Ερώτηση 4.

Ένα σώμα μάζας m είναι δεμένο στην ελεύθερη άκρη κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k και ηρεμεί στη θέση ισορροπίας. Απομακρύνουμε το σώμα προς τα πάνω μέχρι να φτάσει στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου και το αφήνουμε ελεύθερο. Το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους Α. Το μέτρο της μέγιστης δύναμης που δέχεται το σώμα από το ελατήριο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης είναι ίσο με

α) Μηδέν.

β) $k \cdot A$.

γ) $2k \cdot A$.

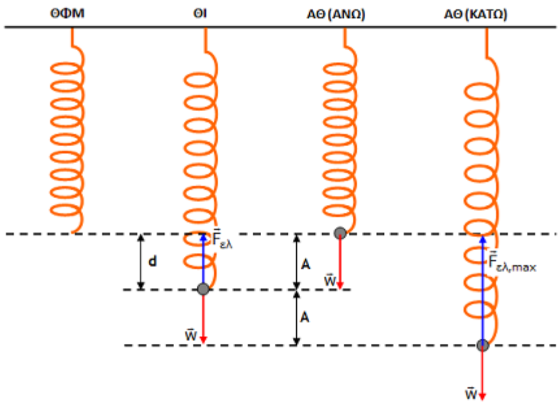
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Η σωστή απάντηση είναι η γ.

Το σώμα ελευθερώνεται από τη θέση του Φυσικού μήκους του ελατηρίου, άρα το πλάτος ταλάντωσης Α ισούται με την απόσταση d μεταξύ της θέσης φυσικού μήκους ελατηρίου (ΘΦΜ) και της θέσης ισορροπίας της ταλάντωσης (ΘΙ).

Το μέτρο της δύναμης που ασκεί το ελατήριο στο σώμα μπορεί να βρεθεί από το <u>Νόμο Hooke</u>: $F_{\varepsilon\lambda} = kL$,όπου L η επιμήκυνση του ελατηρίου. Το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα από το ελατήριο είναι μέγιστο στη θέση που το ελατήριο έχει τη μέγιστη επιμήκυνση L_{max}. Από το σχήμα φαίνεται ότι αυτή είναι η κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης ΑΘ ΚΑΤΩ στην οποία $L = 2A$.



Επομένως: $F_{\varepsilon\lambda,max} = kL_{max} \quad \Rightarrow \quad F_{\varepsilon\lambda,max} = 2k \cdot A$

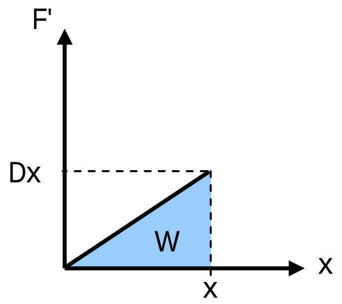
Ερώτηση 7.

Για ένα σύστημα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, να γράψετε τη σχέση που δίνει τη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης σε σχέση με την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας. Να αποδείξετε τη σχέση που γράψατε.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι $U = \frac{1}{2}Dx^2$ με απόδειξη.

Έστω ότι το σώμα βρίσκεται ακίνητο στη θέση ισορροπίας. Δεχόμαστε ότι σ' αυτή τη θέση, το σώμα έχει δυναμική ενέργεια μηδέν. Για να μετακινηθεί το σώμα σε μια άλλη θέση που απέχει απόσταση x από τη θέση ισορροπίας, πρέπει να του ασκηθεί δύναμη F', ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς, ώστε να εξουδετερώνει τη δύναμη επαναφοράς F . Το μέτρο της F', σε κάθε θέση, θα είναι: $F' = Dx$. Το έργο W της δύναμης F' αποθηκεύεται ως δυναμική ενέργεια U στο σύστημα. Επομένως, η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης ισούται με το έργο της δύναμης που πρέπει να ασκηθεί για να μετακινηθεί το σώμα από τη θέση ισορροπίας, στη θέση που απέχει απόσταση x από τη θέση ισορροπίας. Ο υπολογισμός αυτού του έργου γίνεται από τη γραφική παράσταση F'=f(x), επειδή η F' είναι μεταβλητή δύναμη. Το εμβαδόν της επιφάνειας (τριγώνου) μεταξύ του διαγράμματος και του άξονα x είναι αριθμητικά ίσο με το έργο της δύναμης F':



$$U = W = \frac{1}{2} \cdot x \cdot Dx \quad \Rightarrow \quad U = \frac{1}{2}Dx^2$$

(η απόδειξη βρίσκεται και στη σελ. 13 του Σχολικού Βιβλίου)

Ερώτηση 9.

Σε μια φθίνουσα ταλάντωση όταν το πλάτος της ταλάντωσης είναι A η ενέργεια της ταλάντωσης είναι E. Όταν η ενέργεια της ταλάντωσης γίνει $\frac{\text{E}}{2}$, το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι

α) $\frac{\text{A}}{4}$.

β) $\frac{\text{A}}{2}$.

γ) $\frac{\text{A}\sqrt{2}}{2}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Η σωστή απάντηση είναι το γ.

Με χρήση της σχέσης $\text{E} = \frac{1}{2}\text{DA}^2$ και με διαίρεση κατά μέλη, έχουμε:

$$\frac{\text{E}_{\alpha\rho\chi}}{\text{E}_{\tau\varepsilon\lambda}} = \frac{\text{E}}{\frac{\text{E}}{2}} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{1}{2}\text{DA}_{\alpha\rho\chi}{}^2}{\frac{1}{2}\text{DA}_{\tau\varepsilon\lambda}{}^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{A}_{\tau\varepsilon\lambda}{}^2 = \frac{\text{A}^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{A}_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{\text{A}\sqrt{2}}{2}$$

(βλ. σελ. 13 & 18 του Σχολικού Βιβλίου)

Ερώτηση 12.

Ένα σώμα μάζας m είναι κρεμασμένο από ελατήριο σταθεράς k και εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση πλάτους A_1 και συχνότητας f_1, μικρότερης από την ιδιοσυχνότητα f_0 του συστήματος. Για να γίνει το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης μεγαλύτερο του A_1, πρέπει η συχνότητα f του διεγέρτη

α) να αυξηθεί και να πλησιάσει την τιμή f_0.

Β) να μειωθεί.

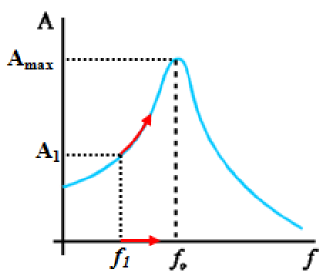
γ) να αυξηθεί και να ξεπεράσει κατά πολύ την τιμή f_0.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι το α.

Στο σχήμα φαίνεται η εξάρτηση του πλάτους μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης από τη συχνότητα του διεγέρτη:



Η συχνότητα f_0 αντιστοιχεί στη συχνότητα συντονισμού, δηλαδή, στη συχνότητα στην οποία μεγιστοποιείται το πλάτος ταλάντωσης. Όπως φαίνεται, επειδή $f_1 < f_0$, για να γίνει το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης μεγαλύτερο του A_1, πρέπει η συχνότητα f του διεγέρτη να αυξηθεί και να πλησιάσει την τιμή f_0, δηλαδή, το σύστημα να πλησιάσει στην κατάσταση συντονισμού.

(βλ. σελ. 22 του Σχολικού Βιβλίου)

Ερώτηση 14.

Ένα σώμα εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων που περιγράφονται από τις εξισώσεις: $x_1 = 0,01\eta\mu 100\pi t$ και $x_2 = 0,01\eta\mu 102\pi t$ (SI). Οι δύο ταλαντώσεις γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο και στην ίδια διεύθυνση. Η εξίσωση της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα δίνεται από τη σχέση

α) $x = 0,02\sigma\upsilon\nu(\pi t)\eta\mu 101\pi t \quad (SI)$

β) $x = 0,02\sigma\upsilon\nu 2\pi t\eta\mu 101\pi t \quad (SI)$

γ) $x = 0,02\eta\mu 101\pi t \quad (SI)$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Η σωστή απάντηση είναι η α.

Οι δύο ταλαντώσεις είναι της μορφής $x_1 = A\eta\mu\omega_1 t$ και $x_2 = A\eta\mu\omega_2 t$, με $\omega_1 = 100\pi \frac{rad}{s}$, $\omega_2 = 102\pi \frac{rad}{s}$ και $A = 0,01\,m$. Η απομάκρυνση του σώματος λόγω της σύνθεσης αυτών των ταλαντώσεων δίνεται από τον τύπο:

$$x = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

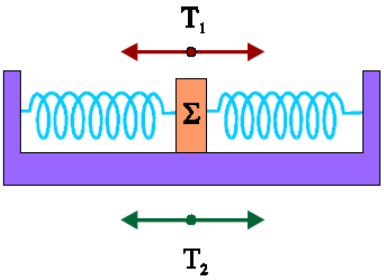
Με αντικατάσταση έχουμε:

$$x = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \quad \Rightarrow \quad x = 0,02\sigma\upsilon\nu\pi t\cdot\eta\mu 101\pi t \quad (SI)$$

(βλ. σελ. 27 του Σχολικού Βιβλίου)

Ερώτηση 16.

Το σώμα Σ του σχήματος εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις ίδιας διεύθυνσης, γύρω από το ίδιο σημείο, με περιόδους T_1 και T_2, με αποτέλεσμα η κίνησή του να παρουσιάζει διακροτήματα.



Ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα είναι ίσος με

α) $\dfrac{T_1 T_2}{|T_1 - T_2|}$.

β) $\dfrac{T_1 + T_2}{2}$.

γ) $|T_1 - T_2|$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Η σωστή απάντηση είναι η α.

Ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους της ταλάντωσης, που θα εκτελέσει του σώμα, ονομάζεται περίοδος των διακροτημάτων και δίνεται από τον τύπο $T_\delta = \dfrac{1}{|f_1 - f_2|}$.

(βλ. σελ. 28 του Σχολικού Βιβλίου)

Θέτοντας $f_1 = \dfrac{1}{T_1}$ και $f_2 = \dfrac{1}{T_2}$ έχουμε:

$$T_\delta = \frac{1}{\left|\dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{T_2}\right|} \Rightarrow T_\delta = \frac{1}{\left|\dfrac{T_2}{T_1T_2} - \dfrac{T_1}{T_1T_2}\right|} \Rightarrow T_\delta = \frac{1}{\left|\dfrac{T_2 - T_1}{T_1T_2}\right|} \Rightarrow T_\delta = \frac{T_1T_2}{|T_1 - T_2|}$$

Ερώτηση 20.

Ένα σώμα εκτελεί ταλάντωση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων ίδιας συχνότητας που γίνονται στην ίδια διεύθυνση γύρω από το ίδιο σημείο. Όταν το σώμα εκτελεί μόνο την πρώτη ταλάντωση, η ενέργεια της ταλάντωσης είναι $E_1 = 2\,J$. Όταν το σώμα εκτελεί μόνο τη δεύτερη ταλάντωση, η ενέργεια της ταλάντωσης είναι $E_2 = 8\,J$. Όταν το σώμα εκτελεί ταυτόχρονα τις δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις, η ενέργεια της ταλάντωσης είναι $E = 10\,J$. Η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων είναι ίση με

α) 30^0.

β) 90^0.

γ) 60^0.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Η σωστή απάντηση είναι το β.

Η σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων της ίδιας συχνότητας, που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο στην ίδια διεύθυνση, είναι απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος $A = \sqrt{A_1{}^2 + A_2{}^2 + 2A_1A_2\text{συνφ}}$, όπου A_1, A_2 είναι τα πλάτη των αρμονικών ταλαντώσεων και φ είναι η διαφορά φάσης τους. Έχουμε:

$$A = \sqrt{A_1{}^2 + A_2{}^2 + 2A_1A_2\text{συνφ}} \Rightarrow A^2 = A_1{}^2 + A_2{}^2 + 2A_1A_2\text{συνφ} \Rightarrow$$

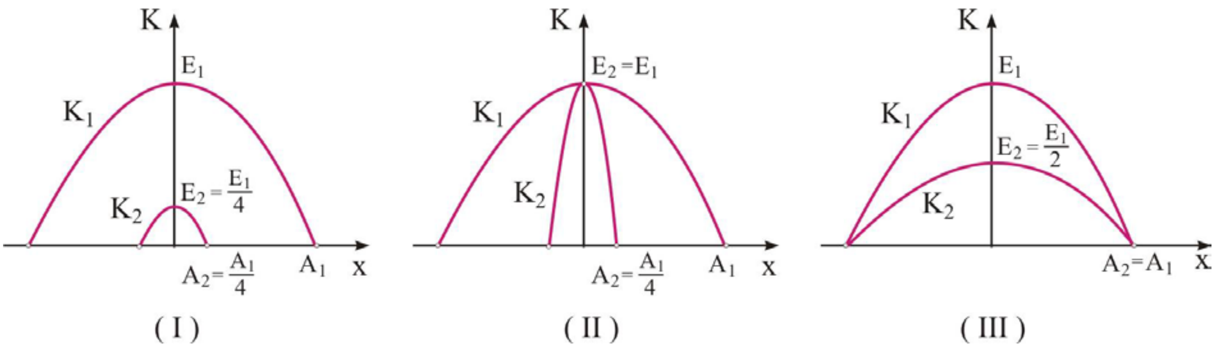
$$\Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}DA_1{}^2 + \frac{1}{2}DA_2{}^2 + \frac{1}{2}D\cdot 2A_1A_2\text{συνφ} \Rightarrow E = E_1 + E_2 + DA_1A_2\text{συνφ} \Rightarrow$$

$$\text{συνφ} = \frac{E - E_1 - E_2}{DA_1A_2} \Rightarrow \text{συνφ} = \frac{10J - 2J - 8J}{DA_1A_2} \Rightarrow \text{συνφ} = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

(βλ. σελ. 26 του Σχολικού Βιβλίου)

Ερώτηση 25.

Ένα σώμα μάζας m είναι δεμένο και ισορροπεί στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k_1 του οποίου το πάνω άκρο είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Απομακρύνουμε το σώμα κατακόρυφα προς τα πάνω μέχρι τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου και το αφήνουμε ελεύθερο να κάνει ταλάντωση. Επαναλαμβάνουμε το ίδιο πείραμα με ένα άλλο ελατήριο σταθεράς $k_2 = 4k_1$. Οι γραφικές παραστάσεις των κινητικών ενεργειών των δύο ταλαντώσεων σε συνάρτηση με την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας, φαίνονται στο διάγραμμα του σχήματος



α. (I)

β. (II)

γ. (III)

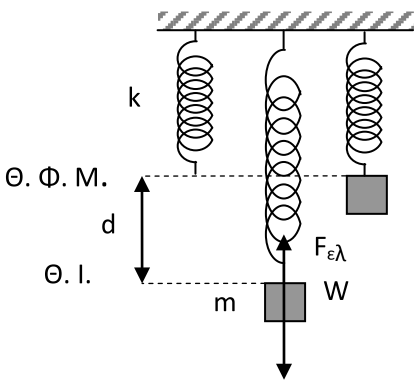
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Τα διαγράμματα διαφοροποιούνται στα πλάτη ταλάντωσης και στις ενέργειες ταλάντωσης.

Το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι ίσο με την απόσταση της θέσης φυσικού μήκους του ελατηρίου και της θέσης ισορροπίας της ταλάντωσης, δηλαδή A=d. Η συνθήκη ισορροπίας δίνει:



$$\Sigma F = 0 \Rightarrow W = F_{ελ} \Rightarrow m \cdot g = k \cdot d \Rightarrow d = \frac{m \cdot g}{k}.$$

Άρα $A_1 = d_1 = \frac{m \cdot g}{k_1}$ και

$$A_2 = d_2 = \frac{m \cdot g}{k_2} = \frac{m \cdot g}{4k_1} \Rightarrow A_2 = \frac{A_1}{4}.$$

Η σχέση αυτή ικανοποιείται στα διαγράμματα (Ι) και (ΙΙ).

Η ενέργεια της ταλάντωσης στις δύο περιπτώσεις είναι:

$$E_1 = \frac{1}{2}k_1 \cdot d_1^{\,2} = \frac{1}{2}k_1 \cdot \left(\frac{m \cdot g}{k_1}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2 \cdot g^2}{k_1} \text{ και}$$

$$E_2 = \frac{1}{2}k_2 \cdot d_2^{\,2} = \frac{1}{2}k_2 \cdot \left(\frac{m \cdot g}{k_2}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2 \cdot g^2}{k_2} = \frac{1}{2}\frac{m^2 \cdot g^2}{4k_1} \Rightarrow E_2 = \frac{E_1}{4}\,.$$

Άρα σωστό είναι το διάγραμμα (Ι).

Ερώτηση 27.

Ένα σώμα μάζας m είναι προσδεμένο σε ελατήριο σταθεράς k και εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση. Η συχνότητα του διεγέρτη είναι $f = f_0$, όπου f_0 η ιδιοσυχνότητα του συστήματος. Αντικαθιστούμε τη μάζα m του σώματος με άλλη εννιαπλάσια και διατηρούμε τη συχνότητα του διεγέρτη σταθερή. Η παραπάνω μεταβολή προκαλεί

α. τριπλασιασμό της ιδιοσυχνότητας και αύξηση του πλάτους ταλάντωσης του συστήματος.

β. υποτριπλασιασμό της ιδιοσυχνότητας και μείωση του πλάτους ταλάντωσης του συστήματος.

γ. μόνο μείωση του πλάτους της ταλάντωσης του συστήματος.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

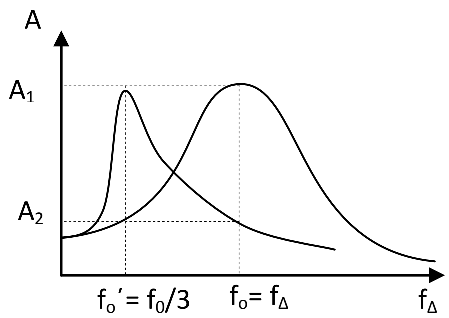
Σωστή απάντηση είναι η (β).

Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος δίνεται από τη σχέση $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{D}{k}}$.

Αν αντικαταστήσουμε τη μάζα m του σώματος με άλλη εννιαπλάσια, m΄=9m, η νέα ιδιοσυχνότητα θα είναι

$$f_0' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m'}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{9m}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{ή} \quad f_0' = \frac{1}{3}f_0$$

Εφόσον αρχικά η συχνότητα του διεγέρτη ήταν ίση με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος είχαμε το φαινόμενο του συντονισμού και το πλάτος ήταν μέγιστο, A_1. Με την αλλαγή της ιδιοσυχνότητας παύει η συχνότητα του διεγέρτη να ισούται με τη νέα ιδιοσυχνότητα, με συνέπεια να παύει το φαινόμενο του συντονισμού, οπότε το πλάτος ταλάντωσης ελαττώνεται και γίνεται $A_2 < A_1$, όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



Ερώτηση 28.

Ένα σώμα εκτελεί ταλάντωση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων που γίνονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, στην ίδια διεύθυνση, με το ίδιο πλάτος και συχνότητες f_1,f_2 που διαφέρουν λίγο ($f_1<f_2$), ώστε να δημιουργείται διακρότημα. Η μία αρμονική ταλάντωση έχει συχνότητα f_1=98 Hz και η περίοδος του διακροτήματος είναι 0,25 sec. Μέσα σε χρονικό διάστημα ίσο με την περίοδο του διακροτήματος το σώμα εκτελεί

α. 25 ταλαντώσεις.

β. 50 ταλαντώσεις.

γ. 125 ταλαντώσεις.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Η περίοδος του διακροτήματος είναι

$$T_\Delta = \frac{1}{f_2 - f_1} \Rightarrow 0,25\text{s} = \frac{1}{f_2 - 98\text{Hz}} \Rightarrow f_2 = 102\text{Hz}.$$

Η περίοδος της ταλάντωσης είναι $T_{\tau\alpha\lambda} = \frac{1}{f_{\tau\alpha\lambda}} = \frac{1}{\frac{f_1 + f_2}{2}} = \frac{2}{200} = 0,01\sec$

Άρα σε χρόνο ίσο με την περίοδο του διακροτήματος το σώμα εκτελεί

$$N = \frac{T_\Delta}{T_{\tau\alpha\lambda}} = \frac{0,25\text{s}}{0,01\text{s}} = 25 \text{ ταλαντώσεις.}$$

Ερώτηση 30.

Ένα ιδανικό κατακόρυφο ελατήριο είναι στερεωμένο με το κάτω άκρο του σε οριζόντιο δάπεδο, ενώ στο πάνω άκρο του υπάρχει στερεωμένο σώμα μάζας m_1. Συσπειρώνουμε επιπλέον το ελατήριο απομακρύνοντας το σώμα από τη θέση ισορροπίας του κατά d και το αφήνουμε ελεύθερο, οπότε αυτό εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση έχοντας ενέργεια ταλάντωσης E_1 και συχνότητα f_1.
Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε την ίδια ακριβώς διαδικασία αντικαθιστώντας μόνο το σώμα με ένα άλλο τετραπλάσιας μάζας ($m_2 = 4m_1$). Η νέα ενέργεια ταλάντωσης E_2 και η νέα συχνότητα f_2 είναι αντίστοιχα
α. $E_2 = E_1$ και $f_2 = f_1$.
β. $E_2 = 2E_1$ και $f_2 = f_1$.
γ. $E_2 = E_1$ και $f_2 = f_1/2$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

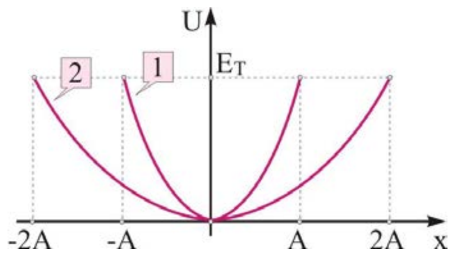
$E = U_{max} = \frac{1}{2}k \cdot A^2$, όμως και στις δύο περιπτώσεις $A = d$. Άρα $E_2 = E_1$.

Για τις συχνότητες f ισχύει:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1}} \text{ και } f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{4m_1}}, \text{ άρα } f_2 = \frac{f_1}{2}.$$

Ερώτηση 32.

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τα διαγράμματα της δυναμικής ενέργειας σε συνάρτηση με την απομάκρυνση, U = f(x), για δύο συστήματα μάζας – ελατηρίου που εκτελούν α.α.τ . Αν γνωρίζουμε ότι οι μάζες συνδέονται με τη σχέση $m_1 = m_2$, ο λόγος των περιόδων ταλάντωσης $\frac{T_1}{T_2}$ είναι ίσος με



α. 2.

β. 1/2.

γ. 1/4.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Ο λόγος το περιόδων είναι ίσος με:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}}} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$$

Από το σχήμα προκύπτει πως $U_{max,1} = U_{max,2}$ και $A_2 = 2A_1 = 2A$.

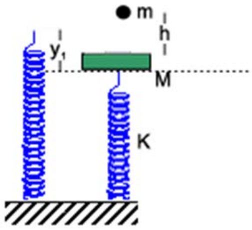
$$U_{max,1} = U_{max,2} \Rightarrow \frac{1}{2}k_1A^2 = \frac{1}{2}k_2(2A)^2 \Rightarrow k_1 = 4k_2 .$$

Με αντικατάσταση στην αρχική σχέση παίρνουμε:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m}{4k_2}}}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{2}$$

Πρόβλημα 2.

Στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 400\,N/m$ είναι συνδεδεμένος δίσκος μάζας $M = 3kg$ που ισορροπεί. Το κάτω άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε δάπεδο. Από ύψος $h = 0{,}8m$ πάνω από το δίσκο αφήνεται να πέσει ελεύθερα μια σφαίρα μάζας $m = 1kg$, η οποία συγκρούεται πλαστικά με το δίσκο.



α) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

β) Να υπολογίσετε το % ποσοστό της κινητικής ενέργειας της σφαίρας, που έγινε θερμότητα στη διάρκεια της κρούσης.

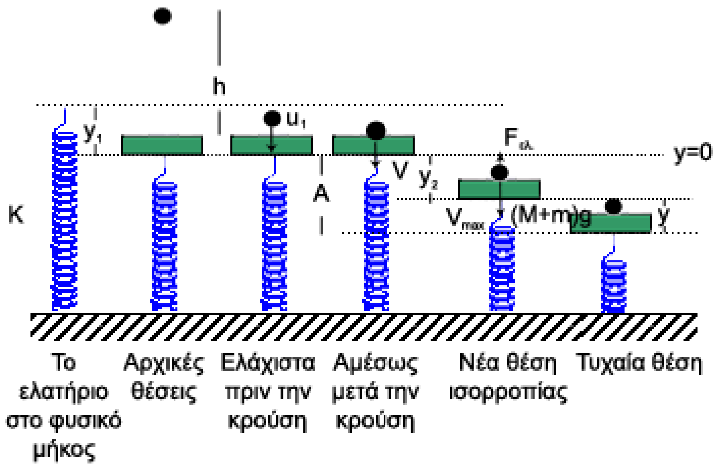
γ) Να αποδείξετε ότι το συσσωμάτωμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να βρείτε την περίοδο ταλάντωσής του.

δ) Να υπολογίσετε το πλάτος ταλάντωσής του.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\dfrac{m}{s^2}$ και $\sqrt{17} = 4{,}12$.

<u>Λύση</u>

α)



Η σφαίρα εκτελεί ελεύθερη πτώση και η μηχανική της ενέργεια διατηρείται. Γράφουμε τη διατήρηση της Μηχανικής ενέργειας μεταξύ της θέσης ελευθέρωσης και της θέσης ελάχιστα πριν την κρούση με το δίσκο.

Συνεπώς:

$$E_{\mu\eta\chi,\alpha\rho\chi} = E_{\mu\eta\chi,\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \frac{m\upsilon^2}{2} = m \cdot g \cdot h \Rightarrow \upsilon = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot 0,8m} \Rightarrow \upsilon = 4\frac{m}{s}.$$

Για την κρούση ισχύει η διατήρηση της ορμής. Γράφουμε τη διατήρηση της ορμής μεταξύ των θέσεων ελάχιστα πριν και αμέσως μετά την κρούση.

$$p_{\pi\rho\iota\nu} = p_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow m\upsilon_1 = (M+m)V \Rightarrow V = \frac{m\upsilon_1}{M+m} = \frac{1kg \cdot 4\frac{m}{s}}{3kg + 1kg} \Rightarrow V = 1\frac{m}{s}$$

β) Η ενέργεια που χάθηκε από το σύστημα στη διάρκεια της κρούσης και μεταφέρθηκε στο περιβάλλον, υπό μορφή θερμότητας, είναι ίση με τη μείωση της κινητικής ενέργειας:

$$Q = K_{\alpha\rho\chi} - K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{(M+m)V^2}{2} \Rightarrow Q = \frac{1kg \cdot (4m/s)^2}{2} - \frac{(3kg + 1kg) \cdot (1m/s)^2}{2} \Rightarrow$$

$$Q = 8J - 2J \Rightarrow Q = 6J$$

συνεπώς το % ποσοστό θα είναι:

$$a\% = \frac{Q}{K_{\alpha\rho\chi}}100\% \Rightarrow a\% = \frac{6J}{8J}100\% \Rightarrow a\% = 75\%$$

όπου $K_{\alpha\rho\chi}$ η κινητική ενέργεια πριν την κρούση.

γ) Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα θα ξεκινήσει να ταλαντώνεται γύρω από μια νέα θέση ισορροπίας που θα είναι χαμηλότερα κατά y_2 από την αρχική θέση. Παίρνουμε μια τυχαία θέση, που απέχει y από τη θέση ισορροπίας, σημειώνουμε τις δυνάμεις και βρίσκουμε τη συνισταμένη δύναμη.

$$\Sigma\vec{F} = \vec{w} + \vec{F}_{\varepsilon\lambda}$$

Ορίζοντας φορά θετική προς τα κάτω παίρνουμε:

$$\Sigma F = (M+m)g - k(y_1 + y_2 + y) \quad (1)$$

Γράφοντας τη συνθήκη ισορροπίας για τη νέα θέση ισορροπίας παίρνουμε:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{w} + \vec{F}_{\varepsilon\lambda} = 0 \Rightarrow (M+m)g - k(y_1 + y_2) = 0 \Rightarrow (M+m)g = k(y_1 + y_2) \quad (2)$$

Από το συνδυασμό της σχέσης (1) με τη σχέση (2) προκύπτει:

$\Sigma F = -ky$

Το μείον δηλώνει ότι η συνισταμένη δύναμη έχει τέτοια φορά ώστε να τείνει να επαναφέρει το σώμα στη θέση ισορροπίας του, δηλαδή στη συγκεκριμένη περίπτωση προς τα πάνω.

Συνεπώς το σώμα θα κάνει Απλή Αρμονική Ταλάντωση, με σταθερά ταλάντωσης $D = k$.

Η περίοδος ταλάντωσης θα είναι

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{3kg+1kg}{400N/m}} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5}s$$

δ) Το πλάτος ταλάντωσης θα το βρούμε εφαρμόζοντας την διατήρηση της ενέργειας στις ταλαντώσεις. Η μέγιστη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης θα είναι ίση με το άθροισμα της κινητικής και δυναμικής ενέργειας που έχει αμέσως μετά την κρούση. Επισημαίνεται ότι αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα βρίσκεται υψηλότερα κατά y_2 από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η απομάκρυνση y_2 βρίσκεται από το συνδυασμό των σχέσεων που ισχύουν για τις δύο θέσεις ισορροπίας.

Για την αρχική θέση ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{w} + \vec{F}_{\varepsilon\lambda} = 0 \Rightarrow Mg - ky_1 = 0 \quad \Rightarrow Mg = ky_1 \ (3)$$

Για τη νέα θέση ισορροπίας ισχύει η σχέση (2). Από το συνδυασμό των σχέσεων (2) και (3) παίρνουμε:

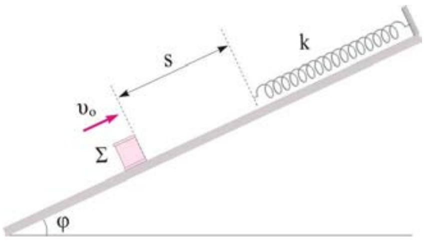
$$mg = ky_2 \Rightarrow y_2 = \frac{mg}{k} = \frac{1kg \cdot 10m/s^2}{400N/m} \Rightarrow y_2 = \frac{1}{40}m$$

Έτσι η διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση γράφεται:

$$\frac{kA^2}{2} = \frac{ky_2{}^2}{2} + \frac{(M+m)V^2}{2} \Rightarrow A = \sqrt{y_2{}^2 + \frac{M+m}{K}V^2} = \sqrt{(\frac{1}{40}m)^2 + \frac{3kg+1kg}{400N/m}\cdot(1m/s)^2} \Rightarrow$$

$$A = \frac{\sqrt{17}}{40}m = 10,3cm$$

Πρόβλημα 13.



Η μια άκρη ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=100N/m είναι στερεωμένη στο πάνω μέρος του πλάγιου επιπέδου γωνίας $\varphi=30^o$, όπως στο σχήμα. Από ένα σημείο του πλάγιου επιπέδου που απέχει s=0,25m από το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου, εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα υ_o=2m/s, κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου προς τα πάνω ένα σώμα Σ μάζας m=2kg. Όταν το σώμα ακουμπήσει στο ελατήριο, ενώνεται με αυτό και αρχίζει να εκτελεί αρμονική ταλάντωση.

α) Να βρείτε την ταχύτητα του σώματος τη στιγμή που έρχεται σε επαφή με το ελατήριο.

β) Να βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος.

γ) Να γράψετε τη συνάρτηση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης σε σχέση με το χρόνο, θεωρώντας t=0 τη στιγμή της ένωσης του σώματος με το ελατήριο και τα θετικά προς τα πάνω.

δ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής κινητικής ενέργειας του σώματος τη στιγμή που διέρχεται από το σημείο εκτόξευσης για δεύτερη φορά.

Δίνεται $g=10m/s^2$

Λύση

α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου-ενέργειας για το σώμα Σ από τη θέση (Α) μέχρι τη θέση (Β) λίγο πριν έρθει σε επαφή με το ελατήριο.

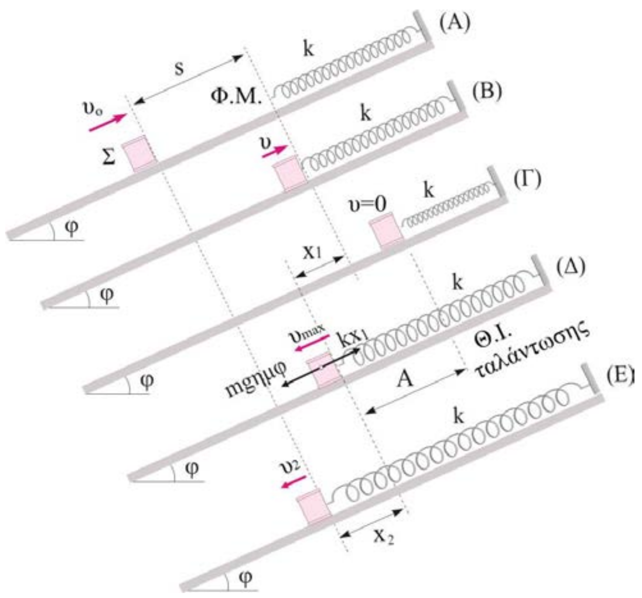
$K_{(B)} - K_{(A)} = W_{ολ}$ ή

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 = -mg\cdot ημφ\cdot s \Rightarrow$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_o^2 - 2g\cdot ημφ\cdot s} =$$

$$\sqrt{(2m/s)^2 - 2\cdot 10m/s^2\cdot\frac{1}{2}\cdot 0,25m}$$

$$\Rightarrow \upsilon = \sqrt{1,5}\,\frac{m}{s}$$



β) Για να βρούμε τη μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης, θα εφαρμόσουμε την διατήρηση της ενέργειας στην ταλάντωση μεταξύ των θέσεων (Β), όπου το σώμα έρχεται σε επαφή με το ελατήριο με ταχύτητα μέτρου υ και στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης (Δ) όπου το σώμα έχει μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης.

Στη Θ.Ι. ασκούνται στο σώμα οι δυνάμεις mgημφ και η δύναμη του ελατηρίου (kx_1) οι οποίες είναι αντίθετες και δίνουν ΣF=0. Επομένως

$$\Sigma F = 0 \quad \acute{\eta} \quad k \cdot x_1 - mg \cdot \eta\mu\varphi = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{mg \cdot \eta\mu\varphi}{k} = \frac{2kg \cdot 10m/s^2 \cdot 1/2}{100N/m} \Rightarrow x_1 = 0{,}1m$$

Εφαρμόζουμε την $ΑΔΕ_T$ στις θέσεις (Β) και (Δ).

$$K + U = K_{max} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2 \Rightarrow$$

$$\upsilon_{max} = \sqrt{\upsilon^2 + \frac{kx_1^2}{m}} = \sqrt{\left(\sqrt{1{,}5m/s}\right)^2 + \frac{100N/m \cdot (0{,}1m)^2}{2kg}} \Rightarrow \upsilon_{max} = \sqrt{2}\,\frac{m}{s}$$

γ) Η εξίσωση της απομάκρυνσης με το χρόνο είναι: $x = A \cdot \eta\mu\left(\omega t + \varphi_o\right)$, **(1)**

με $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{50}\,\frac{rad}{s}$

Το πλάτος της ταλάντωσης είναι $\upsilon_{max} = \omega \cdot A \Rightarrow A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{50}} = 0{,}2m$

Τη χρονική στιγμή t=0 το σώμα βρίσκεται στη θέση (Β) , δηλαδή σε απομάκρυνση $x_1 = +0{,}1m$ και έχει θετική ταχύτητα, επομένως η αρχική φάση της ταλάντωσης θα βρίσκεται στο 1° τεταρτημόριο του τριγωνομετρικού κύκλου.

$$x_1 = A \cdot \eta\mu\varphi_o \Rightarrow 0{,}1 = 0{,}2 \cdot \eta\mu\varphi_o \Rightarrow \varphi_o = \frac{\pi}{6} \quad \acute{\eta} \quad \varphi_o = \frac{5\pi}{6}$$

Επειδή την t=0 η ταχύτητα του σώματος είναι θετική, έχουμε $\varphi_o = \pi/6$.

Η **(1)** γίνεται: $x = 0{,}2 \cdot \eta\mu\left(\sqrt{50}t + \frac{\pi}{6}\right)$, S.I.

δ) Όταν το ταλαντούμενο σώμα περνά για δεύτερη φορά από το σημείο εκτόξευσης απέχει $s - x_1 = 0{,}15m$ από τη Θ.Ι. της ταλάντωσης και βρίσκεται σε απομάκρυνση $x_2 = -0{,}15m$. Το σώμα κατεβαίνει και έχει αρνητική ταχύτητα μέτρου υ_2. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας στη θέση αυτή είναι

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -k \cdot x_2 \cdot \upsilon_2 \text{, } \textbf{(2)}$$

Η ταχύτητα υ_2 θα υπολογιστεί από την διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση.

$$K + U = K_{max} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_2^{\ 2} + \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{k(A^2 - x_2^2)}{m}} = \sqrt{\frac{100N/m(0,2^2 m^2 - 0,15^2 m^2)}{2kg}} \Rightarrow \upsilon_2 = -\frac{\sqrt{14}}{4}\frac{m}{s}$$

Αντικαθιστώντας στην **(2)** παίρνουμε:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon_2 = -(100N/m) \cdot (-0,15m) \cdot \left(-\frac{\sqrt{14}}{4}m/s\right)\upsilon_2 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -3,75\sqrt{14}\,\frac{J}{s}$$