ΘΕΜΑ Α

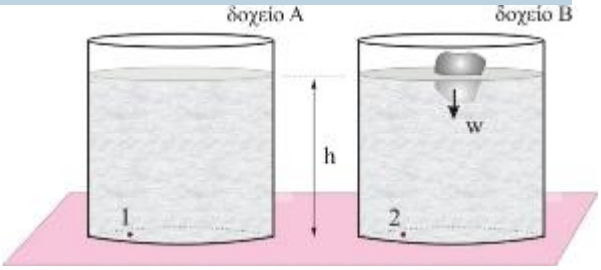
Στο study4exams.gr/physics επιλέγουμε επαναληπτικά θέματα. Υπάρχουν έξι ομάδες ερωτήσεων

Επιλέγουμε στην τύχη 3 (αν έχουμε χρόνο δεν βλάπτει να τα επιλέξουμε όλα).

ΘΕΜΑ Β

- **ΕΡΩΤΗΣΗ 1**

Τα δύο δοχεία Α και Β του σχήματος περιέχουν το ίδιο υγρό και στο δοχείο Β επιπλέει ένα σώμα βάρους w. Η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού βρίσκεται στο ίδιο ύψος h και στα δύο δοχεία. Για τις ολικές πιέσεις στα σημεία 1 και 2 των πυθμένων των δύο δοχείων έχουμε

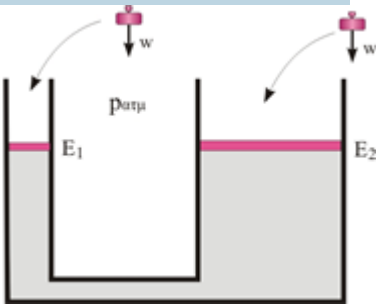


α. $p_1 = p_2$, β. $p_1 > p_2$, γ. $p_1 < p_2$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

- **ΕΡΩΤΗΣΗ 2**

Στον υδραυλικό ανυψωτήρα του σχήματος τα αβαρή έμβολα E_1 , E_2 βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο σε ισορροπία και μπορούν να μετακινούνται στους κατακόρυφους σωλήνες χωρίς τριβές. Τοποθετούμε ταυτόχρονα πάνω στα έμβολα δύο σώματα ίδιου βάρους.



α. Τα έμβολα δεν θα κινηθούν.

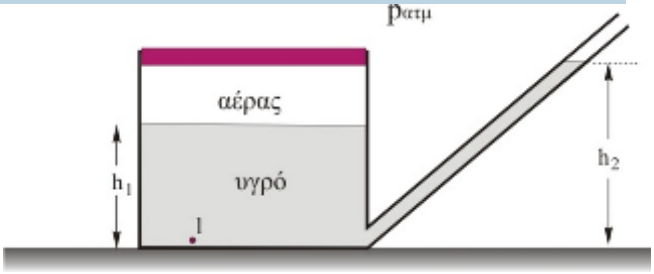
β. Το έμβολο E_1 θα κινηθεί προς τα κάτω και το E_2 προς τα πάνω.

γ. Το έμβολο E_1 θα κινηθεί προς τα πάνω και το E_2 προς τα κάτω.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

- **ΕΡΩΤΗΣΗ 3**

Το κλειστό δοχείο του σχήματος περιέχει υγρό πυκνότητας ρ και πάνω από την ελεύθερη επιφάνειά του υπάρχει αέρας. Η στάθμη του υγρού στο κλειστό δοχείο βρίσκεται σε ύψος h_1 από τον πυθμένα του. Ο πυθμένας του δοχείου συγκοινωνεί με πλάγιο σωλήνα ανοικτό στην ατμόσφαιρα. Η στάθμη του νερού στον πλάγιο σωλήνα βρίσκεται σε ύψος h_2 πάνω από τον πυθμένα του δοχείου. Η πίεση $p_{\alpha\varepsilon\rho}$ που επικρατεί στο αέρα του δοχείου είναι

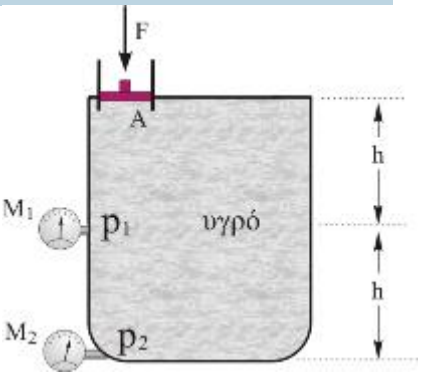


α. $p_{\alpha\varepsilon\rho} = \rho g h_1$, β. $p_{\alpha\varepsilon\rho} = p_{\alpha\tau\mu} + \rho g h_1$, γ. $p_{\alpha\varepsilon\rho} = p_{\alpha\tau\mu} + \rho g\left(h_2 - h_1\right)$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

- **ΕΡΩΤΗΣΗ 4**

Το κλειστό δοχείο του σχήματος ύψους $2h$ περιέχει υγρό πυκνότητας ρ και στο αβαρές έμβολο εμβαδού A εφαρμόζεται εξωτερική δύναμη μέτρου F. Το δοχείο βρίσκεται σε συνθήκες κενού. Το μανόμετρο M_1 είναι προσαρμοσμένο σε σημείο του πλευρικού τοιχώματος που απέχει h από τον πυθμένα και το μανόμετρο M_2 είναι προσαρμοσμένο στον πυθμένα του δοχείου. Για τις ενδείξεις p_1, p_2 των δύο μανομέτρων ισχύει

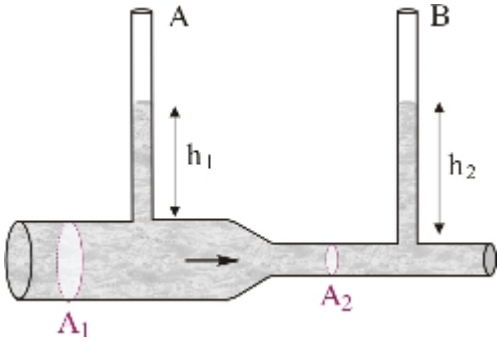


α. $p_2 = 2p_1$, β. $p_2 = p_1 + \dfrac{F}{A}$, γ. $p_2 = 2p_1 - \dfrac{F}{A}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

- **ΕΡΩΤΗΣΗ 5**

Ο οριζόντιος αγωγός του σχήματος με διατομή επιφάνειας A_1 σχηματίζει στένωση με διατομή επιφάνειας A_2. Οι κατακόρυφοι λεπτοί σωλήνες Α και Β συνδέονται στον κύριο αγωγό και στο στένωμα και είναι ανοικτοί στο πάνω μέρος τους. Το νερό ρέει στον αγωγό από τα αριστερά προς τα δεξιά. Για τα ύψη h_1 και h_2 του νερού στους κατακόρυφους σωλήνες ισχύει



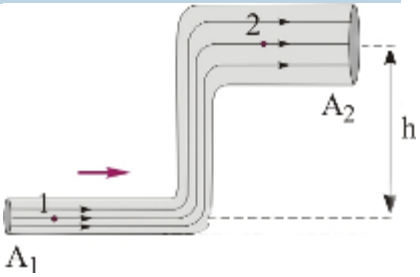
α. $h_1 = h_2$, β. $h_1 > h_2$, γ. $h_1 < h_2$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

.

- **ΕΡΩΤΗΣΗ 6**

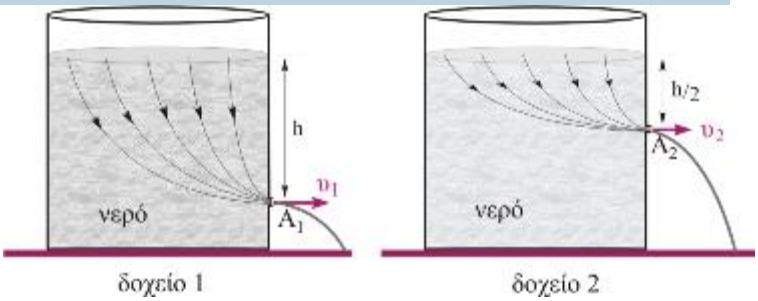
Ο σωλήνας του σχήματος αποτελείται από δύο οριζόντια τμήματα και ένα κατακόρυφο. Το κάτω οριζόντιο τμήμα έχει εμβαδόν κάθετης διατομής A_1 και το πάνω τμήμα $A_2=2A_1$. Τα δύο οριζόντια τμήματα απέχουν μεταξύ τους κατακόρυφα κατά h. Ένα ιδανικό υγρό ρέει από τα αριστερά προς τα δεξιά. Η ταχύτητα του υγρού στο κάτω τμήμα είναι υ_1, ενώ οι πιέσεις στο κάτω και πάνω τμήμα είναι ίδιες. Η υψομετρική διαφορά h ανάμεσα στα δύο οριζόντια τμήματα του σωλήνα και η ταχύτητα υ_1συνδέονται με τη σχέση



α. $h = \dfrac{3\upsilon_1^2}{8g}$, β. $h = \dfrac{\upsilon_1^2}{2g}$, γ. $h = \dfrac{3\upsilon_1^2}{2g}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

▪ ΕΡΩΤΗΣΗ 7

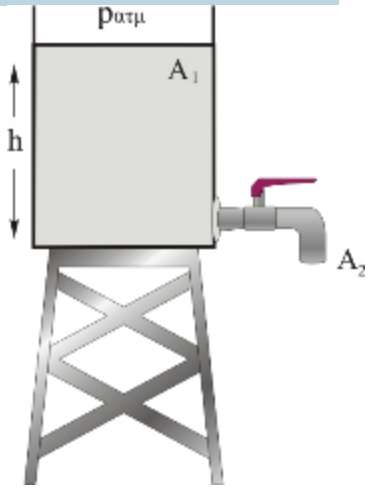


Το κυλινδρικό δοχείο 1 του σχήματος έχει μεγάλο εμβαδόν βάσης και περιέχει ιδανικό υγρό. Στο πλευρικό τοίχωμα και σε βάθος h υπάρχει οπή εμβαδού διατομής A_1 από την οποία εξέρχεται το υγρό με ταχύτητα μέτρου υ_1. Σε ένα ίδιο δοχείο 2 υπάρχει το ίδιο υγρό και σε βάθος h/2 υπάρχει οπή εμβαδού διατομής A_2 από την οποία εξέρχεται το υγρό με ταχύτητα μέτρου υ_2. Αν οι παροχές των οπών είναι ίσες, ο λόγος των εμβαδών $\frac{A_1}{A_2}$ είναι

α. $\frac{1}{\sqrt{2}}$, β. $\frac{1}{2}$, γ. $\sqrt{2}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

▪ ΕΡΩΤΗΣΗ 8

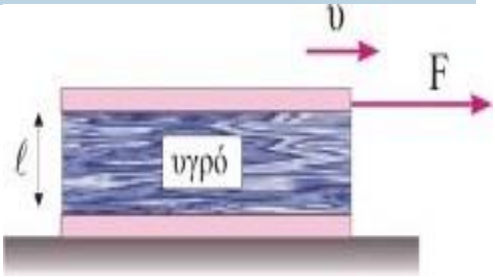


Το δοχείο του σχήματος με εμβαδόν βάσης A_1 περιέχει νερό ύψους h. Στο πλευρικό τοίχωμα και κοντά στον πυθμένα υπάρχει βρύση με οπή εμβαδού διατομής A_2. Η σχέση ανάμεσα στα εμβαδά των διατομών είναι $A_1=5A_2$ και επιτάχυνση της βαρύτητας στην περιοχή είναι g. Τη χρονική στιγμή t=0 που ανοίγουμε τη βρύση, το νερό εξέρχεται από αυτήν με ταχύτητα υ_2 της οποίας το μέτρο είναι

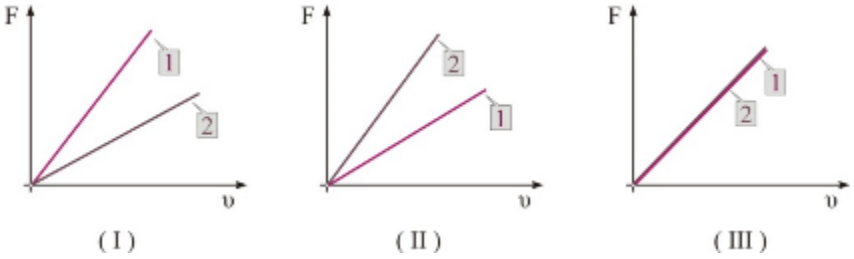
α. $\upsilon_2 = \sqrt{2gh}$, β. $\upsilon_2 = \sqrt{\frac{25}{12}gh}$, γ. $\upsilon_2 = \sqrt{2,4gh}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

▪ ΕΡΩΤΗΣΗ 9



Σε ένα πείραμα μέτρησης του ιξώδους, χρησιμοποιούμε δύο οριζόντιες γυάλινες πλάκες εμβαδού Α όπου ανάμεσά τους είναι τοποθετημένο ένα νευτώνειο υγρό (1) πάχους ℓ με συντελεστή ιξώδους n_1. Η κάτω πλάκα είναι ακλόνητη ενώ στην επάνω πλάκα ασκούμε οριζόντια δύναμη F με αποτέλεσμα μετά από λίγο αυτή να κινείται με σταθερή ταχύτητα υ. Επαναλαμβάνουμε το πείραμα αντικαθιστώντας το υγρό (1) με ένα υγρό (2) ίδιου πάχους με συντελεστή ιξώδους $n_2=2n_1$. Η εξάρτηση της δύναμης σε συνάρτηση με την ταχύτητα υ της πάνω πλάκας σε κοινό σύστημα αξόνων δίνεται από το διάγραμμα



α. (I).

β. (II).

γ. (III).

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

- **ΕΡΩΤΗΣΗ 10**

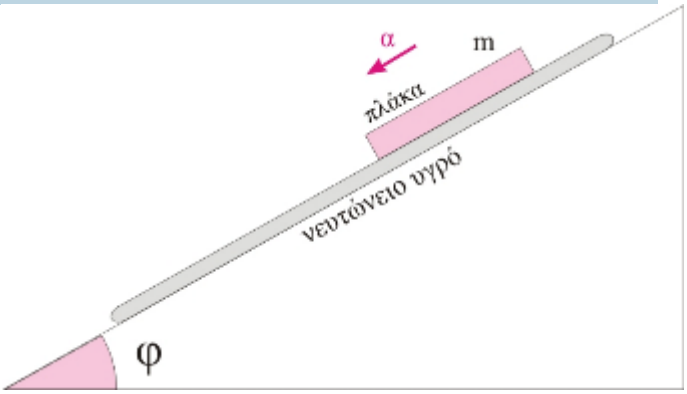
Δύο οριζόντιες γυάλινες πλάκες εμβαδού Α είναι τοποθετημένες σε οριζόντιο τραπέζι. Ανάμεσα στις πλάκες υπάρχει νευτώνειο υγρό πάχους ℓ με συντελεστή ιξώδους n. Η κάτω πλάκα είναι ακλόνητη ενώ στην επάνω πλάκα ασκούμε οριζόντια δύναμη F με αποτέλεσμα αυτή μετά από λίγο να κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου υ. Ο ρυθμός προσφοράς ενέργειας μέσω της δύναμης όταν η πλάκα κινείται με σταθερή ταχύτητα υ είναι P. Προκειμένου η πάνω πλάκα να κινείται με σταθερή ταχύτητα 2υ, θα πρέπει ο ρυθμός προσφοράς ενέργειας από τη νέα οριζόντια δύναμη που θα ασκήσουμε σε αυτήν να είναι

α. P, β. 2P, γ. 4P.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

- **ΕΡΩΤΗΣΗ 11**

Μια πλάκα εμβαδού Α και μάζας m αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα να κινηθεί πάνω στο πλάγιο επίπεδο του σχήματος γωνίας φ. Μεταξύ της πλάκας και του επιπέδου υπάρχει στρώμα νευτώνειου υγρού πάχους ℓ και συντελεστή ιξώδους n. Η πλάκα θα κινείται στο επίπεδο με επιτάχυνση της οποίας το μέτρο



α. παραμένει σταθερό.

β. από μια μέγιστη τιμή μειώνεται μέχρι μηδενισμού του.

γ. από μια μέγιστη τιμή μειώνεται μέχρι να αποκτήσει μια σταθερή τιμή διάφορη του μηδενός.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Ε1. Σωστή απάντηση είναι η (α), Ε2. Σωστή απάντηση είναι η (β), Ε3. Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Ε4. Σωστή απάντηση είναι η (γ), Ε5. Σωστή απάντηση είναι η (β), Ε6. Σωστή απάντηση είναι η (α).

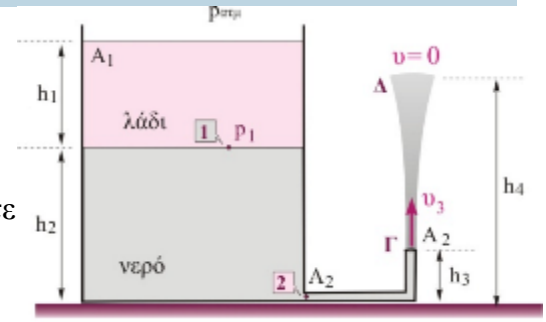
Ε7. Σωστή απάντηση είναι η (α), Ε8. Σωστή απάντηση είναι η (β), Ε9. Σωστή απάντηση είναι η (β).

Ε10. Σωστή απάντηση είναι η (γ), Ε11. Σωστή απάντηση είναι η (β).

ΘΕΜΑΤΑ Γ Και Δ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Το δοχείο μεγάλης επιφάνειας A_1, που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, είναι ανοικτό και γεμάτο με νερό σε σταθερό ύψος h_2=50 cm, ενώ πάνω από το νερό υπάρχει στρώμα λαδιού ύψους h_1=40 cm. Από τον πυθμένα του πλευρικού τοιχώματος του δοχείου εξέρχεται λεπτός σωλήνας σταθερής διατομής $A_2 = 1\ cm^2$. Ο σωλήνας αρχικά είναι οριζόντιος και στη συνέχεια κάμπτεται, ώστε να γίνει κατακόρυφος προς τα πάνω. Το άνοιγμα του σωλήνα βρίσκεται σε ύψος h_3 =20 cm πάνω από το επίπεδο του πυθμένα του δοχείου και από εκεί το νερό εκτοξεύεται με ταχύτητα υ_3 (βλέπε σχήμα). Η διατομή A_2 είναι πολύ μικρότερη από την επιφάνεια του δοχείου A_1.



Να υπολογίσετε

Α) την πίεση p_1 στο σημείο 1, στη διαχωριστική επιφάνεια λαδιού - νερού.

Β) την κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του νερού στο σημείο 2 του σωλήνα που βρίσκεται αμέσως μετά την έξοδο του νερού από το δοχείο.

Γ) την πίεση p_2 στο σημείο 2 του σωλήνα που βρίσκεται αμέσως μετά την έξοδο του νερού από το δοχείο.

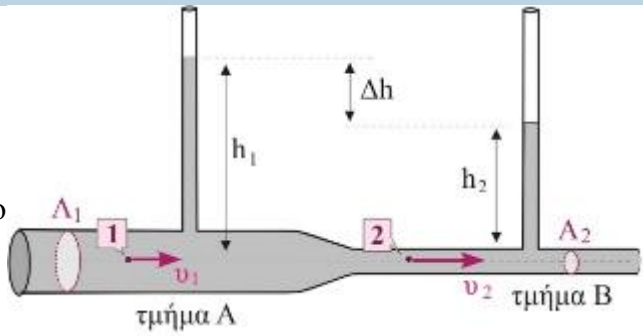
Δ) το ύψος h_4 που θα φτάσει το νερό, από τον πυθμένα του δοχείου.

Να θεωρήσετε το νερό και το λάδι ιδανικά ρευστά.

Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 m/s^2$, η πυκνότητα του νερού $\rho_\nu = 10^3\ kg/m^3$, η πυκνότητα του λαδιού $\rho_\lambda = 0,9 \cdot 10^3 kg/m^3$και η ατμοσφαιρική πίεση $p_{atm} = 10^5\ N/m^2$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Το ροόμετρο Venturi, που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, αποτελείται από έναν οριζόντιο κυλινδρικό σωλήνα μεταβλητής διατομής που διαρρέεται από νερό. Στα δύο μέρη του έχει διαφορετικές διατομές $A_1=4cm^2$ και $A_2=2cm^2$, αντίστοιχα. Οι δύο λεπτοί κατακόρυφοι σωλήνες είναι ανοικτοί. Όταν στο σημείο 1 η ταχύτητα του νερού είναι υ_1=2m/s, το νερό στον πρώτο κατακόρυφο σωλήνα βρίσκεται σε ύψος h_1=1,35m. Να υπολογίσετε:



Α) την ταχύτητα υ_2 του νερού στο δεύτερο κομμάτι του οριζόντιου σωλήνα (σημείο 2).

Β) την μεταβολή στην πίεση του νερού, καθώς αυτό μεταβαίνει από το πρώτο στο δεύτερο μέρος του οριζόντιου σωλήνα.

Γ) το ύψος h_2 του νερού στον δεύτερο κατακόρυφο σωλήνα.

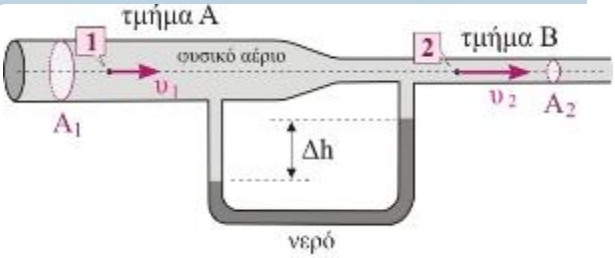
Δ) το ποσοστό μεταβολής στην αρχική παροχή του σωλήνα, προκειμένου να μηδενιστεί το ύψος του νερού στο δεύτερο κατακόρυφο σωλήνα, ενώ στον πρώτο να παραμείνει σε ύψος h_1=1,35m.

Να θεωρήσετε το νερό ιδανικό ρευστό.

Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 m/s^2$, η πυκνότητα του νερού $\rho_v = 10^3 kg/m^3$ και η ατμοσφαιρική πίεση $p_{atm} = 10^5 N/m^2$.

- **ΑΣΚΗΣΗ 3**

Στον οριζόντιο σωλήνα Venturi, μεταβλητής διατομής, ρέει φυσικό αέριο. Τα δύο μέρη του σωλήνα έχουν διατομές A_1 και A_2, αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Κάτω από τον οριζόντιο σωλήνα υπάρχει δεύτερος υοειδής λεπτός σωλήνας που περιέχει νερό. Μέσα από τον οριζόντιο σωλήνα μεταφέρονται 0,6kg αερίου το λεπτό. Όταν στο σημείο 1 η κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του αερίου είναι $4 J/m^3$, η υψομετρική διαφορά του νερού στους δύο κατακόρυφους σωλήνες είναι $\Delta h = 0,21 cm$.



Να υπολογίσετε:

Α) την ταχύτητα υ_1 του φυσικού αερίου στο πρώτο κομμάτι του οριζόντιου σωλήνα (σημείο 1).

Β) την μεταβολή στην πίεση του αερίου, καθώς αυτό μεταβαίνει από το πρώτο στο δεύτερο μέρος του οριζόντιου σωλήνα.

Γ) την ταχύτητα υ_2 του φυσικού αερίου στο δεύτερο κομμάτι του οριζόντιου σωλήνα (σημείο 2).

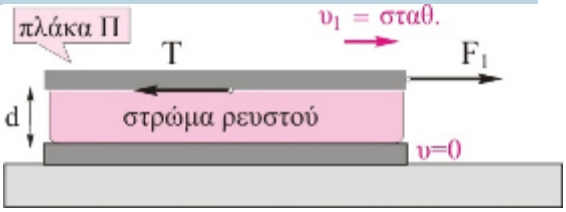
Δ) τις διατομές A_1 και A_2 στα δύο μέρη του οριζόντιου σωλήνα.

Να θεωρήσετε το φυσικό αέριο ιδανικό ρευστό.

Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 m/s^2$, η πυκνότητα του νερού $\rho_v = 10^3 kg/m^3$, η πυκνότητα του φυσικού αερίου $\rho_\alpha = 0,5 kg/m^3$και η ατμοσφαιρική πίεση $p_{atm} = 10^5 N/m^2$.

- **ΑΣΚΗΣΗ 4**

Μια λεπτή πλάκα Π μάζας m=0,1kg και εμβαδού $A = 100 cm^2$ τοποθετείται πάνω σε σταθερό οριζόντιο τραπέζι και ανάμεσά τους υπάρχει στρώμα νευτώνειου ρευστού, πάχους d=2mm, με συντελεστή ιξώδους $n = 0,4 N \cdot s/m^2$. Ασκούμε σταθερή οριζόντια δύναμη $F_1 = 4N$ και παρατηρούμε ότι η πλάκα μετά από μετατόπιση x=10cm αρχίζει να κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου υ_1.



Να υπολογίσετε:

Α) την ταχύτητα υ_1.

Β) την ισχύ P_1 της δύναμης F_1, όταν η πλάκα κινείται με σταθερή ταχύτητα υ_1.

Γ) την θερμική ενέργεια Q που απελευθερώθηκε λόγω τριβών, μέχρι την απόκτηση της ταχύτητας υ_1.

Ασκούμε αντί για τη δύναμη μέτρου F_1 μια άλλη δύναμη μέτρου F_2 και η πλάκα μετά από λίγο κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου υ_2. Αν η ισχύς της δύναμης αυξήθηκε κατά 300%.

Δ) να υπολογίσετε τη δύναμη F_2 και την σταθερή ταχύτητα υ_2.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 m/s^2$.

ΛΥΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ1

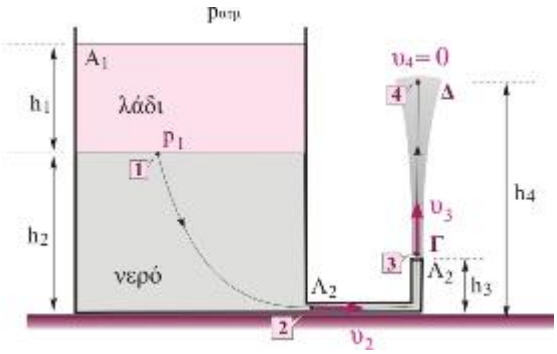
Α) Η πίεση p_1 στο σημείο 1, στη διαχωριστική επιφάνεια λαδιού - νερού, είναι το άθροισμα της ατμοσφαιρικής πίεσης και της υδροστατικής πίεσης από την υπερκείμενη ποσότητα του λαδιού

$$p_1 = p_{\alpha\tau\mu} + \rho_\lambda g h_1 = 10^5 \frac{N}{m^2} + 900 \frac{kg}{m^3} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 0,4m \Rightarrow p_1 = 103,6 \cdot 10^3 \frac{N}{m^2}.$$

Β) Η κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του νερού στο σημείο 2, στο οποίο το νερό εισέρχεται στο σωλήνα είναι

$$\frac{K}{\Delta V} = \frac{\frac{1}{2}\Delta m \cdot \upsilon_2{}^2}{\Delta V} = \frac{1}{2}\rho_\nu \cdot \upsilon_2{}^2 \quad \textbf{(1)}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση συνέχειας κατά μήκος του σωλήνα θα βρούμε τη σχέση μεταξύ των ταχυτήτων υ_2 και υ_3



$$\Pi_2 = \Pi_3 \Rightarrow A_2 \cdot \upsilon_2 = A_2 \cdot \upsilon_3 \Rightarrow \upsilon_2 = \upsilon_3$$

Άρα η σχέση **(1)** γίνεται:

$$\frac{K}{\Delta V} = \frac{\frac{1}{2}\Delta m \cdot \upsilon_3{}^2}{\Delta V} = \frac{1}{2}\rho_\nu \cdot \upsilon_3{}^2 \quad \textbf{(2)}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bernoulli για μια ρευματική γραμμή που διέρχεται από τα σημεία 1 και 3. Επειδή η διατομή A_2 είναι πολύ μικρότερη από την επιφάνεια του δοχείου A_1, θεωρούμε ότι η ταχύτητα υ_1 με την οποία κατεβαίνει η ελεύθερη επιφάνεια του νερού και του λαδιού είναι μηδενική, $\upsilon_1=0$. Η πίεση p_3, στο σημείο 3 είναι ίση με την ατμοσφαιρική, αφού το νερό εξέρχεται στον αέρα

$$p_3 = p_{\alpha\tau\mu} = 10^5 \frac{N}{m^2}, \text{ άρα}$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho_\nu \upsilon_1{}^2 + \rho_\nu g h_2 = p_3 + \frac{1}{2}\rho_\nu \upsilon_3{}^2 + \rho_\nu g h_3 \Rightarrow$$

$$p_{\alpha\tau\mu} + \rho_\lambda g h_1 + \rho_\nu g h_2 = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho_\nu \upsilon_3{}^2 + \rho_\nu g h_3 \Rightarrow$$

$$\rho_\lambda g h_1 + \rho_\nu g h_2 = \frac{1}{2}\rho_\nu \upsilon_3{}^2 + \rho_\nu g h_3 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\rho_\nu \upsilon_3{}^2 = \rho_\lambda g h_1 + \rho_\nu g (h_2 - h_3) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\rho_\nu \upsilon_3{}^2 = 900 \frac{kg}{m^3} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 0,4m + 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot (0,5m - 0,2m) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\rho_\nu {\upsilon_3}^2 = 6,6 \cdot 10^3 \frac{J}{m^3}$$

Άρα η σχέση **(2)** δίνει $\frac{K}{\Delta V} = 6,6 \cdot 10^3 \frac{J}{m^3}$.

Γ) Για την πίεση p_2 στο σημείο 2, στο οποίο το νερό εισέρχεται στο σωλήνα εφαρμόζουμε το θεώρημα Bernoulli για μια ρευματική γραμμή που διέρχεται από τα σημεία 1 και 2

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho_\nu {\upsilon_1}^2 + \rho_\nu g h_2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho_\nu {\upsilon_2}^2 \Rightarrow$$

$$p_1 + \rho_\nu g h_2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho_\nu {\upsilon_2}^2 \Rightarrow p_2 = p_1 + \rho_\nu g h_2 - \frac{1}{2}\rho_\nu {\upsilon_2}^2 \Rightarrow$$

$$p_2 = 103,6 \cdot 10^3 \frac{N}{m^2} + 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 0,5m - 6,6 \cdot 10^3 \frac{J}{m^3} \Rightarrow$$

$$p_2 = 1,02 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}.$$

Δ) Θα υπολογίσουμε το ανώτερο ύψος h_4,στο οποίο θα φτάσει το νερό από τον πυθμένα του δοχείου (υ_4=0),εφαρμόζοντας το θεώρημα Bernoulli για μια ρευματική γραμμή που διέρχεται από τα σημεία 1, 4.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho_\nu {\upsilon_1}^2 + \rho_\nu g h_2 = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho_\nu {\upsilon_4}^2 + \rho_\nu g h_4 \Rightarrow$$

$$p_1 + \rho_\nu g h_2 = p_{\alpha\tau\mu} + \rho_\nu g h_4 \Rightarrow h_4 = \frac{p_1 + \rho_\nu g h_2 - p_{\alpha\tau\mu}}{\rho_\nu g} \Rightarrow$$

$$h_4 = \frac{103,6 \cdot 10^3 \frac{N}{m^2} + 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 0,5m - 10^5 \frac{N}{m^2}}{10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 10 \frac{m}{s^2}} \Rightarrow$$

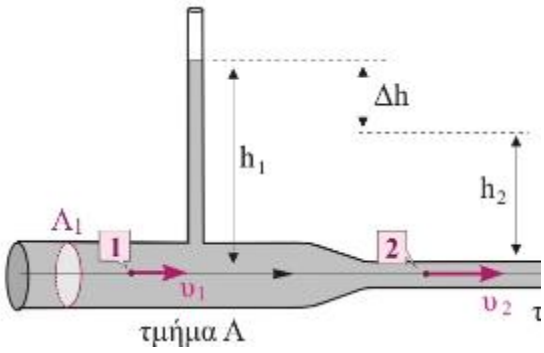
$$h_4 = 0,86m = 86cm.$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Α) Η παροχή του σωλήνα παραμένει σταθερή. Από την εξίσωση της συνέχειας θα υπολογίσουμε την ταχύτητα υ_2 του νερού στο δεύτερο κομμάτι του οριζόντιου σωλήνα (σημείο 2).

$$\Pi_A = \Pi_B \Rightarrow A_1 \cdot \upsilon_1 = A_2 \cdot \upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{A_1 \cdot \upsilon_1}{A_2} = \frac{4cm^2 \cdot 2m/s}{2cm^2} \Rightarrow \upsilon_2 = 4m/s.$$

Β) Αν η πίεση στο τμήμα Α είναι p_1 και στο τμήμα Β είναι p_2, το θεώρημα Bernoulli για μια οριζόντια ρευματική γραμμή που διέρχεται από τα σημεία 1 και 2, δίνει την μεταβολή στην πίεση του νερού, καθώς αυτό μεταβαίνει από το πρώτο στο δεύτερο μέρος του οριζόντιου σωλήνα.



$$p_1 + \frac{1}{2}\rho {\upsilon_1}^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho {\upsilon_2}^2 \Rightarrow p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho({\upsilon_1}^2 -$$

$$\Delta p = \frac{1}{2}10^3\frac{kg}{m^3}\left(\left(2\frac{m}{s}\right)^2 - \left(4\frac{m}{s}\right)^2\right) \Rightarrow \Delta p = -$$

.

Άρα, καθώς το νερό περνάει στον στενότερο σωλήνα, όπου η ταχύτητα μεγαλώνει, η πίεση μειώνεται.

Γ) Σύμφωνα με την υδροστατική, η πίεση p_2, στο τμήμα Β, ισούται με την πίεση στη βάση της στήλης νερού του λεπτού κατακόρυφου σωλήνα.

$$p_2 = p_{\alpha\tau\mu} + \rho\, g h_2$$.

Ομοίως για την πίεση p_1, στο σημείο 1.

$$p_1 = p_{\alpha\tau\mu} + \rho g h_1$$.

Άρα, για το ύψος h_2 του νερού στον δεύτερο κατακόρυφο σωλήνα έχουμε

$$\Delta p = p_2 - p_1 = p_{\alpha\tau\mu} + \rho g h_2 - (p_{\alpha\tau\mu} + \rho g h_1) \Rightarrow \Delta p = \rho g h_2 - \rho g h_1 \Rightarrow$$

$$h_2 = \frac{\Delta p + \rho g h_1}{\rho g} = \frac{\Delta p}{\rho g} + h_1 \Rightarrow h_2 = \frac{-6\cdot 10^3\frac{N}{m^2}}{10^3\frac{kg}{m^3}\cdot 10\frac{m}{s^2}} + 1,35m \Rightarrow \quad h_2 = 0,75m$$.

Δ) Αλλάζουμε την παροχή του νερού, ώστε να μηδενιστεί το ύψος του νερού στο δεύτερο κατακόρυφο σωλήνα και η πίεση p_2' να γίνει ίση με την ατμοσφαιρική.

$$p_2' = p_{\alpha\tau\mu} = 10^5\frac{N}{m^2}$$.

Έστω Π΄ η καινούρια παροχή του νερού και υ_1' και υ_2', οι νέες ταχύτητες του νερού στα δύο τμήματα του σωλήνα. Η εξίσωση συνέχειας δίνει

$$\Pi' = A_1\cdot \upsilon_1' = A_2\cdot \upsilon_2' \Rightarrow 4cm^2\cdot \upsilon_1' = 2cm^2\cdot \upsilon_2' \Rightarrow \upsilon_2' = 2\cdot \upsilon_1' \quad \textbf{(1)}$$

Από το θεώρημα Bernoulli για μια οριζόντια ρευματική γραμμή που διέρχεται από τα σημεία 1 και 2, έχουμε

$$p_1' + \frac{1}{2}\rho(\upsilon_1')^2 = p_2' + \frac{1}{2}\rho(\upsilon_2')^2 \Rightarrow$$

$$p_{\alpha\tau\mu} + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho(\upsilon_1{}')^2 = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho(\upsilon_2{}')^2 \Rightarrow$$

$$\rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho(\upsilon_1{}')^2 = \frac{1}{2}\rho(2\upsilon_1{}')^2 \Rightarrow g h_1 + \frac{1}{2}(\upsilon_1{}')^2 = \frac{1}{2}(2\upsilon_1{}')^2 \Rightarrow$$

$$\upsilon_1{}' = \sqrt{\frac{2gh_1}{3}} \Rightarrow \upsilon_1{}' = \sqrt{\frac{2 \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot 1,35m}{3}} \Rightarrow \upsilon_1{}' = 3\frac{m}{s}.$$

Αρχικά η παροχή Π του νερού ήταν

$$\Pi = A_1 \cdot \upsilon_1 = 4cm^2 \cdot 2\frac{m}{s} = 8 \cdot 10^{-4}\frac{m^3}{s}.$$

Η καινούρια παροχή Π΄ του νερού είναι

$$\Pi' = A_1 \cdot \upsilon_1{}' = 4cm^2 \cdot 3\frac{m}{s} = 12 \cdot 10^{-4}\frac{m^3}{s}.$$

Τελικά το ποσοστό μεταβολής της παροχής του νερού, προκειμένου να μηδενιστεί το ύψος του νερού στο δεύτερο κατακόρυφο σωλήνα, ενώ στον πρώτο να παραμείνει σε ύψος h_1=1,35 m είναι:

$$\frac{\Pi' - \Pi}{\Pi} \cdot 100\% = \frac{12 \cdot 10^{-4}\frac{m^3}{s} - 8 \cdot 10^{-4}\frac{m^3}{s}}{8 \cdot 10^{-4}\frac{m^3}{s}} \cdot 100\% = 50\%.$$

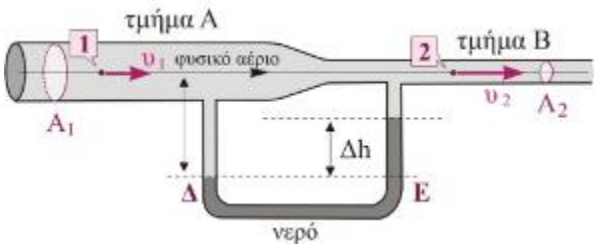
ΑΣΚΗΣΗ 3

Α) Στο πρώτο κομμάτι του σωλήνα, στο σημείο 1, η κινητική ενέργεια του φυσικού αερίου ανά μονάδα όγκου είναι $\frac{K}{\Delta V} = 4\frac{J}{m^3}$, άρα

$$\frac{K}{\Delta V} = \frac{\frac{1}{2}\Delta m \cdot \upsilon_1{}^2}{\Delta V} = \frac{1}{2}\rho_\alpha \upsilon_1{}^2 \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{2\,(K/\Delta V)}{\rho_\alpha}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4\frac{J}{m^3}}{0,5\frac{kg}{m^3}}} \Rightarrow$$

$$\upsilon_1 = 4\frac{m}{s}.$$

Β) Έστω ότι η πίεση στο τμήμα Α είναι p_1 και στο τμήμα Β είναι p_2. Τα σημεία Δ και Ε βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο ενός υγρού (του νερού) που ισορροπεί, άρα έχουν ίδιες συνολικές πιέσεις. Στο σημείο Δ η πίεση ισούται με την πίεση του αερίου p_1, ενώ στο σημείο Ε η πίεση ισούται με το άθροισμα της πίεσης του αερίου p_2 και της υδροστατικής πίεσης από την υπερκείμενη ποσότητα του νερού.



$$p_\Delta = p_E \Rightarrow p_1 = p_2 + \rho_\nu g \Delta h \Rightarrow p_2 - p_1 = -\rho_\nu g \Delta h \Rightarrow$$

$$\Delta p = -\rho_\nu g \Delta h = -10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 0,21 \cdot 10^{-2} m \Rightarrow \Delta p = -21 \frac{N}{m^2}.$$

Έτσι η μεταβολή στην πίεση του αερίου, καθώς αυτό μεταβαίνει από το πρώτο στο δεύτερο μέρος του οριζόντιου σωλήνα είναι αρνητική.

Γ) Το θεώρημα Bernoulli για μια οριζόντια ρευματική γραμμή που διέρχεται από τα σημεία 1 και 2, δίνει την ταχύτητα υ_2 του φυσικού αερίου στο δεύτερο κομμάτι του οριζόντιου σωλήνα

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho_\alpha \cdot \upsilon_1{}^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho_\alpha \cdot \upsilon_2{}^2 \Rightarrow p_2 - p_1 = \Delta p = \frac{1}{2}\rho_\alpha \cdot \upsilon_1{}^2 - \frac{1}{2}\rho_\alpha \cdot \upsilon_2{}^2 \Rightarrow$$

$$-21 \frac{N}{m^2} = \frac{1}{2} 0,5 \frac{kg}{m^3} \cdot \left(4 \frac{m}{s}\right)^2 - \frac{1}{2} 0,5 \frac{kg}{m^3} \cdot \upsilon_2{}^2 \Rightarrow \upsilon_2 = 10 \frac{m}{s}.$$

Δ) Μέσα από το σωλήνα μεταφέρονται 0,6kg αερίου το λεπτό. Ο όγκος του αερίου προκύπτει από τη σχέση της πυκνότητας

$$\rho_\alpha = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\rho_\alpha} \Rightarrow V = \frac{0,6kg}{0,5 \frac{kg}{m^3}} \Rightarrow V = 1,2m^3.$$

Η παροχή του αερίου στο σωλήνα είναι $\Pi = \frac{V}{t} = \frac{1,2m^3}{60s} \Rightarrow \Pi = 0,02 \frac{m^3}{s}$.

Η παροχή του αερίου είναι σταθερή και στο πρώτο τμήμα του σωλήνα είναι

$$\Pi = \Pi_1 = A_1 \cdot \upsilon_1 \Rightarrow A_1 = \frac{\Pi}{\upsilon_1} \Rightarrow A_1 = \frac{0,02 \frac{m^3}{s}}{4 \frac{m}{s}} = 5 \cdot 10^{-3} m^2 \Rightarrow A_1 = 50cm^2.$$

Η παροχή του αερίου στο δεύτερο τμήμα του σωλήνα είναι

$$\Pi = \Pi_2 = A_2 \cdot \upsilon_2 \Rightarrow A_2 = \frac{\Pi}{\upsilon_2} \Rightarrow A_2 = \frac{0,02 \frac{m^3}{s}}{10 \frac{m}{s}} = 2 \cdot 10^{-3} m^2 \Rightarrow A_2 = 20cm^2.$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Α) Εφόσον η πλάκα κινείται με σταθερή ταχύτητα η συνολική δύναμη που της ασκείται είναι ίση με μηδέν.

Στην πλάκα ασκείται η δύναμη F_1 και η τριβή Τ από το ρευστό, άρα

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_1 = T \Rightarrow F_1 = \frac{nAv_1}{d} \Rightarrow v_1 = \frac{F_1 d}{nA} \Rightarrow v_1 = \frac{(4N)\cdot\left(2\cdot 10^{-3}m\right)}{(0,4Ns/m^2)\cdot\left(100\cdot 10^{-4}m^2\right)} \Rightarrow$$

$$v_1 = 2\frac{m}{s}.$$

Β) Η ισχύς P_1 της δύναμης F_1, όταν η πλάκα κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ_1$ είναι

$$P_1 = \frac{\Delta W_{F_1}}{\Delta t} = \frac{F_1 \Delta x}{\Delta t} \Rightarrow P_1 = F_1 v_1 = 4N\cdot 2\frac{m}{s} \Rightarrow P_1 = 8W.$$

Γ) Η θερμική ενέργεια Q που απελευθερώθηκε λόγω τριβών, μέχρι την απόκτηση της ταχύτητας υ1, ισούται με το απόλυτο του έργου της τριβής $Q = |W_T|$.

Το έργο της τριβής θα το υπολογίσουμε εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας για την πλάκα.

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_T + W_{F_1} \Rightarrow \frac{1}{2}m{v_1}^2 - 0 = W_T + F_1\cdot x \Rightarrow$$

$$W_T = \frac{1}{2}m{v_1}^2 - F_1\cdot x \Rightarrow W_T = \frac{1}{2}0,1kg\cdot\left(2\frac{m}{s}\right)^2 - 4N\cdot 0,1m \Rightarrow$$

$$W_T = -0,2J.$$

Άρα η θερμική ενέργεια Q που απελευθερώθηκε λόγω τριβών είναι

$$Q = |W_T| = 0,2J.$$

Δ) Αν η ισχύς της δύναμης αυξηθεί κατά 300% η νέα ισχύς P_2 της δύναμης F_2, όταν η πλάκα κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ_2$ είναι

$$\frac{\Delta P}{P_1}100\% = 300\% \Rightarrow \frac{P_2 - P_1}{P_1} = 3 \Rightarrow P_2 = 4P_1 = 4\cdot 8W \Rightarrow P_2 = 32W.$$

Εφόσον η πλάκα κινείται με σταθερή ταχύτητα η συνολική δύναμη που της ασκείται είναι ίση με μηδέν.

Στη πλάκα ασκείται η δύναμη F_2 και η τριβή Τ¤ από το ρευστό, άρα

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_2 = T' \Rightarrow F_2 = \frac{nAv_2}{d} \quad \textbf{(1)}$$

Η ισχύς P_2 της δύναμης F_2, όταν η πλάκα κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ_2$, με χρήση και της σχέσης **(1)** είναι

$$P_2 = F_2 \cdot \upsilon_2 = \frac{nA{\upsilon_2}^2}{d} \Rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{\frac{P_2 d}{nA}} \Rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{\frac{(32W)\cdot\left(2\cdot 10^{-3}m\right)}{(0,4Ns/m^2)\cdot\left(100\cdot 10^{-4}m^2\right)}} \Rightarrow$$

$$\upsilon_2 = 4\frac{m}{s}$$

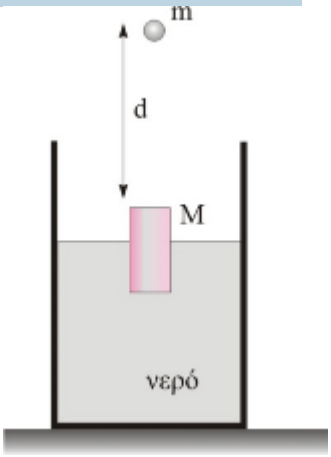
Από τη σχέση **(1)** βρίσκουμε τη δύναμη F_2

$$F_2 = \frac{nA\upsilon_2}{d} = \frac{(0,4Ns/m^2)\cdot\left(100\cdot 10^{-4}m^2\right)\cdot(4m/s)}{2\cdot 10^{-3}m} \Rightarrow F_2 = 8N$$

ΘΕΜΑ Δ

- **ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1**

Ομογενής κύλινδρος, μάζας M=0,1kg, έχει ύψος h=20cm, εμβαδό βάσης A =10cm^2 και ισορροπεί με τον άξονά του κατακόρυφο μέσα σε δοχείο με νερό, μεγάλης επιφάνειας, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Μια σημειακή μεταλλική σφαίρα, μάζας m=0,05kg, αφήνεται από απόσταση d=45cm πάνω από τον κύλινδρο και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά μ' αυτόν.



Να υπολογίσετε:

Α) τη δύναμη που δέχεται ο κύλινδρος από το νερό στη θέση ισορροπίας του εξαιτίας της υδροστατικής πίεσης και το βάθος στο οποίο βρίσκεται η βάση του.

Β) τη συνολική πίεση στην κάτω βάση του κυλίνδρου, στη θέση ισορροπίας του.

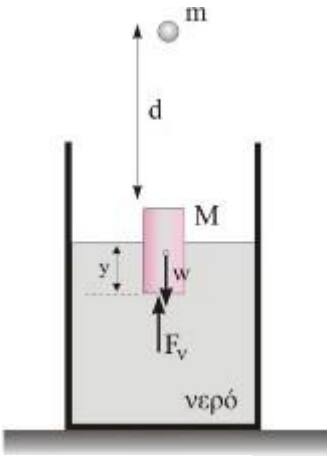
Γ) σε ποιο ύψος πάνω από τη στάθμη του νερού θα ανέλθει η σημειακή μεταλλική σφαίρα μετά την κρούση.

Δ) την ταχύτητα του κυλίνδρου τη στιγμή που εισέρχεται ολόκληρος στο νερό.

Θεωρείστε ότι δεν αλλάζει η στάθμη του νερού κατά την βύθιση του κυλίνδρου σ' αυτό και ότι η δύναμη αντίστασης που ασκείται από το νερό στον κύλινδρο, κατά την κίνησή του, είναι αμελητέα.

Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10m/s^2, η ατμοσφαιρική πίεση p_{atm}=10^{5}pa και η πυκνότητα του νερού ρ_v=1g/cm^3.

Λύση



Α) Στον κύλινδρο ασκούνται το βάρος του w και η κατακόρυφη προς τα πάνω δύναμη, F_v εξαιτίας της υδροστατικής πίεσης που ασκείται από το νερό στην κάτω βάση του κυλίνδρου. Η ατμοσφαιρική πίεση δεν επηρεάζει την ισορροπία του κυλίνδρου καθώς οι δυνάμεις που οφείλονται σε αυτήν αλληλοεξουδετερώνονται. Για την ισορροπία του κυλίνδρου έχουμε

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_\nu = w = M \cdot g = 0,1kg \cdot 10\frac{m}{s^2} \Rightarrow F_\nu = 1N$$

Έστω ότι ο κύλινδρος είναι βυθισμένος κατά y μέσα στο νερό. Η υδροστατική πίεση σε βάθος y από την επιφάνεια του νερού είναι $p_{\upsilon\delta\rho}=\rho_\nu \cdot g \cdot y$ και για την κατακόρυφη προς τα πάνω δύναμη, Fν, ισχύει:

$$F_\nu=p_{\upsilon\delta\rho}\cdot A \Rightarrow F_\nu=\rho_\nu\cdot g\cdot y\cdot A \Rightarrow y = \frac{F_\nu}{\rho_\nu \cdot g \cdot A} = \frac{1N}{10^3\frac{kg}{m^3} \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot 10 \cdot 10^{-4}m^2} \Rightarrow$$

$$y = 0,1m$$

(ρ_v=1g/cm^3=1000kg/m^3)

Β) Η συνολική πίεση στην κάτω βάση του κυλίνδρου, στη θέση ισορροπίας του είναι ίση με το άθροισμα της ατμοσφαιρικής πίεσης και της υδροστατικής πίεσης

$$p_{o\lambda}=p_{\alpha\tau\mu}+\rho_\nu \cdot g \cdot y = 10^5\frac{N}{m^2} + 1000\frac{kg}{m^3} \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot 0,1m \Rightarrow p_{o\lambda} = 101 \cdot 10^3\frac{N}{m^2}$$

Γ) Η σημειακή μεταλλική σφαίρα με την πτώση της θα αποκτήσει, πριν χτυπήσει στον κύλινδρο, ταχύτητα υ_1, την οποία υπολογίζουμε με εφαρμογή της Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας. Θεωρούμε στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας την πάνω βάση του κυλίνδρου:

$$E_{\mu\eta\chi,\alpha\rho\chi}=E_{\mu\eta\chi,\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda}+U_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$

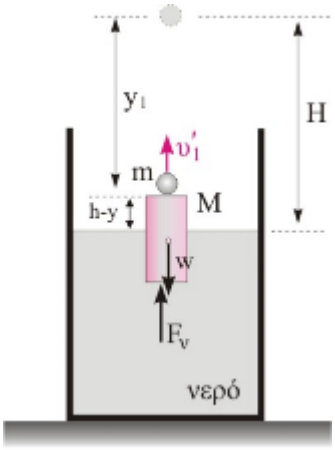
$$0 + m \cdot g \cdot d = \frac{1}{2}m \cdot \upsilon_1{}^2 + 0 \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot d} = \sqrt{2 \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot 0,45m} \Rightarrow$$

$$\upsilon_1 = 3\frac{m}{s}.$$

Μετά την κεντρική ελαστική κρούση η σημειακή μεταλλική σφαίρα και ο κύλινδρος θα αποκτήσουν ταχύτητες υ_1' και υ_2', που δίνονται από τις σχέσεις

$$\upsilon_1{}' = \frac{m-M}{m+M}\upsilon_1 = \frac{0,05kg - 0,1kg}{0,05kg + 0,1kg} \cdot 3\frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_1{}' = -1\frac{m}{s}$$

$$\upsilon_2{}' = \frac{2m}{m+M}\upsilon_1 = \frac{2 \cdot 0,05kg}{0,05kg + 0,1kg} \cdot 3\frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_2{}' = 2\frac{m}{s}.$$



Η σφαίρα μετά την κρούση θα ανέλθει κατακόρυφα y_1 μέχρι να σταματήσει. Το y_1 υπολογίζεται με εφαρμογή της Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας μεταξύ των δύο θέσεων. Θεωρούμε στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας την πάνω βάση του κυλίνδρου:

$$E_{\alpha\rho\chi}=E_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi}+U_{\alpha\rho\chi}=K_{\tau\varepsilon\lambda}+U_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\cdot(\upsilon_1{}')^2+0=0+m\cdot g\cdot y_1 \Rightarrow y_1=\frac{(\upsilon_1{}')^2}{2\cdot g}=\frac{\left(1\frac{m}{s}\right)^2}{2\cdot 10\frac{m}{s^2}} \Rightarrow$$

$$y_1=0,05m$$.

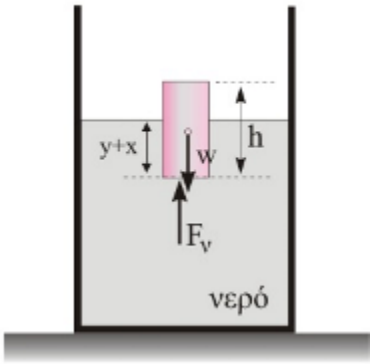
Το ύψος Η πάνω από τη στάθμη του νερού που θα ανέλθει η σφαίρα είναι:

$$H=h-y+y_1=20cm-10cm+5cm \Rightarrow H=15cm$$

Δ) Ο κύλινδρος κατά τη βύθισή του δέχεται δύο δυνάμεις, το βάρος του w και τη δύναμη, F_v εξαιτίας της υδροστατικής πίεσης από το νερό. Η ατμοσφαιρική πίεση δεν επηρεάζει την κίνηση του κυλίνδρου καθώς οι δυνάμεις που οφείλονται σε αυτήν αλληλοεξουδετερώνονται.

Για να βρούμε την ταχύτητα του κυλίνδρου τη στιγμή που εισέρχεται ολόκληρος στο νερό θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας από τη θέση που ο κύλινδρος ξεκινάει με αρχική ταχύτητα $\upsilon_2{}'$ μέχρι τη θέση που εισέρχεται ολόκληρος στο νερό με ταχύτητα υ.

$$K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}=W_W+W_{F\nu} \quad \textbf{(1)}$$



Η δύναμη, Fv είναι μεταβλητή, γιατί η υδροστατική πίεση στη βάση του κυλίνδρου διαρκώς αυξάνεται, καθώς αυτός βυθίζεται. Για να βρούμε το έργο της Fv πρέπει να κάνουμε τη γραφική της παράσταση σε σχέση με τη μετατόπιση και να υπολογίσουμε το κατάλληλο εμβαδό.
Έστω μια τυχαία θέση στη διάρκεια βύθισης του κυλίνδρου, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ο κύλινδρος έχει μετατοπιστεί κατά x, άρα είναι βυθισμένος κατά y+x μέσα στο νερό. Στη θέση αυτή στην επιφάνεια της βάσης του κυλίνδρου η υδροστατική πίεση είναι

$$p_{\upsilon\delta\rho}=\rho_\nu\cdot g\cdot(y+x)=10^3\frac{kg}{m^3}\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot(0,1m+x) \Rightarrow$$

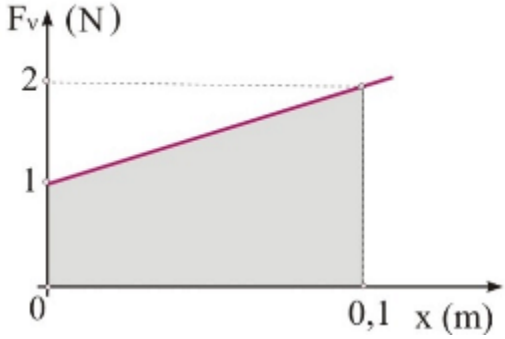
$$p_{\upsilon\delta\rho}=10^4\cdot(0,1+x)\,(S.I.)$$ με $0m\le x\le 0,2m$

Άρα το μέτρο της δύναμης που ασκεί το νερό στον κύλινδρο είναι:

$$F_\nu=p_{\upsilon\delta\rho}\cdot A=10^4\cdot(0,1+x)\cdot 10\cdot 10^{-4}m^2 \Rightarrow F_\nu=1+10x\,(S.I.)$$ με

$$0m\le x\le 0,1m$$

Η μετατόπιση x παίρνει τιμές από μηδέν έως h-y=0,1m, όταν ο κύλινδρος εισέρχεται ολόκληρος στο νερό. Η γραφική παράσταση του μέτρου της δύναμης Fν σε σχέση με τη μετατόπιση δείχνεται στο διπλανό σχήμα. Το σκιασμένο εμβαδό ισούται με το έργο της Fν, που είναι αρνητικό, γιατί η δύναμη του νερού είναι αντίθετη της μετατόπισης:



$$W_{F\nu} = -\frac{1N + 2N}{2} \cdot 0,1m = -0,15J$$

Με αντικατάσταση στη σχέση **(1)** παίρνουμε:

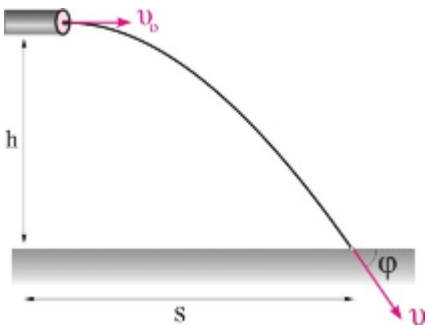
$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi\rho} = W_W + W_{F_\nu} \Rightarrow \frac{1}{2}M\cdot\upsilon^2 - \frac{1}{2}M\cdot(\upsilon_2')^2 = M\cdot g\cdot(h-y) + W_{F_\nu} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}0,1kg\cdot\upsilon^2 - \frac{1}{2}0,1kg\cdot\left(2\frac{m}{s}\right)^2 = 0,1kg\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 0,1m - 0,15J = 0 \Rightarrow$$

$$\upsilon = \sqrt{3}\frac{m}{s}$$

▪ ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Ένας οριζόντιος κυκλικός σωλήνας εσωτερικής ακτίνας r_1 εκτοξεύει νερό από ύψος h=15m. Το νερό εξέρχεται του σωλήνα με ταχύτητα υ_0, τη χρονική στιγμή t=0 και όταν φτάνει στο έδαφος η επιφάνεια διατομής της φλέβας του έχει ακτίνα r_2 ίση με $\frac{r_1}{\sqrt{2}}$. Στο σημείο πτώσης του νερού στο έδαφος είναι τοποθετημένο ένα δοχείο όγκου $V = \pi\sqrt{3}\ L$, το οποίο γεμίζει τη χρονική στιγμή $t_2 = 2\sqrt{3}\ s$. Θεωρούμε την αντίσταση του αέρα αμελητέα.



Να υπολογίσετε:

Α) τη χρονική διάρκεια της πτώσης του νερού μέχρι να φθάσει στο έδαφος.

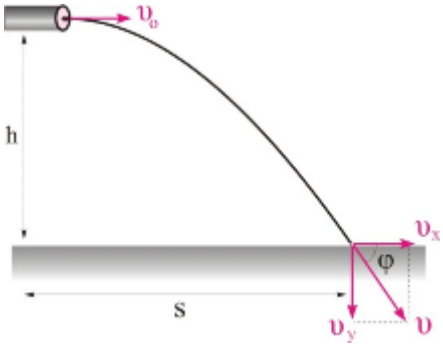
Β) την ταχύτητα υ_0 εξόδου του νερού από το σωλήνα.

Γ) την οριζόντια απόσταση S του σημείου που χτυπάει το νερό στο έδαφος από την έξοδο του σωλήνα και τη γωνία φ με το οριζόντιο επίπεδο, υπό την οποία προσκρούει το νερό.

Δ) την εσωτερική ακτίνα r_1 του σωλήνα.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g =10 m/s^2.

Α) Η κίνηση που κάνει το νερό είναι οριζόντια βολή. Σύμφωνα με την αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων η χρονική διάρκεια της πτώσης του νερού, μέχρι να φθάσει στο έδαφος, εξαρτάται από το ύψος h που εκτοξεύεται



$$h = \frac{1}{2} g \cdot {t_1}^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 15m}{10m/s^2}} \Rightarrow t_1 = \sqrt{3}s$$

.

Β) Από την εξίσωση της συνέχειας προκύπτει ότι έχουμε σταθερή παροχή κατά μήκος της φλέβας του νερού, από την έξοδο του σωλήνα μέχρι και ελάχιστα πριν την πρόσκρουση στο έδαφος. Ελάχιστα πριν το νερό κτυπήσει στο έδαφος η επιφάνεια διατομής της φλέβας του έχει ακτίνα r_2 ίση με $\frac{r_1}{\sqrt{2}}$.

$$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1 \cdot \upsilon_0 = A_2 \cdot \upsilon \Rightarrow \pi \cdot {r_1}^2 \cdot \upsilon_0 = \pi \cdot {r_2}^2 \cdot \upsilon \Rightarrow \upsilon = \frac{{r_1}^2 \cdot \upsilon_0}{{r_2}^2} \Rightarrow$$

$$\upsilon = \frac{{r_1}^2 \cdot \upsilon_0}{\left(\frac{r_1}{\sqrt{2}}\right)^2} \Rightarrow \upsilon = 2\upsilon_0 \quad (1).$$

Η ταχύτητα του νερού όταν θα φθάσει στο έδαφος είναι

$$\upsilon = \sqrt{{\upsilon_x}^2 + {\upsilon_y}^2}$$ **.(2)**

Η ταχύτητα που θα έχει το νερό την ίδια στιγμή στον κατακόρυφο άξονα, υ_y, είναι:

$$\upsilon_y = g \cdot t_1 = 10m/s^2 \cdot \sqrt{3}s \Rightarrow \upsilon_y = 10\sqrt{3}m/s$$ **(3)**

Έτσι η σχέση **(1)** με χρήση και των σχέσεων **(2)** και **(3)** γίνεται

$$\upsilon = 2\upsilon_0 \Rightarrow \sqrt{{\upsilon_x}^2 + {\upsilon_y}^2} = 2\upsilon_0 \Rightarrow \sqrt{{\upsilon_0}^2 + {\upsilon_y}^2} = 2\upsilon_0 \Rightarrow {\upsilon_0}^2 + {\upsilon_y}^2 = 4{\upsilon_0}^2 \Rightarrow$$

$$3{\upsilon_0}^2 = \left(10\sqrt{3}m/s\right)^2 \Rightarrow {\upsilon_0}^2 = 100 \Rightarrow \upsilon_0 = 10m/s$$

.

Γ) Η οριζόντια απόσταση S του σημείου που χτυπάει το νερό στο έδαφος από την έξοδο του σωλήνα είναι:

$$S = \upsilon_0 \cdot t_1 = 10m/s \cdot \sqrt{3}s \Rightarrow S = 10\sqrt{3}m$$

.

Η γωνία φ με το οριζόντιο επίπεδο υπό την οποία προσκρούει το νερό είναι

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_0} = \frac{10\sqrt{3}m/s}{10m/s} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = 60^0$$

.

Δ) Η παροχή του σωλήνα είναι ίση με την παροχή σε όλο το μήκος της φλέβας του νερού. Εφόσον το δοχείο όγκου $V = \pi\sqrt{3}\ L$ γεμίζει τη χρονική στιγμή $t_2 = 2\sqrt{3}\ s$ και με δεδομένο ότι το νερό χρειάστηκε χρονικό διάστημα $t_1 = \sqrt{3}\ s$ για να φτάσει στο έδαφος η παροχή θα είναι

$$\Pi = \frac{V}{t_2 - t_1} = \frac{\pi \cdot \sqrt{3}L}{\sqrt{3}s} \Rightarrow \Pi = \pi \frac{L}{s} = \pi \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{s}$$

Θα βρούμε την εσωτερική ακτίνα r_1 του σωλήνα από την παροχή του

$$\Pi_1 = A_1 \cdot \upsilon_0 = \pi \cdot {r_1}^2 \cdot \upsilon_0 \Rightarrow {r_1}^2 = \frac{\Pi_1}{\pi \cdot \upsilon_0} \Rightarrow r_1 = \sqrt{\frac{\Pi_1}{\pi \cdot \upsilon_0}} \Rightarrow$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{\pi \cdot 10^{-3} m^3/s}{\pi \cdot 10 m/s}} \Rightarrow r_1 = 10^{-2} m = 1cm$$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Μέγεθος /εξισώσεις/αρχές	**Τύπος ορισμού- σχέση**	**Μονάδα - SI**
Πυκνότητα	$\rho = \frac{m}{V}$	Kg/m^3
Πίεση	$p = \frac{dF}{dA}$	Pascal =1N/m^2
Υδροστατική πίεση σε βάθος h	$p = \rho g h$	
ολική πίεση σε βάθος h (δοχείο ανοικτό)	$p = p_{\alpha\tau\mu} + \rho g h$	
παροχή της φλέβας ή σωλήνα	$\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{A\Delta l}{\Delta t}$ ή $\Pi = Av$	1m^3/s
εξίσωση της συνέχειας(αρχή διατήρησης ύλης)	$A_1 \upsilon_1 = A_2 \upsilon_2$ ή $\Pi = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}$	
Δυναμική ενέργεια ανά μονάδα όγκου **Κινητική ενέργεια ανά μονάδα** **Έργο δύναμης ανά μονάδα όγκου**	$\frac{U}{\Delta V} = \frac{mgh}{\Delta V} = \rho g h$ $\frac{K}{\Delta V} = \frac{\frac{1}{2}m\upsilon^2}{\Delta V} = \frac{1}{2}\rho\upsilon^2$ $\frac{W}{\Delta V} = \frac{F\cdot\Delta x}{\Delta V} = \frac{F_1\Delta x - F_2\Delta x}{\Delta V} = \frac{(p_1 - p_2)A\cdot\Delta x}{\Delta V} = p_1 - p_2$	
Η **εξίσωση του Bernoulli** είναι μια συνέπεια της αρχής **διατήρησης της ενέργειας** στα ρευστά και διατυπώνεται ως εξής:	$\frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + p + \rho g h = \sigma\tau\alpha\theta.$	
ιξώδες Οι δυνάμεις της εσωτερικής τριβής	$F = nA\frac{\upsilon}{\ell}$ (Νευτώνεια ρευστά)	
Συντελεστής ιξώδους Στην πράξη μετριέται σε poise (p). 1p = 0,1Pa s	n	Ns/m^2
Θεώρημα Torricelli Ταχύτητα εκροής ρευστού από οπή σε βάθος h από ελεύθερη επιφάνεια με εμβαδόν πολύ μεγαλύτερο από εμβαδόν επιφάνειας εκροής	$u = \sqrt{2gh}$	
Αρχή Pascal Εφαρμογή στα υδραυλικά πιεστήρια	Η πίεση που ασκεί ένα εξωτερικό αίτιο σε κάποιο σημείο υγρού μεταφέρεται αναλλοίωτη σε όλα τα σημεία του υγρού	