για την κρούση.

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow m\vec{\upsilon}_1 + m\vec{\upsilon}_2 = 0 \Rightarrow 2m\upsilon_1 - m\upsilon_2 = 0 \Rightarrow \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}$$

Ερώτηση 10.

Ένα σώμα A μάζας $m_1 = 2m$, το οποίο έχει κινητική ενέργεια $K_A = K$, συγκρούεται πλαστικά με σώμα B μάζας $m_2 = m$. Μετά την κρούση, το συσσωμάτωμα μένει ακίνητο. Η μηχανική ενέργεια που μετατράπηκε σε θερμότητα κατά τη διάρκεια της κρούσης, είναι ίση με

α) $4K$.

β) $\frac{K}{3}$.

γ) $3K$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Αφού το συσσωμάτωμα μένει ακίνητο όλη η κινητική ενέργεια που είχαν τα σώματα πριν την κρούση μετατρέπεται σε θερμότητα.

$Q = K_A + K_B$ (1)

Από τη διατήρηση της ορμής προκύπτει:

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow m\vec{\upsilon}_1 + m\vec{\upsilon}_2 = 0 \Rightarrow 2m\upsilon_1 - m\upsilon_2 = 0 \Rightarrow \upsilon_2 = 2\upsilon_1$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1)παίρνουμε:

$$Q = K_A + K_B = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 \Rightarrow Q = \frac{1}{2}2m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m(2\upsilon_1)^2 = m\upsilon_1^2 + 2m\upsilon_1^2 \Rightarrow$$
$$Q = K + 2K \Rightarrow Q = 3K$$

Ερώτηση 11.

Ένα σώμα A μάζας m_1 κινούμενο με ταχύτητα υ_1 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα B μάζας m_2. Το σώμα A συνεχίζει μετά την κρούση να κινείται κατά την ίδια φορά με ταχύτητα $\upsilon'_1 = \frac{\upsilon_1}{2}$. Ο λόγος των μαζών των δύο σωμάτων, $\frac{m_1}{m_2}$, είναι ίσος με

α) 3.

β) 2.

γ) $\frac{1}{3}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Επειδή η κρούση είναι κεντρική ελαστική και το σώμα Β είναι αρχικά ακίνητο, το σώμα Α μετά την κρούση θα κινηθεί με ταχύτητα που δίνεται από τη σχέση

$$\upsilon'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1$$

Με αντικατάσταση παίρνουμε

$$\frac{\upsilon_1}{2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\cdot\upsilon_1 \Rightarrow m_1 + m_2 = 2m_1 - 2m_2 \Rightarrow m_1 = 3m_2$$

Άρα, $\frac{m_1}{m_2} = 3$.

Ερώτηση 14.

Ένα ακίνητο βλήμα εκρήγνυται σε τρία μέρη A, B και Γ. Τα μέρη A και B έχουν ορμές που βρίσκονται σε διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους με μέτρα που είναι ίσα με: $p_1 = p_2 = p = 20\dfrac{\mathrm{Kgm}}{\mathrm{s}}$.

Το μέτρο της ορμής του τρίτου κομματιού είναι:

α) $10\dfrac{\mathrm{Kgm}}{\mathrm{s}}$.

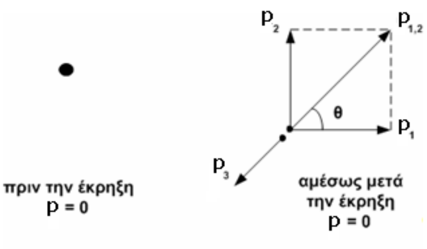
β) $20\dfrac{\mathrm{Kgm}}{\mathrm{s}}$.

γ) $20\sqrt{2}\dfrac{\mathrm{Kgm}}{\mathrm{s}}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η γ.



Επειδή η ορμή διατηρείται θα ισχύει

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow 0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \Rightarrow \vec{p}_3 = -\vec{p}_{12} \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι οι κατευθύνσεις των $\vec{p}_3$ και $\vec{p}_{12}$ θα είναι αντίθετες.

Το μέτρο της ορμής $\vec{p}_{12}$ είναι:

$$p_{12} = \sqrt{p_1{}^2 + p_2{}^2} = \sqrt{2p^2} = p\sqrt{2} \Rightarrow p_{12} = 20\sqrt{2}\frac{\mathrm{Kgm}}{\mathrm{s}}$$

Άρα το μέτρο της ορμής του 3^{ου} κοματιού είναι $p_3 = 20\sqrt{2}\ \mathrm{Kg}\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Ερώτηση 19.

Ένα σώμα A μάζας M είναι ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ένα άλλο σώμα B μάζας m, που κινείται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο συγκρούεται πλαστικά κεντρικά με το σώμα A. Αν μετά την κρούση το συσσωμάτωμα έχει το $\frac{1}{3}$ της κινητικής ενέργειας που είχε ελάχιστα πριν την κρούση, τότε μεταξύ των μαζών των σωμάτων ισχύει η σχέση

α) $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{m}}=6$.

β) $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{m}}=2$.

γ) $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{m}}=3$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η β.

Δίνεται ότι: $\frac{K_{ολ}^{τελ}}{K_{ολ}^{αρχ}}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\frac{(\mathrm{M}+\mathrm{m})V^2}{2}}{\frac{\mathrm{m}υ^2}{2}}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V^2}{υ^2}=\frac{\mathrm{m}}{3(\mathrm{M}+\mathrm{m})}$ (1)

Εφαρμόζουμε τη Διατήρησης της Ορμής για την κρούση, οπότε παίρνουμε:

$p_{ολ}^{τελ}=p_{ολ}^{αρχ} \Rightarrow (\mathrm{M}+\mathrm{m})V=\mathrm{m}υ \Rightarrow \frac{V}{υ}=\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{M}+\mathrm{m}}$ (2)

Αφού υψώσουμε την (2) στο τετράγωνο την εξισώνουμε με τη (1), οπότε προκύπτει:

$\frac{\mathrm{m}}{3(\mathrm{M}+\mathrm{m})}=\frac{\mathrm{m}^2}{(\mathrm{M}+\mathrm{m})^2} \Rightarrow \frac{1}{3}=\frac{\mathrm{m}}{(\mathrm{M}+\mathrm{m})} \Rightarrow 2\mathrm{m}=\mathrm{M}$ άρα $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{m}}=2$.

Ερώτηση 20.

Μια μικρή σφαίρα Σ_1, μάζας m_1, συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητη μικρή σφαίρα Σ_2, μάζας m_2. Μετά την κρούση οι σφαίρες κινούνται με αντίθετες κατευθύνσεις και τα μέτρα των ταχυτήτων τους υ'_1 και υ'_2 αντίστοιχα συνδέονται με τη σχέση $|\upsilon'_1| = 2|\upsilon'_2|$. Ο λόγος των μαζών των δύο σφαιρών $\frac{m_1}{m_2}$, είναι ίσος με:

α) 1.

β) $\frac{1}{5}$.

γ) 5.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η β.

Έχουμε ελαστική κρούση δύο σωμάτων από τα οποία το ένα αρχικά είναι ακίνητο, οπότε οι ταχύτητές τους μετά την κρούση δίνονται από τις σχέσεις:

$$\upsilon'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1$$

$$\upsilon'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1$$

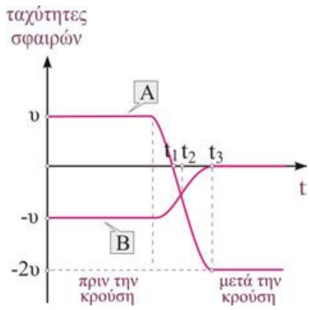
Τα σώματα μετά την κρούση θα κινηθούν στην ίδια διεύθυνση αλλά με αντίθετες φορές. Όπως προκύπτει από τις πιο πάνω σχέσεις το σώμα Σ_2 θα έχει ίδια φορά με αυτή που είχε πριν την κρούση το Σ_1. Συνεπώς για τα μέτρα των ταχυτήτων θα ισχύει:

$$-\upsilon'_1 = 2\upsilon'_2 \Rightarrow -\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = 2\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 .$$

Από όπου προκύπτει: $-m_1 + m_2 = 4m_1 \Rightarrow m_2 = 5m_1 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{5}$

Ερώτηση 29.

Στο διάγραμμα του σχήματος φαίνονται οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων δυο σφαιρών Α και Β πριν και μετά τη μεταξύ τους κεντρική κρούση. Οι μάζες των δύο σφαιρών συνδέονται με τη σχέση



α. $m_B=3m_A$

β. $m_B=2m_A$

γ. $m_B = m_A$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

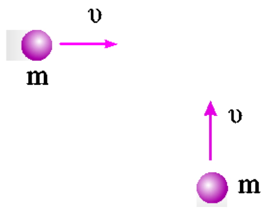
Σωστή απάντηση είναι η (α).

Επειδή η κρούση είναι κεντρική η διατήρηση της ορμής αλγεβρικά γράφεται:

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \;\Rightarrow\; m_A υ - m_B υ = -m_A \cdot 2υ + 0 \;\Rightarrow\; m_B = 3m_A$$

Ερώτηση 31.

Οι δύο σφαίρες του σχήματος κινούνται σε κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις με ταχύτητες ίδιου μέτρου και συγκρούονται πλαστικά. Η κίνηση γίνεται σε οριζόντιο λείο επίπεδο. Το μέτρο της ταχύτητας V_K του δημιουργούμενου συσσωματώματος είναι



α. $V_K = \upsilon\sqrt{2}$

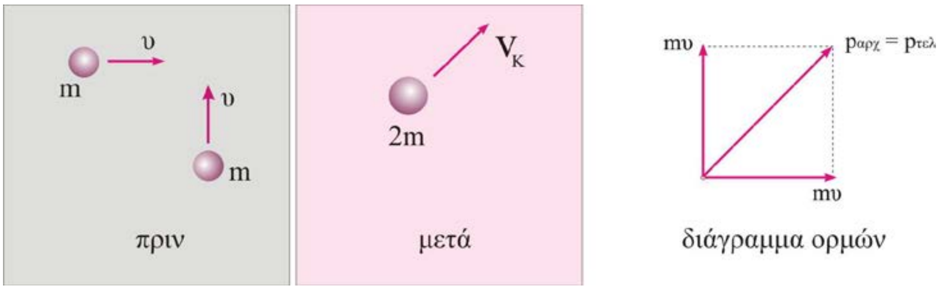
β. $V_K = \dfrac{\upsilon\sqrt{2}}{2}$

γ. $V_K = 2\upsilon$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).



Από τη διατήρηση της ορμής έχουμε:

$$\vec{p}_{τελ} = \vec{p}_{αρχ} \Rightarrow (2m \cdot V_K)^2 = (m\upsilon)^2 + (m\upsilon)^2 \;\; \Rightarrow \;\; 4V_K^2 = 2\upsilon^2 \;\; \Rightarrow \;\; V_K = \upsilon\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άσκηση 2.

(Η άσκηση δόθηκε από τον εθελοντή κ. Παπαδημητρίου Αθανάσιο)

Ένα σώμα $Σ_1$, μάζας m_1, κινούμενο σε οριζόντιο επίπεδο συγκρούεται με ταχύτητα μέτρου $υ_1 = 5m/s$ κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα $Σ_2$, μάζας m_2. Η χρονική διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του επιπέδου και κάθε σώματος είναι $μ = 0,5$. Αμέσως μετά την κρούση, το σώμα μάζας $Σ_1$ κινείται αντίρροπα με ταχύτητα μέτρου $υ_1' = 3m/s$.

α) Να προσδιορίσετε το λόγο των μαζών $\frac{m_1}{m_2}$.

β) Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μάζας m_2 αμέσως μετά την κρούση.

γ) Να βρείτε το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του σώματος $Σ_1$ που μεταβιβάστηκε στο σώμα $Σ_2$, λόγω της κρούσης.

δ) Να υπολογίσετε πόσο θα απέχουν τα σώματα όταν σταματήσουν.

Δίνεται $g = 10m/s^2$.

<u>Λύση</u>

α) Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, οπότε οι ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$υ_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} υ_1 \quad (1)$$

$$υ_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} υ_1 \quad (2)$$

Με αντικατάσταση, στο S.I., στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$-3 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} 5 \Rightarrow -3m_1 - 3m_2 = 5m_1 - 5m_2 \Rightarrow 2m_2 = 8m_1 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{4}$$

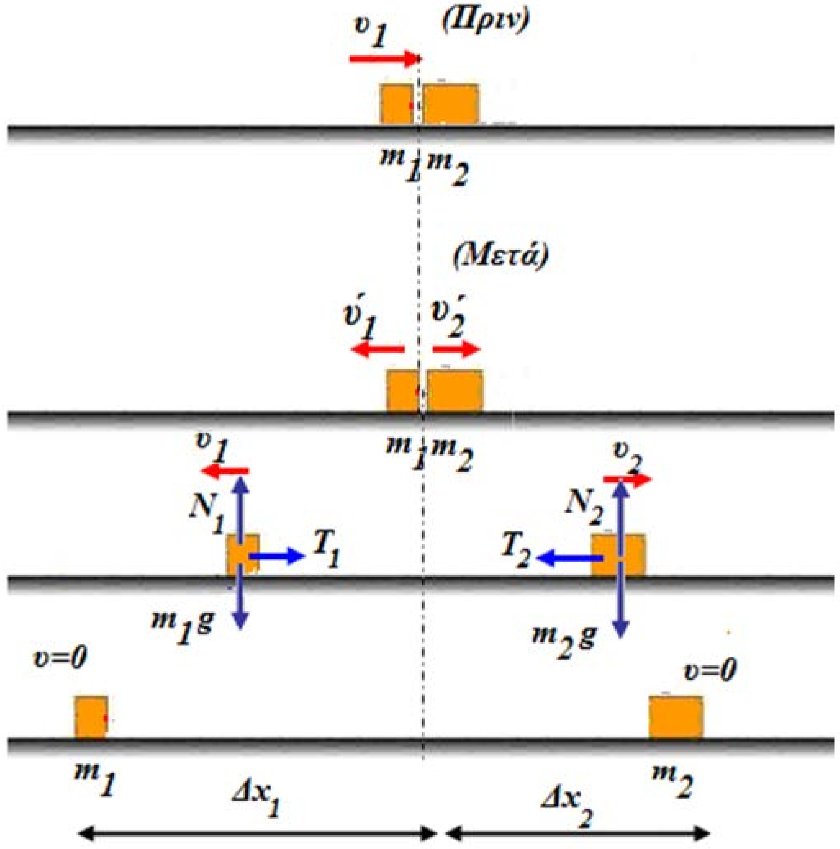
β) Με αντικατάσταση στη σχέση (2) παίρνουμε:

$$υ_2' = \frac{2m_1}{m_1 + 4m_1} \cdot 5\frac{m}{s} \Rightarrow υ_2' = 2\frac{m}{s}$$

γ) Η κινητική ενέργεια που μεταφέρθηκε στο σώμα $Σ_2$ κατά την κρούση είναι ίση με την κινητική ενέργεια που απέκτησε το σώμα αυτό, ακριβώς μετά την κρούση. Έτσι το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του σώματος $Σ_1$ που μεταβιβάστηκε στο σώμα $Σ_2$, λόγω της κρούσης είναι:

$$\frac{K_2'}{K_1}100\% = \frac{\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2}100\% = \frac{4m_1(2m/s)^2}{m_1(5m/s)^2}100\% \Rightarrow \frac{K_2'}{K_1}100\% = 64\%$$

δ) Μετά την κρούση και λόγω της ύπαρξης των τριβών καθένα από τα δύο σώματα εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση και τελικά σταματά.



Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για κάθε σώμα χωριστά.

$$0-\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = W_{m_1g}+W_{N_1}+W_{T_1} \Rightarrow -\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = -T_1\cdot\Delta x_1 \Rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = \mu m_1 g\Delta x_1 \text{ ή}$$

$$\Delta x_1 = \frac{\upsilon_1'^2}{2\mu g} = \frac{(3m/s)^2}{2\cdot 0,5\cdot 10m/s^2} \Rightarrow \Delta x_1 = 0,9m$$

$0-\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = W_{m_2g}+W_{N_2}+W_{T_2} \Rightarrow -\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = -T_2\cdot\Delta x_2 \Rightarrow \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = \mu m_2 g\Delta x_2$ ή

$$\Delta x_2 = \frac{\upsilon_2'^2}{2\mu g} = \frac{(2m/s)^2}{2\cdot 0,5\cdot 10m/s^2} \Rightarrow \Delta x_2 = 0,4m$$

(Τα έργα των βαρών και των κάθετων αντιδράσεων είναι μηδενικά, διότι οι δυνάμεις αυτές είναι κάθετες στις αντίστοιχες μετατοπίσεις)

Η τελική απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων είναι: $S = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 1,3m$

Άσκηση 6.

Ένα σώμα μάζας M=4 kg κινούμενο πάνω σε οριζόντιο επίπεδο συγκρούεται μετωπικά και ανελαστικά, έχοντας ταχύτητα $υ_1$ με μια ακίνητη σφαίρα μάζας m=3 kg, η οποία είναι κρεμασμένη με νήμα μήκους ℓ=0,9 m, όπως φαίνεται στο σχήμα. Μετά την κρούση η σφαίρα εκτρέπεται και η μέγιστη γωνία που σχηματίζει το νήμα με την αρχική κατακόρυφη θέση του είναι φ=60°, ενώ το σώμα μάζας M διανύει απόσταση d=4 m μέχρι να σταματήσει. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ του σώματος μάζας M και του οριζόντιου δαπέδου είναι μ=0,2.

Να υπολογίσετε:

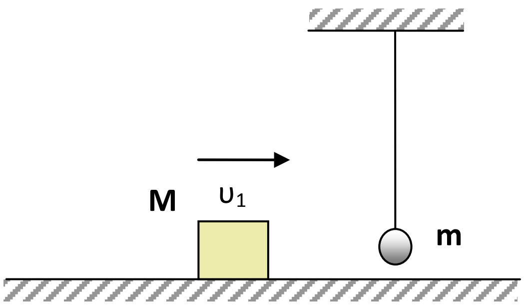
α. την ταχύτητα $υ_2΄$ της σφαίρας αμέσως μετά την κρούση.

β. την ταχύτητα $υ_1΄$ του σώματος μάζας M αμέσως μετά την κρούση.

γ. την ταχύτητα $υ_1$ του σώματος μάζας M ελάχιστα πριν την κρούση.

δ. το μέτρο της τάσης του νήματος, αμέσως μετά την κρούση.

Δίνεται: g=10 m/s^2.



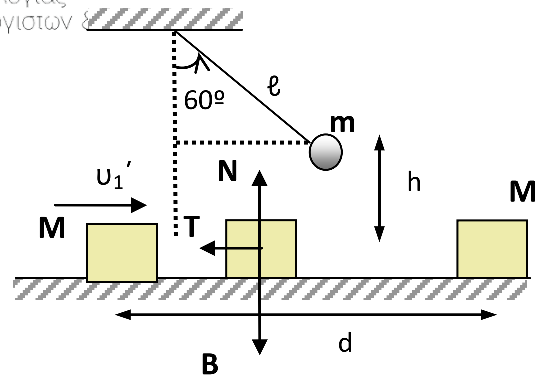
<u>Λύση</u>

α. Για την κίνηση της σφαίρας μετά την κρούση μέχρι να σταματήσει για πρώτη φορά εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου – ενέργειας

$$W_w = \Delta K = K_{(τελ)} - K_{(αρχ)} \Rightarrow W_w = 0 - \frac{1}{2}mυ_2'^2 \Rightarrow -mgh = -\frac{1}{2}mυ_2'^2$$

$$\Rightarrow mg\ell(1-συνφ) = \frac{1}{2}mυ_2'^2 \Rightarrow 2g\ell(1-συνφ) = υ_2'^2 \Rightarrow υ_2' = \sqrt{2g\ell(1-συν60^0)} \Rightarrow$$

$$υ_2' = \sqrt{2\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 0,9m\left(1-\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow υ_2' = 3m/s.$$



β. Για την κίνηση του σώματος μάζας Μ μετά την κρούση μέχρι να σταματήσει εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου – ενέργειας.

$$W_T = \Delta K = K_{(\tau\varepsilon\lambda)} - K_{(\alpha\rho\chi)} \Rightarrow W_T = 0 - \frac{1}{2}M\upsilon_1'^{\,2} \Rightarrow -T\cdot d = -\frac{1}{2}M\upsilon_1'^{\,2}$$

$$\Rightarrow -\mu\cdot N\cdot d = -\frac{1}{2}M\upsilon_1'^{\,2} \Rightarrow -\mu Mgd = -\frac{1}{2}M\upsilon_1'^{\,2} \Rightarrow \mu Mgd = \frac{1}{2}M\upsilon_1'^{\,2}$$

$$\Rightarrow 2\mu gd = \upsilon_1'^{\,2} \Rightarrow \upsilon_1' = \sqrt{2\mu gd} \Rightarrow \upsilon_1' = \sqrt{2\cdot 0,2\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 4m} \Rightarrow \upsilon_1' = 4m/s.$$

γ. Από τη διατήρηση της ορμής κατά την κρούση προκύπτει:

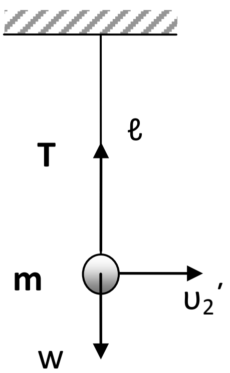
$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow M\upsilon_1 = M\upsilon_1' + m\upsilon_2' \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{M\upsilon_1' + m\upsilon_2'}{M} = \frac{4kg\cdot 4m/s + 3kg\cdot 3m/s}{4kg} \Rightarrow$$

$$\upsilon_1 = 6,25\ m/s.$$

δ. Η συνισταμένη της τάσης του νήματος και του βάρους της σφαίρας θα είναι η κεντρομόλος δύναμη. Άρα

$$F_\kappa = T - w \Rightarrow T - m\cdot g = \frac{m\cdot \upsilon_2'^{\,2}}{\ell} \Rightarrow T = m\cdot g + \frac{m\cdot \upsilon_2'^{\,2}}{\ell} \Rightarrow$$

$$T = 3kg\cdot 10m/s^2 + \frac{3kg\cdot (3m/s)^2}{0,9m} \Rightarrow T = 60N.$$



Άσκηση 7.

Ένα βλήμα μάζας m=500 g κινούμενο οριζόντια με ταχύτητα $υ_1$ σφηνώνεται σε σώμα μάζας M=9,5kg, που ηρεμεί σε οριζόντιο δάπεδο, δεμένο στην άκρη οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k=80N/m, που βρίσκεται στο φυσικό του μήκος, ενώ το άλλο άκρο του είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου είναι x=0,5m. Η συνολική θερμότητα που απελευθερώνεται από την έναρξη της κρούσης μέχρι να σταματήσει το συσσωμάτωμα για πρώτη φορά είναι 390 J.

Να υπολογίσετε:

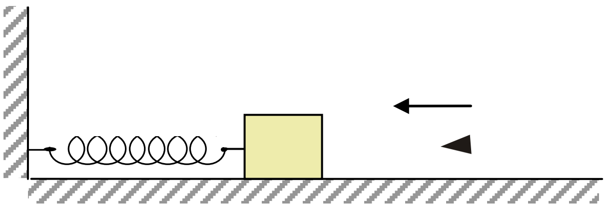
α. την ταχύτητα $υ_1$ του σώματος m.

β. την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την πλαστική κρούση.

γ. την τριβή ολίσθησης που ασκείται στο σώμα.

δ. το μέγιστο μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος από τη στιγμή που ξεκινά την κίνησή του μέχρι να επανέλθει το ελατήριο στο φυσικό του μήκος.

Δίνεται: g=10 m/s^2.



Λύση

α. Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας όλη η κινητική ενέργεια που είχε το βλήμα πριν την κρούση θα μετατραπεί μέχρι να σταματήσει το συσσωμάτωμα για πρώτη φορά σε δυναμική ενέργεια του ελατηρίου και σε θερμότητα λόγω της κρούσης και λόγω των τριβών στην κίνηση του συσσωματώματος. Αυτή η συνολική θερμότητα που απελευθερώνεται από την έναρξη της κρούσης είναι 390 J. Άρα

$$K_{αρχ} = U_{ελ} + Q \Rightarrow \frac{1}{2}mυ_1^2 = \frac{1}{2}kx^2 + Q \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 0,5kg\cdot υ_1^2 = \frac{1}{2}80\frac{N}{m}\cdot(0,5m)^2 + 390J \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\cdot 0,5kg\cdot υ_1^2 = 400J \Rightarrow υ_1^2 = 400\cdot 4J/kg \Rightarrow υ_1 = 40\,m/s.$$

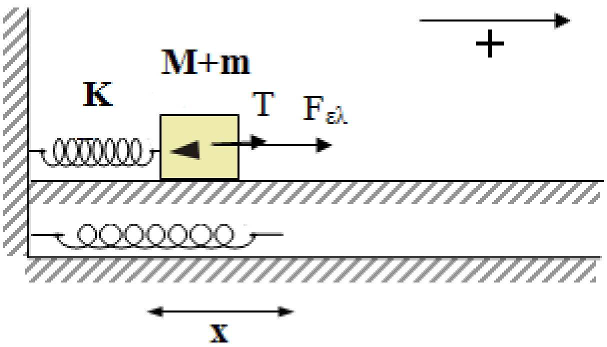
β. Από τη διατήρηση της ορμής κατά την κρούση προκύπτει για το συσσωμάτωμα, που κινείται με ταχύτητα V μετά την κρούση:

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow m \cdot \upsilon_1 = (M+m) \cdot V \Rightarrow V = \frac{m \cdot \upsilon_1}{M+m} = \frac{0{,}5\text{kg} \cdot 40\text{m/s}}{9{,}5\text{kg} + 0{,}5\text{kg}} \Rightarrow V = 2\,\text{m/s}.$$

γ. Με χρήση της αρχής διατήρησης της ενέργειας από τη στιγμή μετά την κρούση μέχρι να σταματήσει το συσσωμάτωμα για πρώτη φορά έχουμε

$$\frac{1}{2}(M+m)V^2 = \frac{1}{2}kx^2 + Q_T \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 10\text{kg} \cdot (2\text{m/s})^2 = \frac{1}{2}80\text{N/m} \cdot (0{,}5\text{m})^2 + |W_T| \Rightarrow$$
$$20\text{J} = 10\text{J} + |T \cdot 0{,}5\text{m}| \Rightarrow T = 20\,\text{N}.$$

δ. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος ισούται με τη συνισταμένη δύναμη που δέχεται το συσσωμάτωμα. Στο συσσωμάτωμα ασκούνται δύο δυνάμεις, η τριβή και η Fελ . Το μέτρο της συνισταμένης παίρνει τη μέγιστη τιμή του ελάχιστα πριν το συσσωμάτωμα σταματήσει στην ακραία θέση, όπου οι δύο δυνάμεις έχουν την ίδια κατεύθυνση και η τιμή της Fελ έχει μέγιστο μέτρο. Παίρνοντας τα θετικά προς τα δεξιά έχουμε:



$$\left|\frac{dp}{dt}\right| = |\Sigma F| = |F_{\varepsilon\lambda}| + T = |kx| + T \Rightarrow \frac{dp}{dt} = 80\frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0{,}5\text{m} + 20\text{N} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = 60\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Άσκηση 8.

Ένα σώμα $Σ_1$, μάζας m=2kg, κινούμενο πάνω σε πλάγιο επίπεδο γωνίας κλίσης θ, προσπίπτει με ταχύτητα $υ_1$ = 6m/s σε ακίνητο σώμα $Σ_2$, μάζας M=4kg, με το οποίο συγκρούεται ελαστικά. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ των σωμάτων και του πλάγιου δαπέδου είναι μ= 0,25.

Να υπολογίσετε:

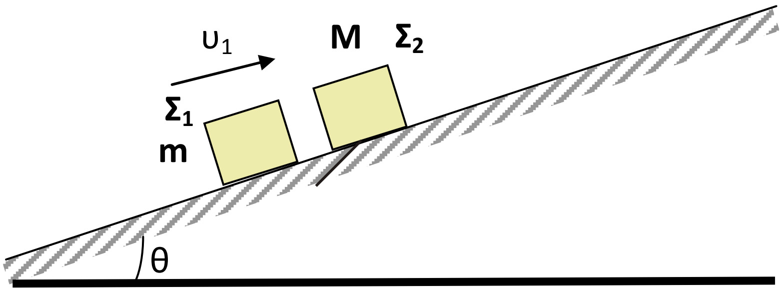
α. τις ταχύτητες $υ_1'$ και $υ_2'$ των σωμάτων $Σ_1$ και $Σ_2$ αμέσως μετά την κρούση.

β. την απόσταση d_2 που διανύει το σώμα $Σ_2$ μέχρι να σταματήσει.

δ. το χρονικό διάστημα που κινήθηκε το σώμα $Σ_2$ μέχρι να σταματήσει στιγμιαία.

δ. τη θερμότητα που αναπτύχθηκε μεταξύ του σώματος $Σ_1$ και του δαπέδου από τη στιγμή της κρούσης μέχρι τη στιγμή που σταματά στιγμιαία το σώμα $Σ_2$.

Δίνονται: ημθ= 0,6, συνθ= 0,8, g=10 m/s^2.



<u>Λύση</u>

α. Η κρούση είναι κεντρική ελαστική. Τα σώματα μετά την κρούση θα κινηθούν στην ίδια διεύθυνση με ταχύτητες που δίνονται από τις σχέσεις:

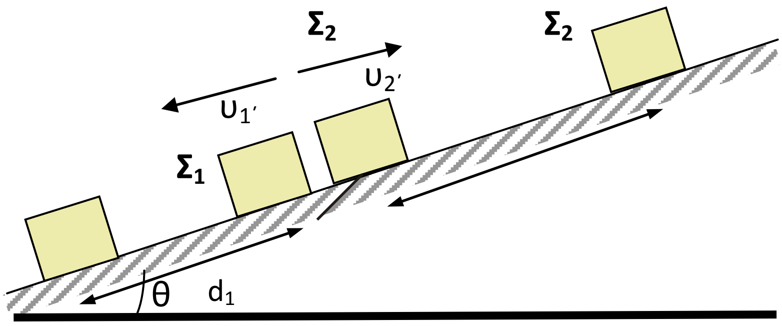
$$υ'_1 = \frac{m-M}{m+M}υ_1 \quad \textbf{(1)}$$

$$υ'_2 = \frac{2m}{m+M}υ_1 \quad \textbf{(2)}$$

Από τη σχέση **(1)** έχουμε

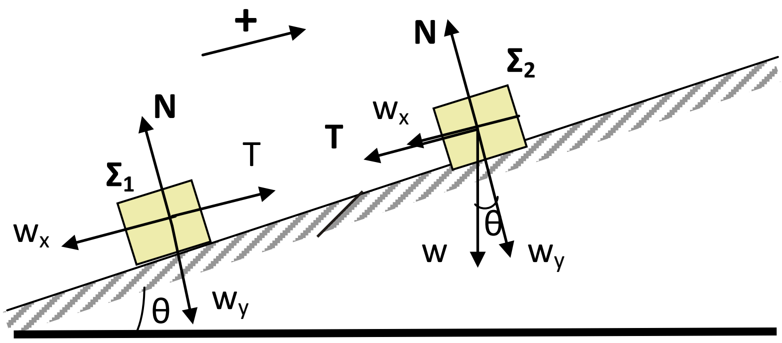
$$υ'_1 = \frac{m-M}{m+M}υ_1 = \frac{2kg-4kg}{2kg+4kg}\cdot 6m/s \Rightarrow υ'_1 = \ -2m/s.$$

$$\upsilon'_2 = \frac{2m}{m+M}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon'_2 = \frac{2\cdot 2kg}{2kg+4kg}6m/s \Rightarrow \upsilon'_2 = 4m/s.$$



β. Για την κίνηση του σώματος $Σ_2$ μετά την κρούση μέχρι να σταματήσει εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου – ενέργειας

$$W_w + W_T = K_{(τελ)} - K_{(αρχ)} \quad \textbf{(1)}$$



Η τριβή δίνεται από τη σχέση T=μ·N και N=w_y. Άρα η σχέση **(1)** γίνεται

$$-w_x\cdot d_2 - T\cdot d_2 = -\frac{1}{2}M\upsilon_2'^{\,2} \Rightarrow -Mg\cdot ημφ\cdot d_2 - μ\cdot Mg\cdot συνφ\cdot d_2 = -\frac{1}{2}M\upsilon_2'^{\,2}$$

$$\Rightarrow -g\cdot ημφ\cdot d_2 - μ\cdot g\cdot συνφ\cdot d_2 = -\frac{1}{2}\upsilon_2'^{\,2} \Rightarrow d_2 = \frac{\upsilon_2'^{\,2}}{2g(ημφ+μ\cdot συνφ)} \Rightarrow$$

$$d_2 = \frac{(4m/s)^2}{2\cdot 10\frac{m}{s^2}(0,6+0,25\cdot 0,8)} \Rightarrow d_2 = 1m$$

γ. Θα βρούμε σε πόσο χρόνο θα σταματήσει το σώμα $Σ_2$. Πρώτα ας βρούμε την επιτάχυνσή του. Παίρνοντας ως θετική φορά αυτήν της αρχικής ταχύτητας του σώματος $Σ_1$ έχουμε:

$$\Sigma F_X = M\cdot\alpha_2 \Rightarrow -w_X - T = M\cdot\alpha_2 \Rightarrow -M\cdot g\cdot \eta\mu\varphi - \mu\cdot N = M\cdot\alpha_2 \Rightarrow$$
$$-M\cdot g\cdot\eta\mu\varphi - \mu\cdot M\cdot g\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi = M\cdot\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = -g(\eta\mu\varphi + \mu\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi) \Rightarrow$$
$$\alpha_2 = -10\frac{m}{s^2}(0,6+0,25\cdot 0,8) \Rightarrow \alpha_2 = -8\,m/s^2.$$

Ο χρόνος κίνησης θα προκύψει από τη σχέση

$$\upsilon = \upsilon_2{}' + \alpha_2\cdot t \Rightarrow 0 = 4 - 8\cdot t \Rightarrow t = 0,5\,s.$$

δ. Η θερμότητα που αναπτύχθηκε μεταξύ του σώματος Σ_1 και του δαπέδου από τη στιγμή της κρούσης μέχρι τη στιγμή που το σώμα Σ_2 σταματά είναι $Q = |W_T| = |\mu\cdot m\cdot g\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot d_1|$, όπου το d_1 δηλώνει τη μετατόπιση του σώματος Σ_1 στο χρονικό διάστημα των 0,5s.

Η επιτάχυνση του σώματος Σ_1 είναι:

$$\Sigma F_X = m\cdot\alpha_1 \Rightarrow -w_X + T = m\cdot\alpha_1 \Rightarrow -m\cdot g\cdot\eta\mu\varphi + \mu\cdot N = m\cdot\alpha_1 \Rightarrow$$
$$-m\cdot g\cdot\eta\mu\varphi + \mu\cdot m\cdot g\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi = m\cdot\alpha_1 \Rightarrow -g\cdot\eta\mu\varphi + \mu\cdot g\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi = \alpha_1 \Rightarrow$$
$$\alpha_1 = g(-\eta\mu\varphi + \mu\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi) = 10\frac{m}{s^2}(-0,6+0,25\cdot 0,8) \Rightarrow \alpha_1 = -4m/s^2.$$

Στο χρονικό διάστημα των 0,5s το Σ_1 θα μετατοπισθεί κατά d_1, που είναι ίσο με:

$$d_1 = \upsilon_1{}'t + \frac{1}{2}\alpha_1\cdot t^2 = -(2m/s)\cdot 0,5s + \frac{1}{2}(-4\frac{m}{s^2})\cdot(0,5s)^2 \Rightarrow d_1 = -1,5\,m.$$

Με αντικατάσταση στην παραπάνω σχέση της θερμότητας παίρνουμε:

$$Q = |W_T| = |-\mu\cdot m\cdot g\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot d_1| = 0,25\cdot 2kg\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 0,8\cdot 1,5m \Rightarrow Q = 6J.$$

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Ένα σώμα μάζας m_1 κινούμενο σε οριζόντιο επίπεδο συγκρούεται με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = 10\frac{m}{s}$ κεντρικά και ελαστικά με σώμα μάζας $m_2 = 3Kg$ που κινείται με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_2 = 15\frac{m}{s}$ σε αντίθετη κατεύθυνση από το m_1. Η χρονική διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα. Αμέσως μετά την κρούση το σώμα μάζας m_1 κινείται με αντίθετη φορά από την αρχική του και με ταχύτητα μέτρου $\upsilon'_1 = 5\frac{m}{s}$.

α) Να προσδιορίσετε τη μάζα m_1.

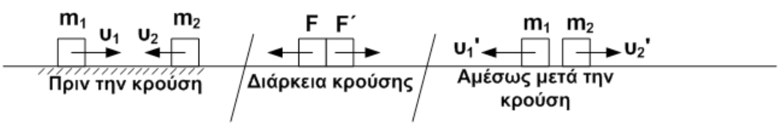
β) Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μάζας m_2 αμέσως μετά την κρούση.

γ) Να βρεθεί το $\%$ ποσοστό της μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος μάζας m_1 σε σχέση με την αρχική κινητική του ενέργεια, λόγω της κρούσης.

δ) Να υπολογισθεί πόσο θα απέχουν τα σώματα όταν σταματήσουν. Δίνεται ότι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του επιπέδου και κάθε σώματος είναι $\mu = 0,5$.

Δίνεται $g = 10\frac{m}{s^2}$.

<u>Λύση</u>



α) Έχουμε κεντρική ελαστική κρούση δύο σωμάτων που είναι και τα δύο σε κίνηση. Εφαρμόζουμε τους αντίστοιχους τύπους του σχολικού βιβλίου.

$$\upsilon'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 \quad (1)$$

$$\upsilon'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2 \quad (2)$$

Οι παραπάνω σχέσεις είναι αλγεβρικές, λαμβάνονται δηλαδή υπόψη τα πρόσημα των ταχυτήτων. Στην περίπτωσή μας έχουμε ορίσει θετική φορά προς τα δεξιά, δηλαδή τη φορά της ταχύτητας υ_1.

Με αριθμητική αντικατάσταση στην σχέση (1) παίρνουμε:

$$\upsilon' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 \Rightarrow -5 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}10 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}(-15) \quad (\mathrm{SI}) \Rightarrow$$

$$-5(m_1 + m_2) = 10m_1 - 40m_2 \Rightarrow$$

$$3m_1 = 7m_2 \Rightarrow m_1 = 7\mathrm{Kg}$$

β) Με αριθμητική αντικατάσταση στην σχέση (2) παίρνουμε:

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2 \cdot 7}{10}10 + \frac{3-7}{10}(-15) \quad (\mathrm{SI}) \Rightarrow \upsilon_2' = 20\frac{m}{s}$$

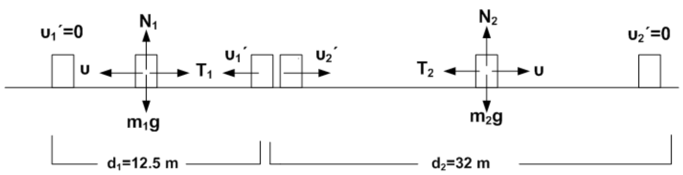
γ) $$a\,\% = \frac{\Delta K_1}{K_{1(\alpha\rho\chi)}}\% = \frac{K_{1(\tau\varepsilon\lambda)} - K_{1(\alpha\rho\chi)}}{K_{1(\alpha\rho\chi)}}\% = (\frac{K_{1(\tau\varepsilon\lambda)}}{K_{1(\alpha\rho\chi)}} - 1)\% \Rightarrow a\,\% = (\frac{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2} - 1)\% \Rightarrow$$

$$a\,\% = (\frac{\upsilon_1'^2}{\upsilon_1^2} - 1)\% = (\frac{(5m/s)^2}{(10m/s)^2} - 1)\% \quad \Rightarrow \quad a\,\% = -75\%$$

Το (-) δηλώνει ότι η ενέργειά του μειώθηκε.

δ) Για τη δύναμη της τριβής που αναπτύσσεται στα δύο σώματα ισχύει:

$T_1 = \mu N_1 = \mu m_1 g$ και $T_2 = \mu N_2 = \mu m_2 g$.



Παρατηρούμε ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης η κινητική ενέργεια του σώματος ελαττώνεται μόνο λόγω του έργου της τριβής. Μέσω του έργου της τριβής αφαιρείται κινητική ενέργεια από τα σώματα και μετατρέπεται σε θερμική, μέχρις ότου όλη η κινητική ενέργεια γίνει θερμική και τα σώματα σταματήσουν.

Συνεπώς από την αρχή διατήρησης της ενέργειας, έχουμε:

Για το σώμα μάζας m_1 το έργο της τριβής θα είναι ίσο με την κινητική ενέργεια:

$$T_1 \cdot d_1 = \frac{m_1 \upsilon_1'^2}{2} \Rightarrow \mu m_1 g d_1 = \frac{m_1 \upsilon_1'^2}{2} \Rightarrow d_1 = \frac{\upsilon_1'^2}{2\mu g} = \frac{(5m/s)^2}{2 \cdot 0,5 \cdot 10m/s^2} \Rightarrow d_1 = 2,5m$$

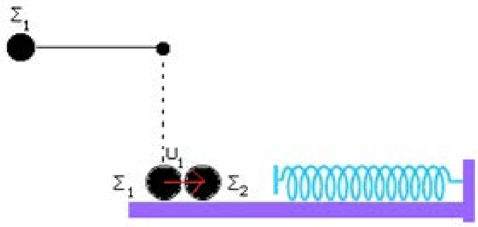
Ομοίως για το σώμα μάζας m_2 το έργο της τριβής θα είναι ίσο με την κινητική ενέργεια:

$$T_2 d_2 = \frac{m_2 \upsilon_2'^2}{2} \Rightarrow \mu m_2 g d_2 = \frac{m_1 \upsilon_2'^2}{2} \Rightarrow d_2 = \frac{\upsilon_2'^2}{2\mu g} = \frac{(20m/s)^2}{2 \cdot 0,5 \cdot 10m/s^2} \Rightarrow d_2 = 40m$$

Άρα η μεταξύ τους απόσταση είναι:

$$d = d_1 + d_2 = 2,5m + 40m \Rightarrow d = 42,5m$$

Πρόβλημα 2.



Ένα σώμα Σ_1 με μάζα $m_1 = 1Kg$ είναι δεμένο με αβαρές και μη εκτατό νήμα μήκους $L = 1{,}8m$, του οποίου η άλλη άκρη είναι ακλόνητα στερεωμένη, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αρχικά το νήμα είναι οριζόντιο. Αφήνουμε ελεύθερο το σώμα Σ_1 να κινηθεί. Το σώμα Σ_1 μόλις το νήμα γίνει κατακόρυφο, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = m_1$, που είναι ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το σώμα Σ_2 μετά την κρούση συναντά και συγκρούεται με το ελεύθερο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100\,N/m$, του οποίου η άλλη άκρη είναι ακλόνητα στερεωμένη, όπως στο σχήμα. Το σώμα Σ_2 συμπιέζει το ελατήριο και στη συνέχεια συναντά εκ νέου το σώμα Σ_1 και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά για δεύτερη φορά με αυτό. Να θεωρηθούν οι τριβές και η αντίσταση του αέρα αμελητέες.

α) Να βρείτε το μέτρο της τάσης του νήματος ελάχιστα πριν τη σύγκρουση του σώματος Σ_1 με το σώμα Σ_2.

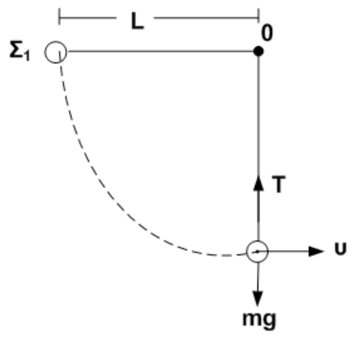
β) Να βρείτε τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αμέσως μετά την κρούση.

γ) Να βρείτε τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου.

δ) Να βρείτε το μέγιστο ύψος που θα φτάσει το σώμα Σ_1 που είναι δεμένο με το νήμα μετά τη δεύτερή του κρούση με το σώμα Σ_2.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας: $g = 10\dfrac{m}{s^2}$.

Λύση



α) Στην κατώτερη θέση η συνισταμένη του βάρους και της τάσης του νήματος θα ισούται με την κεντρομόλο δύναμη, η οποία θα έχει φορά προς τα πάνω και μέτρο που βρίσκεται από τη σχέση:

$$\Sigma F = \frac{m\upsilon^2}{L} \Rightarrow T - mg = \frac{m\upsilon^2}{L} \Rightarrow T = m(g + \frac{\upsilon^2}{L}) \quad (1)$$

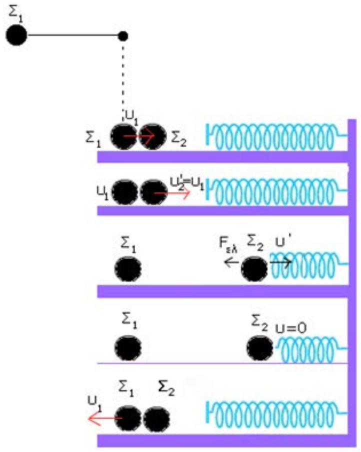
Το σώμα Σ_1 διαγράφει το τεταρτοκύκλιο. Η τάση του νήματος που ασκείται σε αυτό δεν παράγει έργο. Έργο παράγει μόνο το βάρος του, που είναι συντηρητική δύναμη. Τριβές ή αντιστάσεις δεν υπάρχουν. Έτσι εφαρμόζοντας τη διατήρηση της Μηχανικής ενέργειας, για τις δύο θέσεις, οριζόντια και κατακόρυφη, μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα υ του Σ_1 ελάχιστα πριν την κρούση. Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας του σώματος λόγω του βαρυτικού πεδίου, εκείνο στο οποίο βρίσκεται το σώμα βρίσκεται στην κατώτατη θέση.

$$E_{\mu\eta\chi,\alpha\rho\chi} = E_{\mu\eta\chi,\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \frac{m\upsilon^2}{2} = mgL \Rightarrow \upsilon = \sqrt{2gL} = \sqrt{2 \cdot 10 m/s^2 \cdot 1{,}8m} \Rightarrow \upsilon = 6\frac{m}{s}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$T = 1kg \cdot (10\frac{m}{s^2} + \frac{(6m/s)^2}{1{,}8m}) \Rightarrow T = 30N$$

β) Τα δύο σώματα έχουν ίσες μάζες και η κρούση είναι ελαστική κεντρική, άρα τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες. Έτσι το σώμα Σ_1 μένει ακίνητο και το Σ_2 κινείται με την ταχύτητα του Σ_1, δηλαδή με ταχύτητα μέτρου $\upsilon = 6\frac{m}{s}$.



γ) Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα $Σ_2$-k είναι συντηρητικές.

Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ της θέσης που το $Σ_2$ συναντά το ελατήριο στο φυσικό του μήκος και της θέσης της μέγιστης συσπείρωσης του ελατηρίου. Με A δηλώνουμε τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου.

$$\frac{m_2 \upsilon_2^{\,2}}{2} = \frac{kA^2}{2} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{m_2}{k}}\,\upsilon = \sqrt{\frac{1\text{kg}}{100\text{N/m}}}\cdot(6\frac{\text{m}}{\text{s}}) \Rightarrow A = 0,6\text{m}$$

δ) Το σώμα Σ_2 εγκαταλείπει το ελατήριο με ταχύτητα μέτρου υ_1 και συναντά το σώμα Σ_1 ακίνητο στη θέση όπου το νήμα είναι κατακόρυφο. Στην κρούση που ακολουθεί τα σώματα θα ανταλλάξουν ταχύτητες, άρα η ταχύτητα που θα αποκτήσει το σώμα Σ_1 θα έχει μέτρο ίσο με αυτό που είχε πριν συγκρουστεί για πρώτη φορά. Συνεπώς, επειδή η μηχανική ενέργεια διατηρείται, θα φτάσει ξανά στην αρχική θέση από όπου αφέθηκε ελεύθερο, δηλαδή στη θέση όπου το νήμα θα είναι οριζόντιο.

Ημερομηνία τροποποίησης: 10/11/2015