Ερώτηση 2.

Κατά μήκος του θετικού ημιάξονα Οx διαδίδεται αρμονικό κύμα. Το σημείο της θέσης $x=0$ τη χρονική στιγμή $t=0$ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα. Τη χρονική στιγμή $t=\frac{5T}{4}$ το σημείο της θέσης $x=\frac{\lambda}{2}$ έχει ταχύτητα με μέτρο

1) $\upsilon=0$.

2) $\upsilon=\upsilon_{max}$ (μέγιστη).

3) $0<\upsilon<\upsilon_{max}$.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση η 1.

Το κύμα για να φτάσει στη θέση $x=\frac{\lambda}{2}$ χρειάζεται χρόνο ίσο με $\frac{T}{2}$.

Άρα το υλικό σημείο αυτό αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $\frac{T}{2}$, με θετική ταχύτητα. Συνεπώς, τη χρονική στιγμή $t'=\frac{5T}{4}$ έχει ταλαντωθεί για χρονικό διάστημα ίσο με $\Delta t=\left(\frac{5T}{4}\right)-\left(\frac{T}{2}\right)=\frac{3T}{4}$.

Άρα το υλικό σημείο αυτό θα βρίσκεται σε αρνητική απομάκρυνση με μέγιστο μέτρο $(y=-A)$ και η ταχύτητά του θα είναι μηδέν.

<u>Β Τρόπος:</u>

Με αντικατάσταση των δεδομένων: $x=\frac{\lambda}{2}$ και $t=\frac{5T}{4}$ στη γενική εξίσωση του κύματος $y=A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$ παίρνουμε:

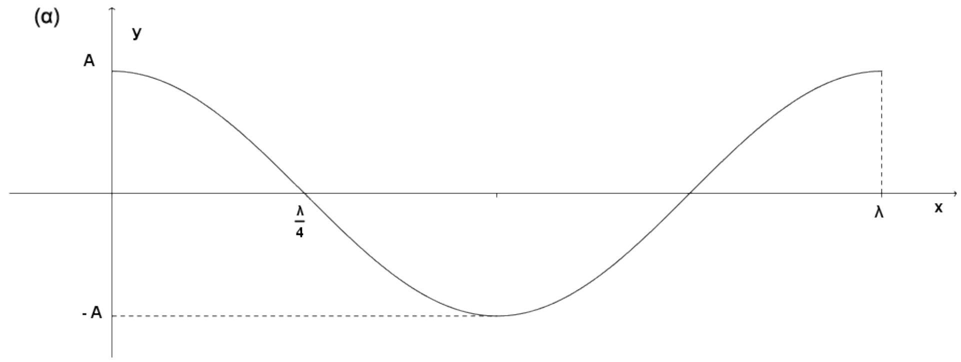
$$y=A\eta\mu 2\pi\left(\frac{5T}{4T}-\frac{\lambda}{2\lambda}\right)\Rightarrow y=A\eta\mu 2\pi\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow y=A\eta\mu 2\pi\left(\frac{3}{4}\right)\Rightarrow y=A\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right)\Rightarrow$$

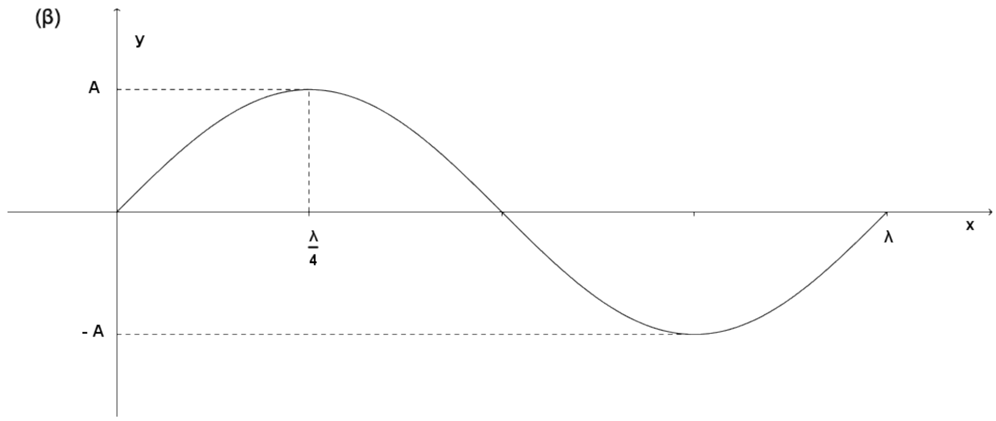
$$y=-A$$

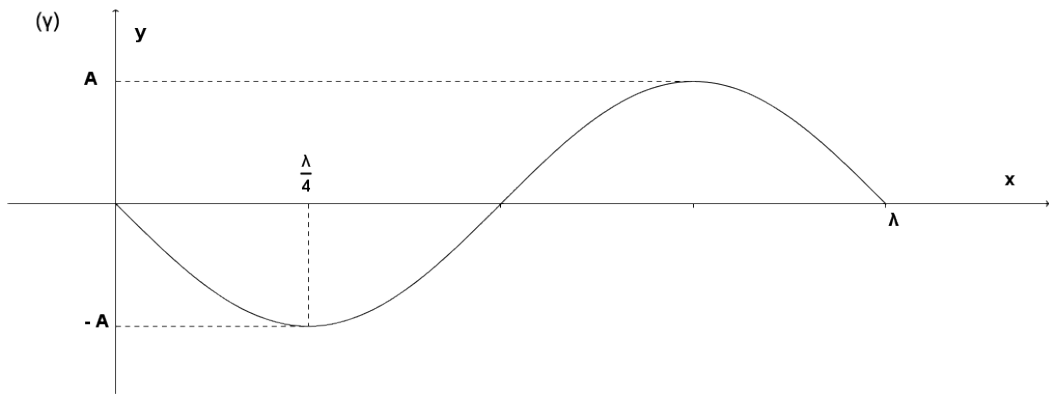
Άρα, αφού το υλικό σημείο βρίσκεται σε ακραία θέση θα έχει ταχύτητα μηδέν.

Ερώτηση 8.

Μια πηγή κυμάτων O αρχίζει την χρονική στιγμή $t = 0$, να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, πλάτους A, περιόδου T και αρχικής φάσης $\varphi_0 = 0$. Το στιγμιότυπο του κύματος, τη χρονική στιγμή $t = T$, είναι όπως το διάγραμμα







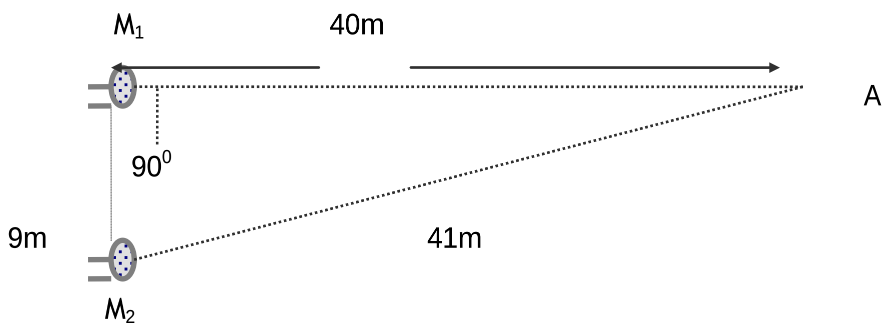
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Ερώτηση 9.

Δύο μεγάφωνα M_1 και M_2 τροφοδοτούνται από την ίδια γεννήτρια συχνοτήτων και τοποθετούνται όπως στο σχήμα. Ένας ανιχνευτής ήχου τοποθετείται στο σημείο Α.



Καθώς η συχνότητα της γεννήτριας αυξάνεται σιγά - σιγά από $200\text{Hz}-1000\text{Hz}$ διαπιστώνεται ότι ο ανιχνευτής Α καταγράφει σειρά ενισχύσεων και αποσβέσεων. Οι αποστάσεις του ανιχνευτή από τις πηγές είναι $(M_1A)=40\text{m}$ και $(M_2A)=41\text{m}$, ενώ η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι $340\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Η συχνότητα για την οποία παρατηρείται η πρώτη απόσβεση είναι

α) 200Hz.

β) 510Hz.

γ) 850Hz.

Να επιλέξτε τη σωστή απάντηση. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η β.

Για να συμβαίνει απόσβεση πρέπει για τα κύματα που φτάνουν από τα δύο μεγάφωνα στον ανιχνευτή να ισχύει η σχέση : $r_1-r_2=\frac{(2K+1)\lambda}{2}$. Αντικαθιστώντας, $\lambda=\frac{\upsilon}{f}$, $r_1=41\text{m}$, $r_2=40\text{m}$ και $\upsilon=340\frac{\text{m}}{\text{s}}$ παίρνουμε:

$$41\text{m}-40\text{m}=(2K+1)\frac{\upsilon}{2f}\Rightarrow 1\text{m}=(2K+1)\frac{340\,\text{m/s}}{2f}\Rightarrow f=(2K+1)\cdot 170\,\text{Hz}$$

Για $K=0$ βρίσκουμε $f=170\text{Hz}$ η οποία απορρίπτεται γιατί είναι μικρότερη από 200Hz. Για $K=1$ βρίσκουμε $f=510\text{Hz}$ που είναι η ζητούμενη, ενώ για $K=2$ βρίσκουμε $f=850\text{Hz}$ κλπ.

Ερώτηση 11.

Κατά μήκος χορδής μήκους L, που η μια της άκρη είναι ακλόνητα στερεωμένη, έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, με το ελεύθερο άκρο της να είναι κοιλία.

Α. Το μήκος της χορδής μπορεί να είναι

α) $L = \frac{\kappa\lambda}{2}$.

β) $L = \frac{\kappa\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$.

γ) $L = \kappa\lambda$.

Β. Αν Α είναι το πλάτος των αρμονικών κυμάτων που συμβάλλουν και παράγεται το στάσιμο κύμα, τότε η σχέση που δίνει τη μέγιστη ταχύτητα με την οποία ταλαντώνονται οι κοιλίες, είναι:

α) $\upsilon_{max} = \omega A$.

β) $\upsilon_{max} = 2\omega A$.

γ) $\upsilon_{max} = 2\omega A \sigma\upsilon\nu\omega t$.

Να επιλέξετε τις σωστές απαντήσεις. Να δικαιολογήσετε τις επιλογές σας.

<u>Λύση</u>

Α. Σωστή απάντηση είναι η β.

Το ένα άκρο της χορδής είναι ακλόνητο, οπότε εκεί θα υπάρχει δεσμός. Στο άλλο άκρο, σύμφωνα με την εκφώνηση, δημιουργείται κοιλία. Η απόσταση μεταξύ μιας κοιλίας και ενός δεσμού είναι $\frac{\lambda}{4}$, άρα το μήκος της χορδής θα πρέπει να είναι περιττό πολλαπλάσιο του $\frac{\lambda}{4}$. Διαιρώντας το μήκος χορδής με το $\frac{\lambda}{4}$ βρίσκουμε περιττό αριθμό μόνο στο β.

$$L = \frac{K\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = \frac{(2K+1)\lambda}{4}$$

Β. Σωστή η απάντηση είναι η β.

Ερώτηση 16.

Στην επιφάνεια υγρού διαδίδονται δύο αρμονικά εγκάρσια κύματα ίδιου πλάτους Α και ίδιας συχνότητας , που παράγονται από δύο σύγχρονες πηγές $Π_1, Π_2$ με εξισώσεις ταλάντωσης $y_1 = y_2 = Aημωt$. Σε ένα σημείο Μ της επιφάνειας του υγρού πρώτα φτάνει το κύμα από την πηγή $Π_1$ και μετά από χρονικό διάστημα 3Τ/4 φτάνει το κύμα από την πηγή $Π_2$. Λόγω της συμβολής των δύο κυμάτων το σημείο Μ ταλαντώνεται με πλάτος

α) $A\sqrt{2}$

β) $\dfrac{A\sqrt{2}}{2}$

γ) $2A$

Δίνεται: $συν\dfrac{3π}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Το πλάτος ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση: $|A'| = \left|2Aσυν2π\dfrac{r_2 - r_1}{2λ}\right|$ **(1)**

Για τις αποστάσεις του σημείου Μ από τις πηγές ισχύει:

$r_1 = υt_1$ και $r_2 = ut_2$

$$r_2 - r_1 = υ\left(t_1 + \frac{3T}{4}\right) - υt_1 \Rightarrow r_2 - r_1 = υ\frac{3T}{4} \Rightarrow r_2 - r_1 = \frac{3λ}{4}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση **(1)** παίρνουμε:

$$|A'| = \left|2Aσυν2π\frac{\frac{3λ}{4}}{2λ}\right| = \left|2Aσυν\frac{3π}{4}\right| = A\sqrt{2}$$

Ερώτηση 21.

Σε μια χορδή μήκους L δημιουργείται στάσιμο κύμα, με δεσμούς στα δύο άκρα της και άλλους δύο ενδιάμεσα. Αν f είναι η συχνότητα ταλάντωσης της χορδής, τότε η ταχύτητα διάδοσης του κύματος στη χορδή είναι

α) $\upsilon = \dfrac{2Lf}{3}$

β) $\upsilon = \dfrac{Lf}{3}$

γ) $\upsilon = \dfrac{3Lf}{2}$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή πρόταση είναι η (α).

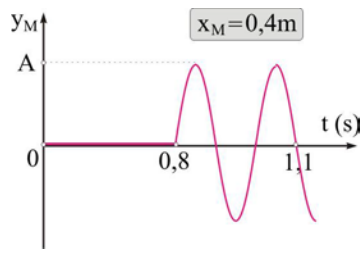
Στα δύο άκρα της χορδής δημιουργούνται δεσμοί, έτσι το μήκος της χορδής και το μήκος κύματος συνδέονται με τη σχέση: $L = 3\dfrac{\lambda}{2} \;\Rightarrow\; \lambda = \dfrac{2L}{3}$

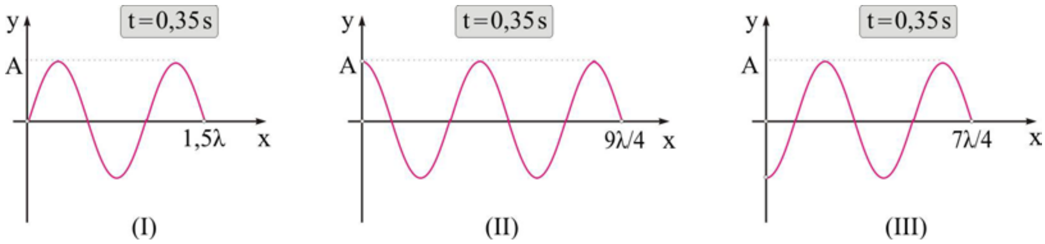
Με αντικατάσταση στη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής παίρνουμε:

$$\upsilon = \lambda f = \frac{2L}{3} f \Rightarrow \upsilon = \frac{2L}{3} f$$

Ερώτηση 26.

Ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται χωρίς απώλειες κατά μήκος του άξονα x'Ox. Το σημείο της θέσης $x=0$, ταλαντώνεται σύμφωνα με τη σχέση $y=A\eta\mu\omega t$. Στο διάγραμμα φαίνεται για ένα σημείο Μ του ελαστικού μέσου που απέχει $x_M = 40cm$ από την πηγή η απομάκρυνση σε συνάρτηση με το χρόνο. Το διάγραμμα της απομάκρυνσης όλων των σημείων του ελαστικού μέσου (στιγμιότυπο του κύματος) τη χρονική στιγμή $t=0,35s$ είναι το





α. (I)

β. (II)

γ. (III)

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση η (γ).

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι το χρονικό διάστημα 0,8s έως 1,1s αντιστοιχεί σε $3T/2$. Οπότε έχουμε ή $0,3s = 3T/2$ ή $T=0,2s$.

Η χρονική στιγμή $t=0,35s=0,20s+0,15s$ αντιστοιχεί σε χρονικό διάστημα $7T/4$. Παίρνοντας υπόψη ότι το κύμα σε χρονικό διάστημα μιας περιόδου προχωρά κατά ένα μήκος κύματος λ εύκολα προκύπτει ότι σε χρονικό διάστημα $7T/4$ προχωρά κατά $\Delta x = 7\lambda/4$.

Άρα σωστό είναι το διάγραμμα (III).

Ερώτηση 27.

Κατά μήκος γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα μήκους κύματος λ κατά τη διεύθυνση του άξονα x'Ox. Το σημείο της θέσης $x=0$, ταλαντώνεται σύμφωνα με τη σχέση $y=A\eta\mu\omega t$. Η φάση ενός σημείου Μ του μέσου σε σχέση με το χρόνο δίνεται από τη σχέση

$$\varphi_M = \pi t - 4\pi \quad \text{(SI)}$$

Όταν το σημείο Μ αποκτήσει για τρίτη φορά τη μέγιστη δυναμική του ενέργεια, η επιτάχυνση της πηγής (x=0) θα είναι

α. μηδέν

β. θετική

γ. αρνητική.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Η φάση του σημείου Μ γράφεται: $\varphi=\pi t-4\pi \Rightarrow \varphi=\mathbf{2}\pi\left(\frac{t}{2}-2\right)$

Από τη σύγκριση με τη γενική εξίσωση της φάσης προκύπτει:

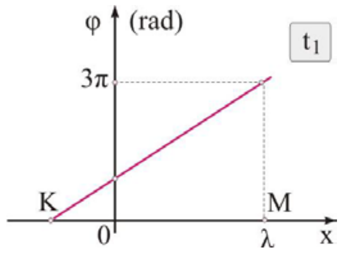
$T=2s$ και $2=\frac{x}{\lambda} \Rightarrow x=2\lambda$

Η πηγή και το σημείο Μ βρίσκονται σε συμφωνία φάσης, αφού απέχουν μεταξύ τους ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος και θα έχουν κάθε στιγμή ίδιες απομακρύνσεις. Όταν το Μ αποκτά τη μέγιστη δυναμική του ενέργεια για 3^{η} φορά, βρίσκεται σε απομάκρυνση +Α, επομένως και η πηγή βρίσκεται σε απομάκρυνση +Α .

Παίρνοντας υπόψη ότι, $\alpha=-\omega^2 y$, προκύπτει ότι το σημείο Μ έχει αρνητική επιτάχυνση.

Ερώτηση 29.

Κατά μήκος γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδεται προς την κατεύθυνση του αρνητικού ημιάξονα εγκάρσιο αρμονικό κύμα. Τη χρονική στιγμή t=0, το σημείο x=0 ξεκινά την ταλάντωσή του διερχόμενο από τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα. Το διάγραμμα φάσης-απόστασης τη χρονική στιγμή t_1 φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το σημείο Κ βρίσκεται στη θέση



α. $-\frac{\lambda}{2}$

β. $-\frac{3\lambda}{2}$

γ. -3λ

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Τη χρονική στιγμή t_1: $\varphi_K = 0$ και $\varphi_M = 3\pi$.

Επειδή το κύμα διαδίδεται προς τον αρνητικό ημιάξονα η φάση ενός σημείου δίνεται από τη σχέση $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)$.

Με αντικατάσταση των τιμών για το σημείο Μ τη χρονική στιγμή t_1 παίρνουμε:

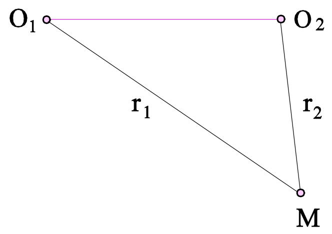
$$\varphi_M = 2\pi\left(\frac{t_1}{T}+\frac{x_M}{\lambda}\right) \Rightarrow 3\pi = 2\pi\left(\frac{t_1}{T}+\frac{\lambda}{\lambda}\right) \Rightarrow t_1 = \frac{T}{2}$$

Με αντικατάσταση των τιμών για το σημείο Κ τη χρονική στιγμή t_1 παίρνουμε:

$$\varphi_K = 0 \Rightarrow 0 = 2\pi\left(\frac{t_1}{T}+\frac{x_K}{\lambda}\right) \Rightarrow x_K = -\frac{\lambda}{2}$$

Ερώτηση 31.

Οι πηγές O_1 και O_2 του σχήματος βρίσκονται σε συμφωνία φάσης και δημιουργούν στην ήρεμη επιφάνεια υγρού αρμονικά κύματα ίδιου πλάτους A, που διαδίδονται με ταχύτητα μέτρου υ=6 cm/s παράγοντας φαινόμενα συμβολής. Το σημείο M απέχει r_1=31,5 cm και r_2=34,5cm από τις πηγές αντίστοιχα. Για να βρίσκεται το σημείο M σε υπερβολή απόσβεσης, θα πρέπει οι πηγές να εκπέμπουν τα κύματα με συχνότητες



α. f=1,3,5,7...... Hz

β. f=2,4,6,8...... Hz

γ. f=1,2,3,4,5... Hz

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση η (α).

Για τη διαφορά των αποστάσεων του M από τις δύο πηγές ισχύει : $|r_1 - r_2| = 3\text{cm}$

Για να έχουμε αποσβεστική συμβολή πρέπει:

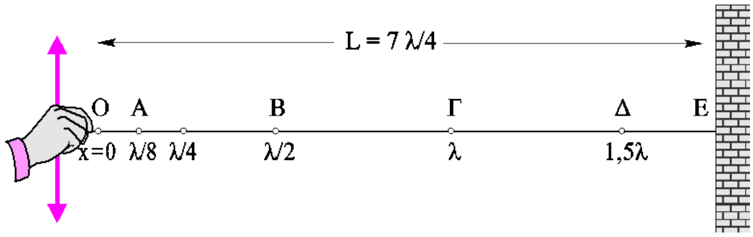
$$|r_1 - r_2| = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow |r_1 - r_2| = (2N+1)\frac{\upsilon}{2f} \Rightarrow f = \frac{(2N+1)\upsilon}{2|r_1 - r_2|} = \frac{(2N+1)\cdot 6\text{cm/s}}{2\cdot 3\text{cm}} \Rightarrow$$

$f = (2N+1)\,\text{Hz}$ με $N = 0,1,2,3...$

Άρα $f = 1,3,5,7\ldots\text{Hz}$

Ερώτηση 33.

Σε ένα οριζόντιο σχοινί που έχει το ένα άκρο του ελεύθερο και το άλλο στερεωμένο ακλόνητα, δημιουργούμε στάσιμο κύμα σχηματίζοντας στο ελεύθερο άκρο κοιλία. Το μήκος του σχοινιού είναι $L = 7\lambda/4$ όπου λ είναι το μήκος κύματος του στάσιμου. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ όλα τα σημεία του σχοινιού διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους.



Ο λόγος των πλατών των ταχυτήτων των σημείων Α και Γ είναι αντίστοιχα

α. $\dfrac{\upsilon_{max}^{A}}{\upsilon_{max}^{\Gamma}} = \sqrt{2}$

β. $\dfrac{\upsilon_{max}^{A}}{\upsilon_{max}^{\Gamma}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

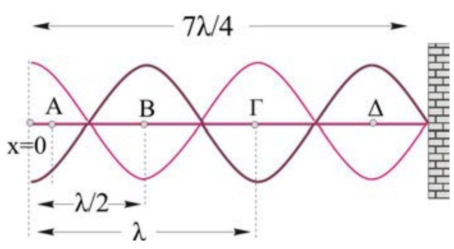
γ. $\dfrac{\upsilon_{max}^{A}}{\upsilon_{max}^{\Gamma}} = \sqrt{3}$

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η (β).

$$\frac{\upsilon_{max\,A}}{\upsilon_{max\,\Gamma}} = \frac{\omega \cdot A_A}{\omega \cdot A_\Gamma} \quad , \quad \textbf{(1)}$$



Το πλάτος ταλάντωσης του τυχαίου σημείου σε ένα στάσιμο δίνεται από τη σχέση $A = 2A\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi x}{2\lambda}$, όπου x η οριζόντια απόσταση από μια κοιλία, εδώ από το ελεύθερο άκρο.

Το σημείο Α απέχει οριζόντια λ/8 από το σημείο x=0 και έχει πλάτος

$$A_A = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi\lambda}{8\lambda} = A\sqrt{2}\ .$$

Το σημείο Γ απέχει οριζόντια λ από το σημείο x=0 και έχει πλάτος 2Α.

Άσκηση 3.

Κατά μήκος μιας ελαστικής χορδής μήκους $L = 16,25\text{cm}$ διαδίδεται αρμονικό κύμα της μορφής: $y = 8\eta\mu(10\pi t - \frac{2\pi x}{5})$ όπου x, y σε cm και t σε s. Το ένα άκρο της χορδής είναι στερεωμένα ακλόνητα, με αποτέλεσμα το κύμα να ανακλαστεί και να δημιουργηθεί στάσιμο κύμα. Το άλλο άκρο της χορδής είναι ελεύθερο, δημιουργείται σε αυτό κοιλία και θεωρούμε ότι βρίσκεται στη θέση $x = 0$. Η κοιλία της θέσης $x = 0$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση χωρίς αρχική φάση.

α) Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας διάδοσης του αρμονικού κύματος.

β) Να βρείτε τον αριθμό των κοιλιών που δημιουργούνται.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου για την κοιλία Κ που απέχει $\frac{\lambda}{2}$ από το σημείο $x = 0$.

δ) Αν ένα σημείο M του θετικού ημιάξονα ταλαντώνεται με πλάτος $A_0 = 8\sqrt{3}\text{cm}$, να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου αυτού από τον πλησιέστερο δεσμό.

Λύση

α) Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα θα εφαρμόσουμε τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής.

Γράφουμε τη δοθείσα εξίσωση σε μορφή αντίστοιχη της γενικής εξίσωσης του αρμονικού κύματος $y = A\eta\mu 2\pi(f \cdot t - \frac{x}{\lambda})$

Έχουμε $y = 8\eta\mu(10\pi t - \frac{2\pi x}{5}) \Rightarrow y = 8\eta\mu 2\pi(5t - \frac{x}{5})$ (cm,s)

Από τη σύγκριση των δύο εξισώσεων παίρνουμε:

$2\pi f = 10\pi$, συνεπώς $f = 5\text{Hz}$ και $\frac{2\pi}{5} = \frac{2\pi}{\lambda}$, συνεπώς $\lambda = 5\text{cm}$

Άρα $\upsilon = \lambda f = 25\frac{\text{cm}}{\text{s}}$

β) Το σημείο ανάκλασης είναι ακλόνητο , άρα σε αυτό δημιουργείται δεσμός. Στο ελεύθερο άκρο δημιουργείται κοιλία. Επειδή σε ένα στάσιμο, ο δεσμός από την κοιλία απέχουν $\frac{\lambda}{4}$ το μήκος της χορδής L συνδέεται με το μήκος κύματος λ με τη σχέση: $L=\frac{\kappa\lambda}{2}+\frac{\lambda}{4}$

Με αντικατάσταση του L και του λ προκύπτει ότι $\kappa=6$. Συνεπώς μεταξύ πρώτου και τελευταίου δεσμού οι κοιλίες είναι 6 και δεδομένου ότι στη θέση $x=0$ υπάρχει κοιλία στο σύνολο δημιουργούνται 7 κοιλίες.

γ) Η απομάκρυνση των υλικών σημείων του μέσου σε ένα στάσιμο δίνονται από τη σχέση $y=2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\cdot\eta\mu\omega t$.

Έτσι η κοιλία Κ της θέσης $x=\frac{\lambda}{2}$ θα ταλαντώνεται σύμφωνα με τη σχέση $y_K=2\cdot 8\ \sigma\upsilon\nu\frac{\frac{2\pi\lambda}{2}}{\lambda}\cdot\eta\mu 10\pi t \Rightarrow y_K=-16\cdot\eta\mu 10\pi t\,(cm,s)$ και η ταχύτητα ταλάντωσής της θα δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon_K=10\pi(-16)\cdot\sigma\upsilon\nu(10\pi t)\ (cm/s)\Rightarrow \upsilon_K=-160\pi\cdot\sigma\upsilon\nu(10\pi t)\ (cm/s)$$

δ) Το πλάτος συναρτήσει της απόστασης από τη θέση $x=0$, δίνεται από τη σχέση:

$A'=2A\left|\frac{\sigma\upsilon\nu 2\pi x}{\lambda}\right|$ συνεπώς $8\sqrt{3}=16\left|\frac{\sigma\upsilon\nu 2\pi x}{5}\right|$ δηλαδή $\sigma\upsilon\nu(\frac{2\pi x}{5})=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Άρα $\frac{2\pi x}{5}=\kappa\pi+\frac{\pi}{6}$ ή $\frac{2\pi x}{5}=\kappa\pi-\frac{\pi}{6}$, οπότε $x=\frac{5\kappa}{2}\pm\frac{5}{12}cm$, όπου x η απόσταση από το ελεύθερο άκρο της χορδής που πάλλεται με μέγιστο πλάτος (κοιλία).

Οι κοιλίες απέχουν από το ελεύθερο άκρο απόσταση $x_\kappa=\frac{\kappa\lambda}{2}=\frac{5\kappa}{2}\ (cm)$

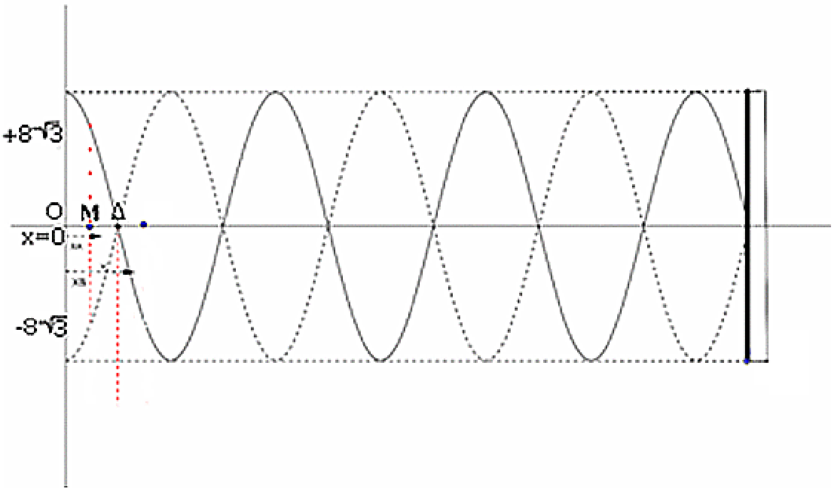
Συνεπώς κάθε σημείο που πάλλεται με πλάτος $8\sqrt{3}cm$, θα απέχει από την πλησιέστερη κοιλία απόσταση $d_1=\frac{5}{12}cm$.

Οι δεσμοί απέχουν από το ελεύθερο άκρο απόσταση

$$x_\Delta=\frac{(2\kappa+1)\lambda}{4}=\frac{5\kappa}{2}+\frac{5}{4}\ (cm).$$

Συνεπώς κάθε σημείο που πάλλεται με πλάτος $8\sqrt{3}\text{cm}$, θα απέχει από τον πλησιέστερο δεσμό απόσταση d_2 για την οποία ισχύει:

$$d_1 + d_2 = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow d_2 = \frac{\lambda}{4} - d_1 \Rightarrow d_2 = \frac{5}{4}\text{cm} - \frac{5}{12}\text{cm} \Rightarrow d_2 = \frac{10}{12}\text{cm}$$



Άσκηση 5.

Το σημείο Ο ομογενούς ελαστικής χορδής μεγάλου μήκους, τη χρονική στιγμή $t = 0$, αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $y = 0,05\eta\mu 8\pi t$ (S.I.) κάθετα στη διεύθυνση της χορδής. Το αρμονικό κύμα που παράγεται διαδίδεται με ταχύτητα μέτρου $2m/s$, κατά τη θετική φορά του άξονα x΄Ox, κατά μήκος της χορδής.

α) Να βρεθούν ο χρόνος που χρειάζεται ένα υλικό σημείο του ελαστικού μέσου για να εκτελέσει μια πλήρη ταλάντωση καθώς και το μήκος κύματος του αρμονικού κύματος.

β) Να γραφεί η εξίσωση του κύματος που παράγεται και να βρεθούν οι θέσεις όλων των σημείων που βρίσκονται σε συμφωνία φάσης με την πηγή.

γ) Να γράψετε και να σχεδιάσετε την εξίσωση της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου για ένα υλικό σημείο Α που απέχει απόσταση $x = \frac{3\lambda}{2}$ από την πηγή.

δ) Να σχεδιάσετε τα στιγμιότυπα του κύματος τις χρονικές στιγμές $t_1 = \frac{T}{4}$ και $t_2 = \frac{3T}{4}$.

<u>Λύση</u>

α) Από την εξίσωση $y = 0,05\eta\mu 8\pi t$ (S.I.) βρίσκουμε: $A = 0,05m$, $\omega = 8\pi\ rad/s$. Η περίοδος προκύπτει από τη σχέση $\omega = \frac{2\pi}{T}$, άρα $T = 0,25s$ και συνεπώς η συχνότητα είναι $f = 4Hz$. Ο χρόνος που χρειάζεται ένα υλικό σημείο να κάνει μια πλήρη ταλάντωση, είναι η περίοδος ταλάντωσης του, δηλαδή είναι ίσος με $0,25s$.

Το μήκος κύματος προκύπτει από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής.

$$\upsilon = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{\upsilon}{f} = \frac{2m/s}{4Hz} \Rightarrow \lambda = 0,5m.$$

β) Η γενική εξίσωση του κύματος είναι: $y = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$, η οποία με αντικατάσταση, των μεγεθών A, T και λ γίνεται:

$$y = 0,05\eta\mu 2\pi(4t - 2x)(SI)$$

Τα σημεία που είναι σε συμφωνία φάσης με την πηγή απέχουν από αυτή ακέραιο αριθμό μηκών κύματος, δηλαδή βρίσκονται σε θέσεις για τις οποίες ισχύει

$$x = k\lambda = k \cdot 0,5m \quad k = 1,2,3,...$$

γ) Η μέγιστη ταχύτητα θα είναι: $\upsilon_{max} = \omega A = 0,4\pi\ m/s$, ενώ η εξίσωση ταχύτητας ταλάντωσης των υλικών σημείων είναι:

$\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$. Άρα $\upsilon = 0,4\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi(4t - 2x)$ στο (S.I.).

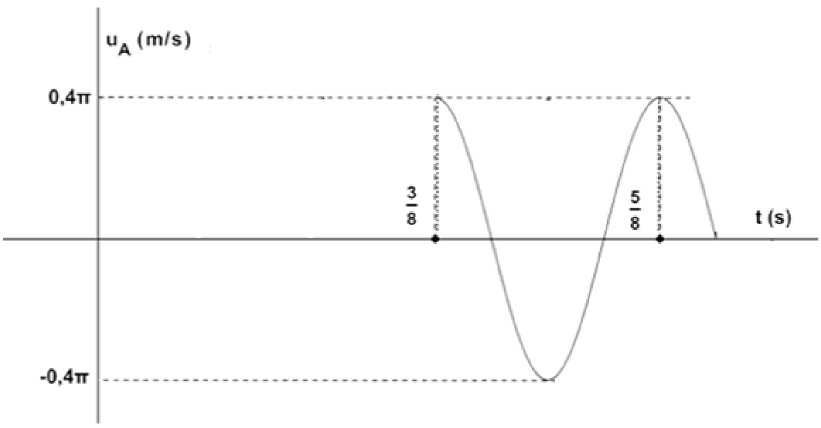
Η γενική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης των υλικών σημείων είναι $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$

Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης θα είναι: $\upsilon_{max} = \omega A = 0,4\pi\ m/s$

Με αντικατάσταση στη γενική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης: $T = 0,25s$, $\lambda = 0,5m,\ \ x = \frac{3\lambda}{2} = \frac{3}{4}m$ παίρνουμε $\upsilon_A = 0,4\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi(4t - \frac{3}{2})(SI)$

Το κύμα φθάνει στο Α $(x_A = \frac{3}{4}m)$ τη χρονική στιγμή $t_A = \frac{x_A}{\upsilon} = \frac{3}{8}s$. Για $t < t_A$ το σημείο Α παραμένει ακίνητο. Άρα η εξίσωση ταχύτητας – χρόνου είναι:

$\upsilon_A = 0,4\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi(4t - 2x)$ για $t \geq \frac{3}{8}s$ στο S.I.



δ) Για να σχεδιάσουμε το στιγμιότυπο, βρίσκουμε την εξίσωση της απομάκρυνσης συναρτήσει της απόστασης και υπολογίζουμε που έχει φθάσει το κύμα την κάθε χρονική στιγμή.

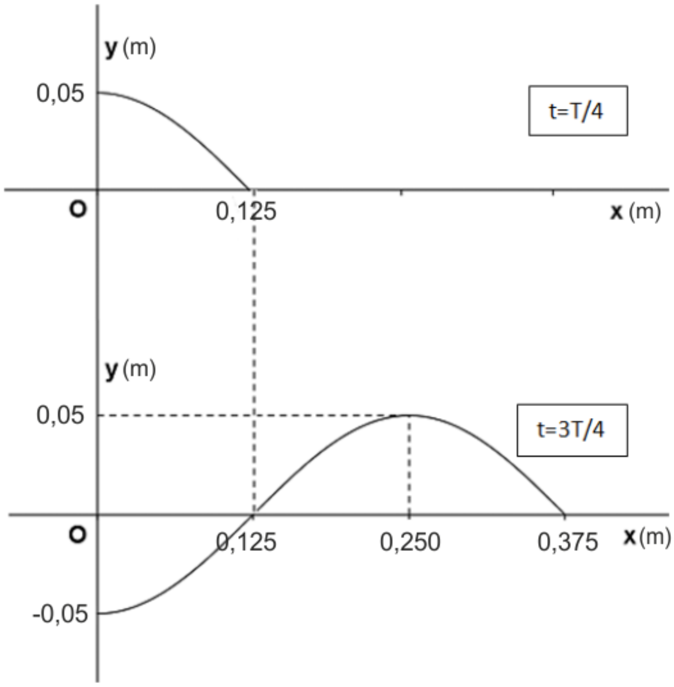
Τη χρονική στιγμή $\frac{T}{4}$, η εξίσωση απομάκρυνσης – θέσης είναι: $y = 0,05\eta\mu 2\pi(\frac{1}{4} - 2x)$.

Τη χρονική στιγμή αυτή το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση

$x = \upsilon t = \upsilon \frac{T}{4} = \frac{\lambda}{4} = 0{,}125\text{m}$, ενώ τη χρονική στιγμή $\frac{3T}{4}$, η εξίσωση απομάκρυνσης – θέσης, είναι: $y = 0{,}05 ημ2\pi(\frac{3}{4} - 2x)$.

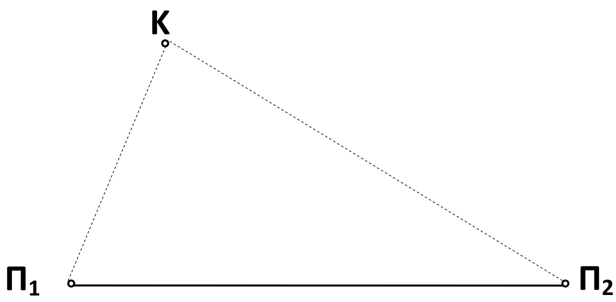
Τη χρονική στιγμή αυτή το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση

$x = \upsilon t = \upsilon \frac{3T}{4} = \frac{3\lambda}{4} = 0{,}375\text{m}$.



Άσκηση 10.

Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων Π$_1$, Π$_2$ δημιουργούν στην επιφάνεια υγρού εγκάρσια αρμονικά κύματα. Τη χρονική στιγμή $t=0$ οι πηγές αρχίζουν να ταλαντώνονται με απομακρύνσεις που περιγράφονται από τη σχέση $y=0,05\,\eta\mu\left(4\pi t\right)$, (SI). Η ταχύτητα διάδοσης των εγκαρσίων κυμάτων στην επιφάνεια του υγρού είναι ίση με $\upsilon=2\text{ m/s}$. Σε ένα σημείο Κ, της επιφάνειας του υγρού, το κύμα από την πηγή Π$_1$ φτάνει τη χρονική στιγμή $t_1=1\text{s}$, ενώ το κύμα από την πηγή Π$_2$ φτάνει στο σημείο Κ όταν η πηγή Π$_2$ έχει εκτελέσει 4 πλήρεις ταλαντώσεις.



Να βρείτε:

α. Πόσο απέχει το σημείο Κ από τις δύο πηγές.

β. Πόση θα είναι η συχνότητα και το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Κ μετά την συμβολή των δύο κυμάτων;

γ. Πόσες υπερβολές ενίσχυσης υπάρχουν ανάμεσα στο σημείο Κ και την μεσοκάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα Π$_1$Π$_2$;

δ. Πόση είναι η ταχύτητα του σημείου Κ τη χρονική στιγμή $t=4,75\text{ s}$;

<u>Λύση</u>

α. Από την εξίσωση ταλάντωσης των πηγών $y=0,05\,\eta\mu\left(4\pi t\right)$ προκύπτει ότι:

$A=0,05\text{m}$ και $\omega=4\pi\,\text{rad/s}$.

Είναι $\omega=\dfrac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{4\pi}\text{s}\Rightarrow T=0,5\text{s}$.

Το κύμα διαδίδεται με σταθερή ταχύτητα. Άρα η απόσταση του σημείου Κ από την πρώτη πηγή θα είναι:

$r_1=\upsilon\cdot t_1=\ 2\text{m/s}\cdot 1\text{s}$ ή $r_1=2\text{m}$.

Η απόσταση του σημείου Κ από την δεύτερη πηγή θα είναι ομοίως, $r_2=\upsilon\cdot t_2$.

Το κύμα από την πηγή Π_2 φτάνει στο σημείο Κ όταν η πηγή Π_2 έχει εκτελέσει 4 πλήρεις ταλαντώσεις, δηλαδή $t_2 = 4T = 4 \cdot 0,5s$ ή $t_2 = 2s$.

Οπότε, $r_2 = \upsilon \cdot t_2 = (2m/s) \cdot 2s$ ή $r_2 = 4\ m$.

β. Το σημείο Κ μετά την συμβολή των δύο κυμάτων θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση, με συχνότητα ίδια με τη συχνότητα των δύο κυμάτων που συμβάλλουν. Άρα $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,5s} \Rightarrow f = 2Hz.$

Το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Κ μετά την συμβολή των δύο κυμάτων θα είναι:

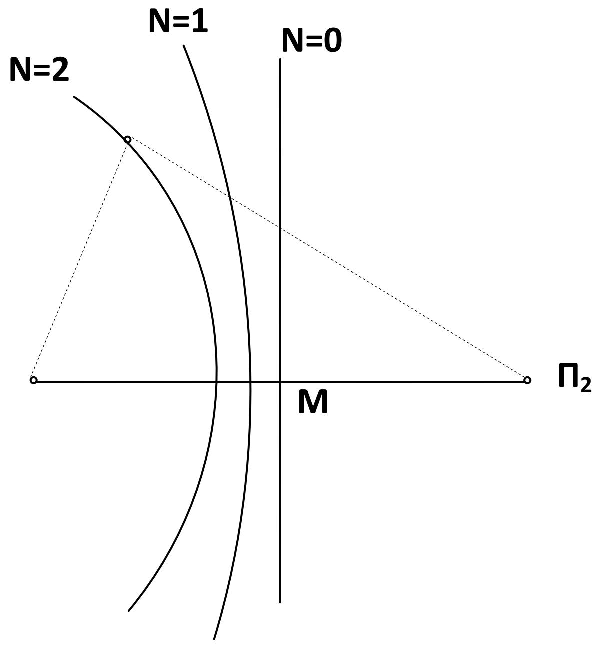
$$\left|A_K'\right| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{r_2 - r_1}{2\lambda}\right| = 2 \cdot 0,05\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{4m - 2m}{2 \cdot 1m}\right| = 0,1 \cdot \left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\right| \Rightarrow \left|A_K'\right| = 0,1m .$$

Το σημείο Κ είναι λοιπόν ένα σημείο ενισχυτικής συμβολής.

γ. Θα βρούμε το σημείο Κ σε ποια υπερβολή ενισχυτικής συμβολής ανήκει. Είναι

$r_2 - r_1 = N \cdot \lambda \Rightarrow 4m - 2m = N \cdot 1m \Rightarrow N = 2$.

Κατά συνέπεια ανάμεσα στην υπερβολή ενίσχυσης που περνά από το σημείο Κ ($N = 2$) και την μεσοκάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα $\Pi_1\Pi_2$, που είναι η υπερβολή ενίσχυσης με $N = 0$, περνά μία υπερβολή ενίσχυσης, αυτή που αντιστοιχεί σε $N = 1$.



δ. Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Κ είναι:

$$y = 2A\cdot \text{συν}2\pi\frac{r_2 - r_1}{2\lambda}\cdot \text{ημ}2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right) = 0,1\cdot \text{ημ}2\pi\left(\frac{t}{0,5} - \frac{2+4}{2}\right)\ (\text{SI}) \Rightarrow$$

$$y = 0,1\cdot \text{ημ}2\pi\left(2t - 3\right)\ (\text{SI})\,.$$

Άρα, η εξίσωση της ταχύτητας του σημείου Κ συναρτήσει του χρόνου θα είναι:

$$\upsilon = 0,1\cdot 4\pi\cdot \text{συν}2\pi\left(2t - 3\right) \Rightarrow \upsilon = 0,4\pi\cdot \text{συν}2\pi\left(2t - 3\right)(\text{SI})\,.$$

Τη χρονική στιγμή $t = 4,75\ \text{s}$ η ταχύτητα του σημείου Κ είναι

$$\upsilon = 0,4\pi\cdot \text{συν}2\pi\left(2\cdot 4,75 - 3\right) = 0,4\pi\cdot \text{συν}13\pi = 0,4\pi\cdot \text{συν}\pi \Rightarrow \upsilon = \text{-}0,4\pi\ \text{m/s}\,.$$

Πρόβλημα 2.

Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων Π_1 και Π_2 δημιουργούν στην επιφάνεια υγρού που ηρεμεί εγκάρσια κύματα που διαδίδονται με ταχύτητα $\upsilon = 80\frac{cm}{s}$. Οι δύο πηγές τη χρονική στιγμή $t = 0$ αρχίζουν να εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση, σε διεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια του υγρού και η εξίσωση ταλάντωσής τους είναι $y = A\eta\mu(\frac{2\pi t}{T})$.

Με την επίδραση των δύο κυμάτων ένα μικρό κομμάτι φελλού που βρίσκεται στην επιφάνεια του υγρού ταλαντώνεται, με εξίσωση απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας του:

$y = 4\eta\mu 2\pi(8t - 4)$, όπου y σε cm και t σε s.

Οι αποστάσεις του φελλού από τις πηγές Π_1 και Π_2 είναι r_1, r_2 αντίστοιχα και συνδέονται με τη σχέση $r_1 - r_2 = 2\lambda$, όπου λ το μήκος κύματος λ των δυο κυμάτων.

α) Να υπολογίσετε το πλάτος ταλάντωσης των πηγών.

β) Να υπολογίσετε το μήκος κύματος λ των κυμάτων καθώς και τις αποστάσεις r_1 και r_2.

γ) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση ταλάντωσης του φελλού την χρονική στιγμή $t_1 = 1s$.

δ) Να βρείτε τη χρονική στιγμή t, κατά την οποία ο φελλός περνάει από τη θέση μέγιστης απομάκρυνσης $y = 4cm$ για 1η φορά, εκτελώντας σύνθετη ταλάντωση.

ε) Να βρείτε το πλάτος ταλάντωσης των σημείων που βρίσκονται στην μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τις δύο πηγές.

<u>Λύση</u>

α) Συγκρίνουμε τη δοθείσα εξίσωση

$y = 4\eta\mu 2\pi(8t - 4)\,(cm, s)$

με τη γενική εξίσωση της συμβολής εγκαρσίων κυμάτων στην επιφάνεια υγρού

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\left[\frac{2\pi(r_1 - r_2)}{2\lambda}\right]\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)$$

Για το πλάτος του υλικού σημείου ισχύει:

$$2A\sigma\upsilon\nu\left[\frac{2\pi(r_1 - r_2)}{2\lambda}\right] = 4cm \Rightarrow 2A\sigma\upsilon\nu\left[\frac{2\pi(2\lambda)}{2\lambda}\right] = 4cm \Rightarrow 2A = 4cm \Rightarrow A = 2cm$$

Άρα το πλάτος ταλάντωσης κάθε πηγής είναι $A = 2cm$

β) Το μήκος κύματος βρίσκεται με αντικατάσταση στη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής αφού πρώτα βρεθεί η περίοδος T.

Συγκρίνουμε τη δοθείσα εξίσωση με τη γενική εξίσωση της συμβολής εγκαρσίων κυμάτων:

(i) Για την περίοδο ισχύει: $8t = \frac{t}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{8}s$

Υπολογισμός μήκους κύματος: $\upsilon = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = \upsilon T \Rightarrow \lambda = 0,8\frac{m}{s}\cdot\frac{1}{8}s \Rightarrow \lambda = 0,1m$. Άρα $\lambda = 10cm = 0,1m$.

(ii) Για τον όρο $\frac{(r_1 + r_2)}{2\lambda}$ ισχύει:

$$\frac{r_1 + r_2}{2\lambda} = 4 \Rightarrow r_1 + r_2 = 8\lambda \Rightarrow r_1 + r_2 = 8\cdot 10cm \Rightarrow r_1 + r_2 = 80cm$$

Από τις σχέσεις $r_1 + r_2 = 80cm$ και $r_1 - r_2 = 2\lambda = 20cm$ προκύπτει $r_1 = 50cm$ και $r_2 = 30cm$.

γ) Η μέγιστη επιτάχυνση του φελλού θα είναι

$$\alpha_{max} = \omega^2 A_0 = \left(16\pi\frac{rad}{s}\right)^2 \cdot \left(4\cdot 10^{-2}m\right) \Rightarrow \alpha_{max} = 102,4\frac{m}{s^2}$$

Άρα για $t_1 = 1s$ έχουμε

$$\alpha = -\alpha_{max}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right) = -102,4\cdot\eta\mu 2\pi(8t - 4) \Rightarrow \alpha = -102,4\cdot\eta\mu 2\pi(4)\ (SI) \Rightarrow$$

$$\alpha = 0$$

Δηλαδή τη χρονική στιγμή $t_1 = 1s$ ο φελλός έχει μηδενική επιτάχυνση άρα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας $(y = 0cm)$ και η ταχύτητά του είναι μέγιστη.

δ) Η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι $\frac{T}{4}$ μετά από τη χρονική στιγμή άφιξης του δεύτερου κύματος. Για τη χρονική στιγμή αφιξης t_1 του δευτέρου κύματος ισχύει:

$$t_1 = \frac{r_1}{\upsilon} = \frac{50cm}{80cm/s} \Rightarrow t_1 = \frac{5}{8}s$$

Άρα η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι:

$$t = t_1 + \frac{T}{4} = \frac{5}{8}s + \frac{1/8}{4}s \Rightarrow t = \left(\frac{20}{32} + \frac{1}{32}\right)s \Rightarrow t = \frac{21}{32}s$$

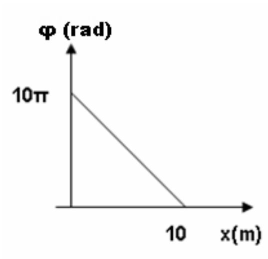
ε) Για τα σημεία της μεσοκαθέτου ισχύει $r_1 = r_2$, οπότε το πλάτος της ταλάντωσης για κάθε σημείο είναι:

$$\left|2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi(r_1 - r_2)}{2\lambda}\right)\right| = 2A\sigma\upsilon\nu 0 = 2A = 4cm$$

Άρα, Όλα τα σημεία της μεσοκαθέτου πάλλονται με μέγιστο πλάτος $4cm$.

Πρόβλημα 3.

Κατά μήκος ενός γραμμικού, ομογενούς, ελαστικού μέσου διαδίδεται στη θετική κατεύθυνση του άξονα x'Ox ένα αρμονικό κύμα. Το σημείο Ο της θέσης $x = 0$ εκτελεί αρμονική ταλάντωση που περιγράφεται από την $y = A\eta\mu\omega t$. Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η γραφική παράσταση της φάσης φ των υλικών σημείων που βρίσκονται στη διεύθυνση διάδοσης του αρμονικού κύματος, σε συνάρτηση με την απόσταση x από το σημείο O, σε μια δεδομένη χρονική στιγμή t_1.



α) Να υπολογίσετε το μήκος κύματος και να βρείτε τη φάση της πηγής τη χρονική στιγμή t_1.

β) Να υπολογίσετε πριν από πόσο χρόνο άρχισε να ταλαντώνεται η πηγή, δηλαδή τη χρονική στιγμή t_1, αν γνωρίζετε ότι η συχνότητα ταλάντωσης της πηγής, είναι $f = 10\text{Hz}$.

γ) Την παραπάνω χρονική στιγμή t_1

1) Να βρείτε την απομάκρυνση του σημείου της θέσης $x = 0$ (πηγή).

2) Να βρείτε τον αριθμό των πλήρων απλών αρμονικών ταλαντώσεων που έχει κάνει η πηγή.

3) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος.

Δίνεται ότι το πλάτος ταλάντωσης της πηγής είναι $A = 0{,}1\text{m}$

δ) Τη χρονική στιγμή t_1 να βρείτε την ταχύτητα με την οποία ταλαντώνεται ένα υλικό σημείο, το οποίο βρίσκεται στη θέση $x = 5\text{m}$ και να αποδείξετε ότι αυτό το υλικό σημείο βρίσκεται σε αντίθετη φάση με την πηγή.

<u>Λύση</u>

α) Η φάση δίνεται από τον τύπο $\varphi = 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$ που μπορεί να γραφεί και ως $\varphi = -(\frac{2\pi}{\lambda})x + \frac{2\pi t}{T}$. Η σχέση αυτή, για συγκεκριμένη χρονική στιγμή, παριστά μία ευθεία.

Από την κλίση στο διάγραμμα, βρίσκουμε $\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{10\pi}{10}$ συνεπώς $\lambda = 2\text{m}$.

Η πηγή βρίσκεται στη θέση $x=0$, έχει τη μεγαλύτερη φάση από όλα τα σημεία του μέσου και σύμφωνα με το διάγραμμα η φάση της είναι $\varphi=10\pi\,\text{rad}$.

β)

<u>1^{ος} τρόπος</u>

Η ταχύτητα του κύματος είναι $\upsilon=\lambda f=2\text{m}\cdot 10\text{Hz}\Rightarrow \upsilon=20\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Όπως φαίνεται από το διάγραμμα το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση $x=10\text{m}$, συνεπώς

$t=\frac{x}{\upsilon}$, από όπου $t_1=0,5\text{s}$

<u>2^{ος} τρόπος</u>

Η πηγή ταλαντώνεται για τόσο χρονικό διάστημα t_1 όσο χρειάζεται για να αποκτήσει σύμφωνα με το διάγραμμα φάση 10π rad. Έτσι με αντικατάσταση στον τύπο της φάσης $x=10\text{m}$, $\varphi_1=10\pi$ rad παίρνουμε:

$$\varphi=2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\Rightarrow 10=2\pi\left(\frac{t_1}{0,1\text{s}}-\frac{0}{2\text{m}}\right)\Rightarrow t_1=0,5\text{s}$$

<u>3^{ος} τρόπος</u>

Η πηγή ταλαντώνεται για τόσο χρονικό διάστημα t_1 όσο χρειάζεται για να διαδοθεί το κύμα σε απόσταση $x_1=10\text{m}$. Επίσης γνωρίζουμε ότι το σημείο της θέσης που ξεκινά να ταλαντώνεται έχει φάση μηδέν. Έτσι με αντικατάσταση στον τύπο της φάσης $x_1=10\text{m}$, $\varphi_1=0$ παίρνουμε

$$\varphi=2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\Rightarrow 0=2\pi\left(\frac{t_1}{0,1\text{s}}-\frac{10\text{m}}{2\text{m}}\right)\Rightarrow t_1=0,5\text{s}$$

γ)

1) Η εξίσωση ταλάντωσης της πηγής είναι $y=A\eta\mu\omega t$. Τη χρονική στιγμή $t_1=0,5\text{s}$ η εξίσωση δίνει

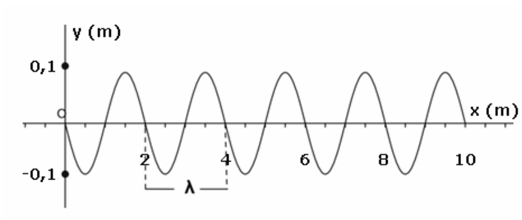
$y=A\eta\mu(20\pi\cdot 0,5)\Rightarrow y=A\eta\mu(10\pi)=0\Rightarrow y=A\eta\mu(5\cdot 2\pi+0)\Rightarrow y=0$, συνεπώς η πηγή τη χρονική στιγμή t_1 περνά από τη θέση ισορροπίας κινούμενη κατά τη θετική φορά, δηλαδή τη φορά που είχε και τη χρονική στιγμή $t=0$.

2) Ισχύει $N = \frac{t}{T} = \frac{0,5s}{0,1s} = 5$. Άρα η πηγή τη χρονική στιγμή t_1 έχει κάνει 5 πλήρεις ταλαντώσεις.

3) Για να σχεδιάσουμε το στιγμιότυπο του κύματος, την χρονική στιγμή t_1, γράφουμε την εξίσωση του αρμονικού κύματος, $y = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$, η οποία με αντικατάσταση γίνεται: $y = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi(10t - \frac{x}{2})(SI)$

- Αφού συνολικά η πηγή έχει κάνει 5 πλήρεις ταλαντώσεις το κύμα θα έχει διαδοθεί σε απόσταση $x = 5\lambda$.
- Για $x = 0$, βρίσκουμε ότι η πηγή τη χρονική στιγμή αυτή, περνά από τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα, $(y = 0)$.
- Για $x = \frac{\lambda}{4}$, βρίσκουμε $y = A\eta\mu(10\pi - \frac{\pi}{2}) = -A$

Συνεπώς το στιγμιότυπο θα είναι:



δ) Η εξίσωση του αρμονικού κύματος είναι $y = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi(10t - \frac{x}{2})(SI)$. Αφού κάθε υλικό σημείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, η εξίσωση ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου θα είναι: $\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$, η οποία με αντικατάσταση γίνεται:

$\upsilon = 2\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(20\pi t - \pi x)(SI)$.

Με αντικατάσταση $x = 5m$, $t_1 = 0,5s$ προκύπτει

$$\upsilon = 2\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(10\pi - 5\pi)(SI) \Rightarrow \upsilon = 20\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(5\pi) \Rightarrow \upsilon = -2\pi \, \frac{m}{s}$$

Το σημείο αυτό βρίσκεται σε αντίθετη φάση με την πηγή. Αυτό αποδεικνύεται και από το ότι η απόστασή του x από την πηγή είναι της μορφής $x = \kappa\lambda + \frac{\lambda}{2}$.

Πρόβλημα 4.

Δύο αρμονικά κύματα ίδιου πλάτους ($A = 2cm$) και ίδιας συχνότητας ($f = 10Hz$) διαδίδονται με ταχύτητα $\upsilon = 20\frac{m}{s}$ σε ελαστική χορδή $x'Ox$, με αντίθετη φορά. Κατά μήκος της χορδής αποκαθίσταται στάσιμο κύμα και στο σημείο Ο, της θέσης $x = 0$, δημιουργείται κοιλία. Το σημείο Ο τη χρονική στιγμή $t = 0$ έχει απομάκρυνση $y = 0$ και ταχύτητα $\upsilon > 0$.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις των δύο κυμάτων και να βρείτε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που προκύπτει από τη συμβολή των δυο αυτών κυμάτων.

β) Να προσδιορίσετε τις θέσεις των δεσμών και τις θέσεις των κοιλιών και να βρείτε την απόσταση μεταξύ ενός δεσμού και της γειτονικής του κοιλίας.

γ) Να βρείτε την απόσταση μεταξύ των δύο πλησιέστερων σημείων που βρίσκονται εκατέρωθεν ενός δεσμού και ταλαντώνονται με πλάτος ίσο με το μισό του πλάτους της κοιλίας.

δ) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος που έχει δημιουργηθεί κατά μήκος της χορδής, τις χρονικές στιγμές $t_1 = \frac{T}{4}$ και $t_2 = \frac{T}{2}$.

<u>Λύση</u>

α) Από τη σχέση $\upsilon = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{\upsilon}{f}$, με αντικατάσταση βρίσκουμε το μήκος κύματος $\lambda = \frac{20m/s}{10Hz} \Rightarrow \lambda = 2m$.

Τα δύο κύματα περιγράφονται από τις εξισώσεις:

Το διαδιδόμενο προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x΄Οx,

$$y_1 = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) \Rightarrow y_1 = 0,02\eta\mu 2\pi(10t - \frac{x}{2}) \text{ (S.I.)}$$

Το διαδιδόμενο προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x΄Οx,

$$y_2 = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}) \Rightarrow y_2 = 0,02\eta\mu 2\pi(10t + \frac{x}{2}) \text{ (S.I.)}$$

<u>Σχόλιο</u>: Το x παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές.

Για να βρούμε την εξίσωση του στάσιμου κύματος εφαρμόζουμε την αρχή της επαλληλίας των κυμάτων:

$$y = y_1 + y_2 \Rightarrow y = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda})$$

από όπου προκύπτει: $y = 2A\sigma\upsilon\nu(\frac{2\pi x}{\lambda})\eta\mu(\frac{2\pi t}{T})$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα της άσκησης βρίσκουμε:

$$y = 0,04 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) \cdot \eta\mu 20t\,(SI)$$

β) Δεσμοί θα είναι τα σημεία για τα οποία το πλάτος ταλάντωσης θα είναι ίσο με μηδέν και ισχύει $|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}| = 0$. Με λύση της εξίσωσης προκύπτει $x_\Delta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{4} = \pm(\frac{\lambda}{4} + \frac{k\lambda}{2})$, όπου το $\pm$ υπάρχει επειδή το στάσιμο κύμα δημιουργείται και στον αρνητικό ημιάξονα.

Κοιλίες θα είναι τα σημεία για τα οποία το πλάτος ταλάντωσης είναι μέγιστο και ισχύει $|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}| = 1$. Με λύση της εξίσωσης προκύπτει $x_K = \pm\frac{k\lambda}{2}$, όπου το $\pm$ υπάρχει επειδή το στάσιμο κύμα δημιουργείται και στον αρνητικό ημιάξονα.

Η απόσταση d μεταξύ ενός δεσμού και μιας κοιλίας είναι ίση με $\frac{\lambda}{4}$, διότι

$$d = |x_\Delta - x_K| = \frac{\lambda}{4}$$

Το μήκος κύματος λ έχει υπολογιστεί από τη σχέση $\upsilon = \lambda f$ και είναι $\lambda = 2m$. Άρα $d = |x_\Delta - x_K| = 0,5m$

γ) Τα σημεία αυτά θα πάλλονται με πλάτος Α, άρα θα ισχύει: $2A|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}| = A$, δηλαδή:

$$|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}| = \frac{1}{2}$$

από όπου προκύπτουν οι τριγωνομετρικές εξισώσεις:

$\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} = -\frac{1}{2}$

Η 1^{η} εξίσωση δίνει $\frac{2\pi x}{\lambda} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

Η 2^{η} εξίσωση δίνει $\frac{2\pi x}{\lambda} = (2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{3}$

Οι δύο σειρές λύσεων ενοποιούνται στην

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{(k\lambda \pm \frac{\lambda}{3})}{2} \Rightarrow x = (\frac{k}{2} \pm \frac{1}{6})\lambda$$

Θα δουλέψουμε στο θετικό ημιάξονα. Προφανώς ότι ισχύουν στον άξονα αυτόν αντίστοιχα θα ισχύουν και στον αρνητικό.

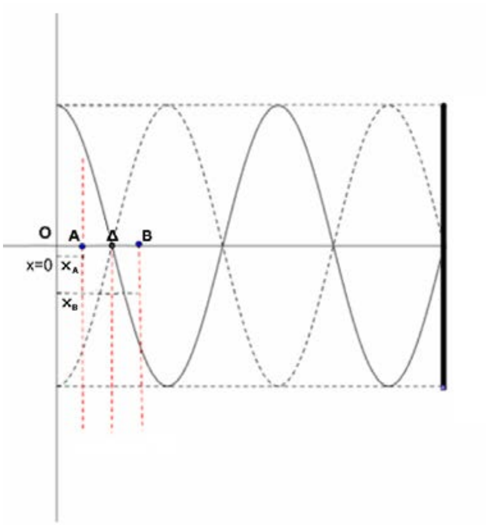
Η θέση του πιο κοντινού σημείου στο σημείο Ο που ταλαντώνεται με πλάτος Α, θα βρεθεί αν θέσουμε στην παραπάνω εξίσωση, $k = 0$, οπότε προκύπτει $x_A = \frac{\lambda}{6}$. Το σημείο αυτό είναι δεξιά του σημείου Ο, (βλέπε σχήμα) και θα είναι το κοντινότερο στον πρώτο δεσμό.

Αν στην παραπάνω εξίσωση $x = (\frac{k}{2} \pm \frac{1}{6})\lambda$ θέσουμε $k = 1$, προκύπτουν $x_\Gamma = \frac{4\lambda}{6}$ και $x_B = \frac{2\lambda}{6}$.

Τα δύο πλησιέστερα σημεία στον πρώτο δεσμό είναι τα σημεία Α και Β με αποστάσεις από την αρχή Ο ίσες με $x_A = \frac{\lambda}{6}$ και $x_B = \frac{2\lambda}{6}$.

Συνεπώς η ζητούμενη απόσταση θα είναι: $d = x_B - x_A = \frac{2\lambda}{6} - \frac{\lambda}{6} \Rightarrow d = \frac{\lambda}{6}$, άρα $d = \frac{\lambda}{6} = \frac{1}{3}m$

<u>Σχόλιο</u>: Ότι ισχύει για τα δύο (πλησιέστερα) σημεία Α και Β που είναι εκατέρωθεν του πρώτου δεσμού, για λόγους συμμετρίας θα ισχύει και για όλα τα άλλα σημεία και στους άλλους δεσμούς.



δ) Το στάσιμο κύμα εκτείνεται και προς τις δύο κατευθύνσεις, με αρχή το σημείο Ο. Θέτοντας στην εξίσωση του στάσιμου κύματος $t = \frac{T}{4}$, προκύπτει:

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu(\frac{2\pi x}{\lambda})\cdot\eta\mu(\frac{2\pi t}{T}) \Rightarrow y = 2A\sigma\upsilon\nu(\frac{2\pi x}{2})\cdot\eta\mu(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow y = 2A\sigma\upsilon\nu(\pi x) \Rightarrow$$
$$y = 0,02\sigma\upsilon\nu(\pi x)(SI)$$

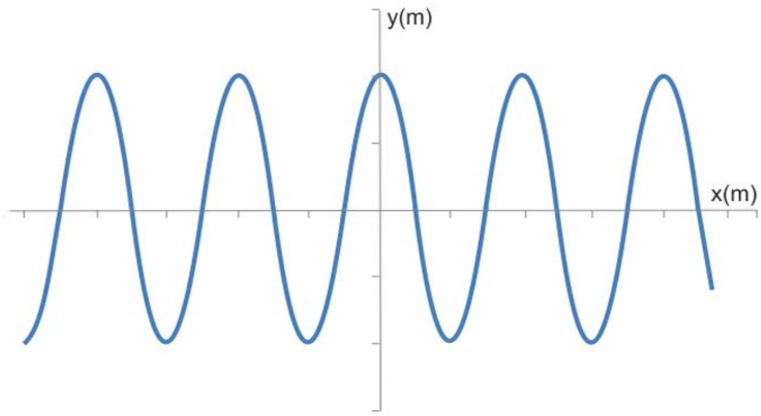
Για $x = 0 \Rightarrow y = 2A$, δηλαδή το σημείο Ο τη στιγμή $t = \frac{T}{4}$ βρίσκεται στη μέγιστη θετική απομάκρυνση.

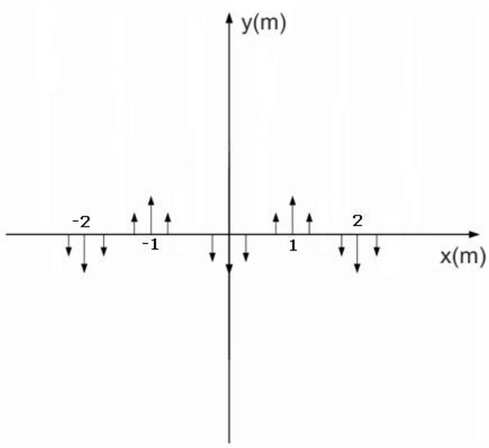
Τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{2}$ η εξίσωση του στάσιμου δίνει

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu(\frac{2\pi x}{\lambda})\cdot\eta\mu(\frac{2\pi t}{T}) \Rightarrow y = 2A\sigma\upsilon\nu(\frac{2\pi x}{\lambda})\cdot\eta\mu\pi \Rightarrow y = 2A\sigma\upsilon\nu(\frac{2\pi x}{\lambda})\cdot 0 \Rightarrow y = 0$$

Τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{2}$ το σημείο Ο, περνά από τη θέση ισορροπίας με αρνητική φορά, δηλαδή προς τα κάτω. Προφανώς όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου τη χρονική στιγμή αυτή, θα περνούν από τη θέση ισορροπίας τους. Γνωρίζουμε επίσης, ότι όλα τα σημεία μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών έχουν την ίδια φάση, άρα περνούν από τη θέση ισορροπίας τους με ίδια φορά. Ενώ τα σημεία εκατέρωθεν ενός δεσμού, έχουν διαφορά φάσης π και συνεπώς περνούν από τη θέση ισορροπίας με αντίθετες κατευθύνσεις.

Συνεπώς τα στιγμιότυπα θα είναι:





Πρόβλημα 5.

Σε ομογενή ελαστική χορδή μήκους $L = 22,5cm$ που το ένα άκρο της είναι ακλόνητα στερεωμένο, δημιουργούνται στάσιμα κύματα. Ένα από τα αρμονικά κύματα που δημιούργησαν το στάσιμο κύμα περιγράφεται από την εξίσωση $y = 4ημ(8πt - \frac{πx}{5})$ (t σε s, y και x σε cm). Το ελεύθερο άκρο της χορδής βρίσκεται στη θέση $x = 0$ και γνωρίζουμε ότι σε αυτό δημιουργείται κοιλία.

α) Να γραφούν οι εξισώσεις του ανακλώμενου και του στάσιμου κύματος.

β) Να βρεθούν ο αριθμός των δεσμών και ο αριθμός των κοιλιών, που δημιουργούνται κατά μήκος της χορδής.

γ) Να γίνουν τα στιγμιότυπα του κύματος τις χρονικές στιγμές $t_1 = \frac{T}{4}$ και $t_2 = \frac{3T}{4}$ στο ίδιο διάγραμμα.

δ) Να βρεθούν οι θέσεις των σημείων της χορδής που έχουν μέγιστη ταχύτητα μέτρου ίσου με το μισό της μέγιστης ταχύτητας μιας κοιλίας.

<u>Λύση</u>

α) Η δοθείσα εξίσωση γράφεται: $y = 4ημ2π(4t - \frac{x}{10})$ (t σε s, y και x σε cm), άρα εξίσωση του ανακλώμενου κύματος είναι $y = 4ημ2π(4t + \frac{x}{10})$ (t σε s, y και x σε cm)

Στη γενική περίπτωση η εξίσωση του στάσιμου είναι: $y = 2A \cdot συν\frac{2πx}{λ} \cdot ημ2πft$

Άρα, η ζητούμενη εξίσωση του στάσιμου θα είναι:

$$y = 2 \cdot 4 \cdot συν\frac{2πx}{10} \cdot ημ2π4t \Rightarrow y = 8 \cdot συν\frac{πx}{5} \cdot ημ8πt \quad (t \text{ σε } s,\ y \text{ και } x \text{ σε } cm)$$

Συγκρίνοντας την τελευταία εξίσωση με τη γενική εξίσωση του στάσιμου κύματος έχουμε: $\frac{2πx}{λ} = \frac{πx}{5}$, άρα $λ = 10cm$

και $8πt = 2πf$, άρα $f = 4Hz$. Συνεπώς η ταχύτητα διάδοσης θα είναι:

$υ = λf = 40\ cm/s$

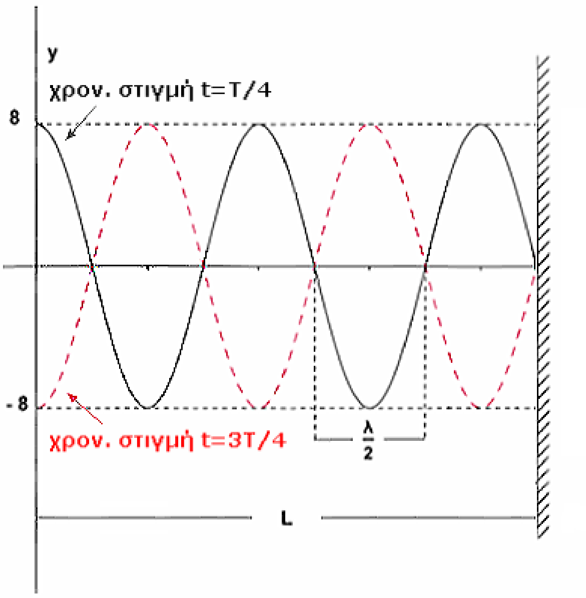
β) Η απόσταση κάθε δεσμού από τη θέση x=0, όπου δημιουργείται κοιλία θα είναι:

$x=\frac{\lambda}{4}+\frac{\kappa\lambda}{2}$. Αν θέσουμε όπου $x=L=22,5\text{cm}$ και $\lambda=10\text{cm}$ βρίσκουμε $\kappa=4$, συνεπώς οι δεσμοί θα είναι συνολικά 5, συμπεριλαμβανόμενου και του δεσμού στο ακλόνητο άκρο. Τόσες θα είναι και οι κοιλίες, δηλαδή 5.

γ) Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι: $y=8\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{5}\cdot\eta\mu 8\pi t$ (t σε s, y και x σε cm)

Για $t=\frac{T}{4}$, γίνεται: $y=8\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{5}(\text{cm})$.

Για $t=\frac{3T}{4}$ γίνεται: $y=-8\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{5}(\text{cm})$. Οπότε τα στιγμιότυπα θα είναι τα παρακάτω:



δ) Κάθε υλικό σημείο της χορδής εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των κοιλιών είναι $\upsilon_{max(\kappa)}=\omega A_{max(\kappa)}\Rightarrow\upsilon_{max(\kappa)}=\omega 2A$. Εμείς ψάχνουμε τις θέσεις των σημείων της χορδής που έχουν μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης $\upsilon_{max}=\omega A$, δηλαδή έχουν πλάτος ταλάντωσης $A'=A=4\text{cm}$. Το πλάτος ταλάντωσης των σημείων του στάσιμου περιγράφεται από τη σχέση $A'=\left|8\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{5}\right|(\text{cm})$.

Άρα έχουμε $4=\left|8\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{5}\right|\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{5}=\pm\frac{1}{2}$ $\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{5}=\frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{5}=-\frac{1}{2}$.

Η λύση της 1ης εξίσωσης δίνει:

$\frac{\pi x}{5}=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=10k\pm\frac{5}{3}(\text{cm})$ με $0<x<22,5\text{cm}$ ή $0<x<\frac{67,5}{3}\text{cm}$

Για $k=0 \Rightarrow x=\frac{5}{3}\text{cm}$

Για $k=1 \Rightarrow x=\frac{35}{3}\text{cm}$ και $x=\frac{25}{3}\text{cm}$

Για $k=2 \Rightarrow x=\frac{65}{3}\text{cm}$ και $x=\frac{55}{3}\text{cm}$

Η λύση της 2ης εξίσωσης δίνει:

$\frac{\pi x}{5}=2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x=10k \pm \frac{10}{3}\,(\text{cm})$ με $0<x<22,5\text{cm}$ ή $0<x<\frac{67,5}{3}\text{cm}$

Για $k=0 \Rightarrow x=\frac{10}{3}\text{cm}$

Για $k=1 \Rightarrow x=\frac{40}{3}\text{cm}$ και $x=\frac{20}{3}\text{cm}$

Για $k=2 \Rightarrow x=\frac{70}{3}\text{cm}$ (απορρίπτεται) και $x=\frac{50}{3}\text{cm}$

Οι ζητούμενες θέσεις είναι συνολικά 9.

Ημερομηνία τροποποίησης: 31/08/2015

Επιμέλεια: Πρόδρομος Κορκίζογλου, Παναγιώτης Μπετσάκος, Αθανάσιος Παπαδημητρίου, Γεώργιος Παπαλεξίου, Ηλίας Ποντικός

Επιστημονικός έλεγχος: Αντώνιος Παλόγος, Βασίλειος Ραυτόπουλος, Κωνσταντίνος Στεφανίδης