



4

ΤΟ ΒΙΒΛΙΑΡΑΚΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

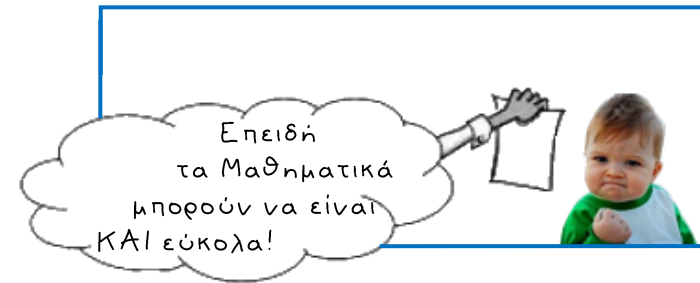
ΟΛΑ ΟΣΑ ΘΕΛΑΤΕ
ΝΑ ΜΑΘΕΤΕ,
ΑΛΛΑ ΦΟΒΟΣΑΣΤΑΝ
ΝΑ ΡΩΤΗΣΕΤΕ!



Εκδόσεις DigitalZoot
Αθήνα 2023

Το βιβλιαράκι των υλασμάτων

Βασικά στοιχεία της θεωρίας των υλασμάτων



12ο Δημ. Σχ. Αθήνας
2022 - 2023

Επιμέλεια και διασκευή: Digitalzoot mind

Επιλογή εικόνων: Digitalzoot gallery

Επεξεργασία εικόνων: Digitalzoot art

Επεξεργασία γραφικών: Digitalzoot graphics

Τεχνική επιμέλεια: Digitalzoot technologies

Σελιδοποίηση: Digitalzoot press

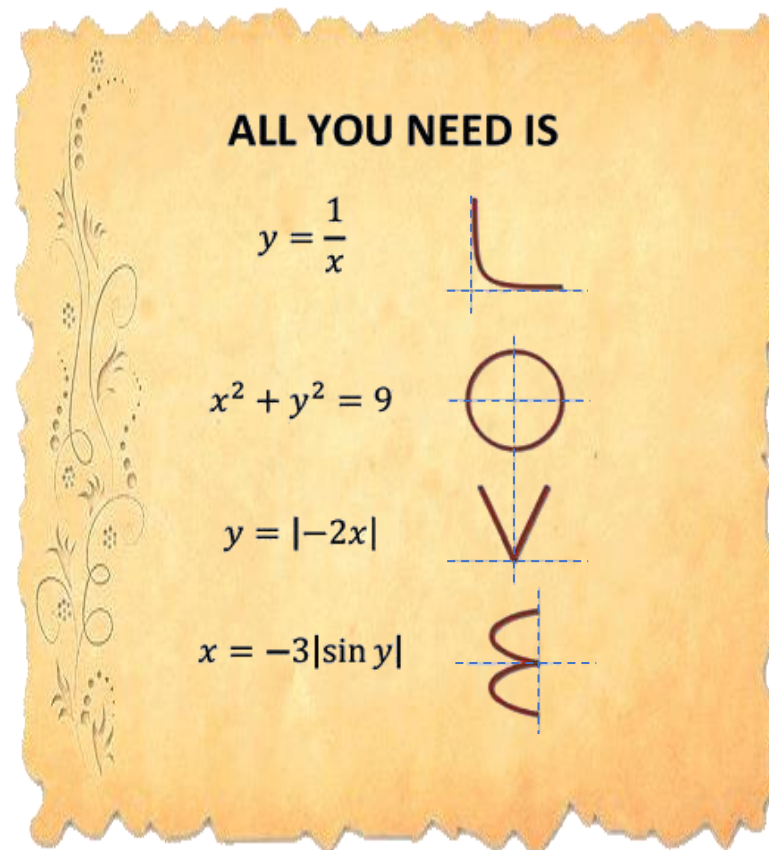
Επιμέλεια έκδοσης: Digitalzoot studios

Μία παραγωγή της Digitalzoot Productions

Επιτρέπεται η χρησιμοποίηση ή αναδημοσίευση μέρους ή όλου του υλικού για προσωπική χρήση, ή για εκπαιδευτικούς σκοπούς, με αναφορά στην πηγή: <https://zoothelpblog.blogspot.com/2023/08/klasmata.html>.

Απαγορεύεται η χρησιμοποίηση ή αναδημοσίευσή του για εμπορικούς σκοπούς, ή για οποιαδήποτε άλλη χρήση με σκοπό το κέρδος.

😊 και... επειδή τα Μαθηματικά μπορούν να είναι ΚΑΙ αθλητικά:



* Οι γραμμές που σχηματίζουν το "Love" λέγονται "γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων".

😊 Θα τις καταλάβετε στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο.

Mathematics of Life

$$\left. \begin{array}{l} \text{Life} + \text{Love} = \text{Happiness} \\ \text{Life} - \text{Love} = \text{Sadness} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Life} + \cancel{\text{Love}} + \text{Life} - \cancel{\text{Love}} = \text{Happiness} + \text{Sadness} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \text{Life} = \text{Happiness} + \text{Sadness} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Life} = \frac{\text{Happiness} + \text{Sadness}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Life} = \frac{1}{2} \text{Happiness} + \frac{1}{2} \text{Sadness}$$

That's Real Life. Enjoy it!

Το βιβλίο αυτό είναι μία ευγενική
προσφορά

της
DIGITALZOOT PRODUCTIONS

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κλάσμα - κλασματική μονάδα	5
Πώς βρίσκω την κλασματική μονάδα ενός αριθμού	6
Σύγκριση κλασματικών μονάδων	6
Ανάσωση στην κλασματική μονάδα	7
Πώς γράφω ένα κλάσμα ως διαίρεση	7
Πώς γράφω έναν φυσικό αριθμό ως κλάσμα	7
Δεκαδικά κλάσματα	8
Μετατρέπω κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς	8
Μετατρέπω δεκαδικά κλάσματα σε δεκαδικούς αριθμούς	8
Μετατρέπω δεκαδικούς αριθμούς σε δεκαδικά κλάσματα	9
Γνήσια - καταχρηστικά κλάσματα	9
Μεικτοί αριθμοί	10
Μετατρέπω έναν μεικτόν αριθμό σε κλάσμα	10
Μετατρέπω ένα κλάσμα σε μεικτόν αριθμό	10
Ισοδύναμα κλάσματα	11
Χρησιμοποιώ τα ισοδύναμα κλάσματα για να εντοπίζω κρυμμένους αριθμούς	11
Κατασκευάζω ισοδύναμα κλάσματα	12
Ελέγχω αν δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα	12
Αηλοποίηση - Ανάσωση κλάσματα	12
Αηλοποιώ ένα καταχρηστικό κλάσμα	13
Ομώνυμα - ετερόνυμα κλάσματα (ορισμοί)	13
Μετατρέπω ετερόνυμα κλάσματα σε ομώνυμα	13
Συγκρίνω ομώνυμα κλάσματα	14
Συγκρίνω ετερόνυμα κλάσματα με ίδιους αριθμητές	14
Συγκρίνω ετερόνυμα κλάσματα με διαφορετικούς αριθμητές	15
Προσθέτω ομώνυμα κλάσματα	16
Προσθέτω μεικτούς αριθμούς (που έχουν ομώνυμα κλάσματα)	16
Προσθέτω ετερόνυμα κλάσματα	17
Προσθέτω μεικτούς αριθμούς (που έχουν ετερόνυμα κλάσματα)	17
Αφαιρώ ομώνυμα κλάσματα και μεικτούς αριθμούς	18
Αφαιρώ μεικτούς αριθμούς, στους οποίους το δεύτερο κλάσμα είναι μεγαλύτερο από το πρώτο	18
Αντίστροφοι αριθμοί	19
Πολλαπλασιάζω κλάσματα	19
Βρίσκω το κλάσμα ενός αριθμού	19
Διαιρώ κλάσματα	20
Δύο νέοι ορισμοί για τον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση	21

ΔΥΟ ΝΕΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ για ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟ και ΔΙΑΙΡΕΣΗ

α. Πολλαπλασιασμός

Μέχρι τώρα λέγαμε πως, όταν ξέρουμε την αξία του ενός και ψάχνουμε την αξία των πολλών, κάνουμε πολλαπλασιασμό.

Από τώρα και στο εξής αντί για τα “πολλά”, θα έχουμε στο μυαλό μας “κάποια άλλη ποσότητα” (διαφορετική από την μονάδα).

Δηλαδή:

ΟΤΑΝ ΞΕΡΟΥΜΕ ΤΗΝ ΑΞΙΑ ΤΗΣ ΜΟΝΑΔΑΣ (το 1) ΚΑΙ ΨΑΧΝΟΥΜΕ

ΝΑ ΒΡΟΥΜΕ ΚΑΠΟΙΑ ΑΛΛΗ ΠΟΣΟΤΗΤΑ (τα 3, τα $\frac{4}{6}$, τα $\frac{2}{3}$, κλπ.):

Πολλαπλασιάζουμε την ποσότητα με την αξία της μονάδας.

Π.χ. : Το 1 κ. μήλα κοστίζει 2 €. Πόσο κοστίζουν τα $\frac{3}{4}$ του κιλού;

Λύση: Ξέρουμε πόσο κοστίζει το 1 κιλό και θέλουμε να βρούμε πόσο κοστίζει μια άλλη ποσότητα (τα $\frac{3}{4}$). **Θα κάνουμε πολλαπλασιασμό:**

$$\frac{3}{4} \times 2 = \frac{3 \times 2}{4} = \frac{6}{4} = 1 \frac{2}{4} = 1 \frac{1}{2} \text{€}.$$

β. Διαίρεση

Μέχρι τώρα λέγαμε πως, όταν ξέρουμε την αξία των πολλών και ψάχνουμε την αξία του ενός, κάνουμε πολλαπλασιασμό.

Από τώρα και στο εξής αντί για τα “πολλά”, θα έχουμε στο μυαλό μας “κάποια άλλη ποσότητα” (διαφορετική από την μονάδα).

Δηλαδή:

ΟΤΑΝ ΞΕΡΟΥΜΕ ΤΗΝ ΑΞΙΑ ΜΙΑΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΨΑΧΝΟΥΜΕ ΝΑ ΒΡΟΥΜΕ ΤΗΝ ΑΞΙΑ ΤΗΣ ΜΟΝΑΔΑΣ (το 1), ΚΑΝΟΥΜΕ ΔΙΑΙΡΕΣΗ.

Π.χ. : Τα $\frac{3}{4}$ της απόστασης Αθήνα - Ρώμη (σε ευθεία γραμμή) είναι περίπου 750

χμ. Πόσα χιλιόμετρα είναι η συνολική απόσταση (όλη η απόσταση);

Λύση: Ξέρουμε μια ποσότητα (τα $\frac{3}{4}$) και ψάχνουμε να βρούμε όλη την ποσότητα,

(όλη την απόσταση), δηλαδή την μονάδα. **Θα κάνουμε διαίρεση:**

$$750 : \frac{3}{4} = 750 \times \frac{4}{3} = \frac{3000}{3} = 1.000 \text{ χμ.}$$

ΔΙΑΙΡΟ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

1. Διάρθρωση ομώνυμων υλάσμάτων: $\frac{12}{20} : \frac{6}{20}$

Σε διάρθρωση με ομώνυμα κλάσματα απλώς διαιρώ τους αριθμητές.

$$\frac{12}{20} : \frac{6}{20} = 12 : 6 = 2$$

2. Διάρθρωση ετερόνυμων υλάσμάτων: $\frac{3}{4} : \frac{2}{3}$

Σε διάρθρωση με ετερόνυμα κλάσματα:

* Αντιστρέφω τον διαιρέτη (τον β' αριθμό) και κάνω πολλαπλασιασμό.

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3 \times 3}{4 \times 2} = \frac{9}{8} = 1 \frac{1}{8}$$

* (Εναλλακτικά:) Τα υάνω ομώνυμα και διαιρώ τους αριθμητές.

3. Διάρθρωση με μειτούς αριθμούς: $2 \frac{1}{5} : 1 \frac{2}{9}$

Μετατρέπω τους μειτούς σε απλά υλάσματα και κάνω την διάρθρωση, όπως παραπάνω.

$$2 \frac{1}{5} : 1 \frac{2}{9} = \frac{11}{5} : \frac{11}{9} = \frac{11}{5} \cdot \frac{9}{11} = \frac{9}{5} = 1 \frac{4}{5}$$

4. Διάρθρωση με διαιρετέο ή διαιρέτη αυέραιο: $5 : \frac{7}{9}$, $\frac{4}{5} : 2$

Μετατρέπω τον αυέραιο σε υλάσμα και κάνω την διάρθρωση, όπως παραπάνω.

$$\alpha) 5 : \frac{7}{9} = \frac{5}{1} : \frac{7}{9} = \frac{5}{1} \cdot \frac{9}{7} = \frac{45}{7} = 6 \frac{3}{7}$$

$$(Εναλλακτικά:) 5 : \frac{7}{9} = 5 \cdot \frac{9}{7} = \frac{45}{7} = 6 \frac{3}{7}$$

$$\beta) \frac{4}{5} : 2 = \frac{4}{5} : \frac{2}{1} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4 \times 1}{5 \times 2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

ΚΛΑΣΜΑ - ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΑΔΑ

✓ 1 αντικείμενο ή 1 ομάδα αντικειμένων είναι 1 αυέραια μονάδα.

Π.χ.

1 καρπούζι:



1 σχολική τάξη:



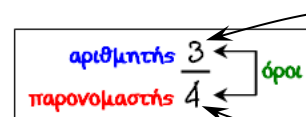
✓ Ένα κομμάτι της ακέραιας μονάδας λέγεται υλάσματιός αριθμός ή υλάσμα*.

Π.χ.

Τα 3 από τα 4 ίσα κομμάτια που έκοψε η γιαγιά το καρπούζι είναι τα $\frac{3}{4}$ του καρπούζιού.



Το 1 από τα 17 παιδιά της τάξης είναι το $\frac{1}{17}$ της τάξης.



Δείχνει πόσα κομμάτια θα πάρω.

Δείχνει σε πόσα κομμάτια έχω χωρίσει την μονάδα.

Το ένα κομμάτι από όλα τα κομμάτια στα οποία έχω χωρίσει την μονάδα, λέγεται υλάσματιυή μονάδα.

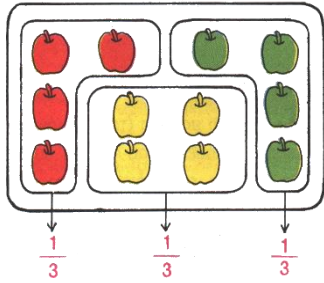
Π.χ.

Η τάξη έχει 17 παιδιά.

Το κάθε 1 παιδί, δηλαδή το $\frac{1}{17}$ της τάξης, είναι μία κλασματική μονάδα.

* Η λέξη «κλάσμα» μάς έρχεται από τα αρχαία και σημαίνει «κομμάτι».

ΠΩΣ ΒΡΙΣΚΩ ΤΗΝ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΑΔΑ ΕΝΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ



Για να βρω το $\frac{1}{3}$ των 12 μήλων, διαιρώ 12 δια 3
(χωρίζω τα 12 μήλα σε 3 μέρη και παίρνω το 1).

$$12 : 3 = 4$$

Το $\frac{1}{3}$ των 12 μήλων είναι 4 μήλα.

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ

Ανάμεσα σε δύο κλασματικές μονάδες:

μικρότερη είναι εκείνη που έχει τον μεγαλύτερο παρονομαστή.



$$\frac{1}{5} < \frac{1}{3}$$

Όσο μεγαλύτερος είναι ο παρονομαστής,
δηλ σε όσο περισσότερα κομμάτια κόψω την πίτσα,
τόσο μικρότερο θα είναι το κάθε κομμάτι.

Π.χ.

$$\frac{1}{12} < \frac{1}{9} < \frac{1}{7} < \frac{1}{4} < \frac{1}{6} < \frac{1}{2}$$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Είναι οι αριθμοί που

αν πολλαπλασιαστούν μεταξύ τους, το γινόμενο τους είναι το 1.

Π.χ. Οι αριθμοί 2 και $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{12}$ και $\frac{12}{5}$, κλπ. είναι αντίστροφοι,

διότι: $2 \times \frac{1}{2} = 1$, $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$, $\frac{5}{12} \times \frac{12}{5} = 1$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

* Κλάσμα επί υλάσμα: $\frac{2}{4} \times \frac{3}{5}$

Πολλαπλασιάζω αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή.

$$\frac{2}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{2 \times 3}{4 \times 5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

* Ακέραιο επί υλάσμα: $4 \times \frac{2}{4}$

Πολλαπλασιάζω τον ακέραιο με τον αριθμητή, και παρονομαστή αφήνω τον

ίδιο: $4 \times \frac{2}{4} = \frac{4 \cdot 2}{4} = \frac{8}{4} = 2$

* Πολλαπλασιάζω με μειωτό αριθμό: $1\frac{4}{6} \times 5$

Μετατρέπω τον μειωτό σε απλό κλάσμα και κάνω κανονικά τον πολλαπλασιασμό:

$$1\frac{4}{6} \times 5 = \frac{10}{6} \times 5 = \frac{10 \times 5}{6} = \frac{50}{6} = 8\frac{2}{6} = 8\frac{1}{3}$$

ΒΡΙΣΚΩ ΤΟ ΚΛΑΣΜΑ ΕΝΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ

Για να βρω το κλάσμα ενός αριθμού, πολλαπλασιάζω το υλάσμα με τον αριθμό.

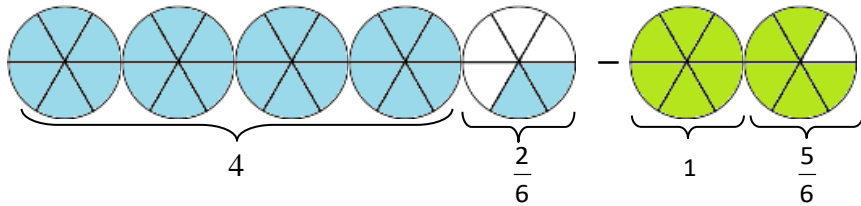
Π.χ. $\frac{3}{4}$ του 12 = $\frac{3}{4} \times 12 = \frac{3 \times 12}{4} = \frac{36}{4} = 9$

ΑΦΑΙΡΟ ΟΜΟΝΥΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΙΚΤΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

Κάνω τα ίδια ακριβώς όπως και στην πρόσθεση.

ΑΦΑΙΡΟ ΜΕΙΚΤΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ, ΣΤΟΥΣ ΟΠΟΙΟΥΣ ΟΜΩΣ ΤΟ Β' ΚΛΑΣΜΑ ΕΙΝΑΙ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟ ΑΠΟ ΤΟ Α'

Π.χ. Έχω την αφαίρεση $4\frac{2}{6} - 1\frac{5}{6}$.

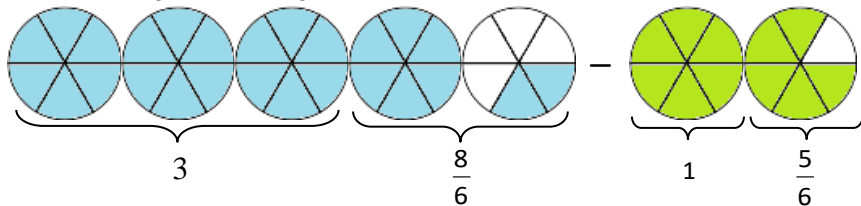


Αν αφαιρέσω ξεχωριστά τους ακέραιους και ξεχωριστά τα κλάσματα, βλέπω πως η αφαίρεση 4 (μονάδες) – 1 (μονάδα) γίνεται, όμως η αφαίρεση 2 (έκτα) – 5 (έκτα) δεν γίνεται.

Έτσι:

Παίρνω 1 μονάδα από τις 4, την κάνω έκτα ($\frac{6}{6}$) και την προσθέτω στα $\frac{2}{6}$.

Οπότε, το $4\frac{2}{6}$ γίνεται $3\frac{8}{6}$.



Οπότε, η αρχική αφαίρεση αλλάζει μορφή και γίνεται:

$$4\frac{2}{6} - 1\frac{5}{6} = 3\frac{8}{6} - 1\frac{5}{6} = 2\frac{3}{6} = 2\frac{1}{2} \quad (\text{Θυμάμαι πάντα να απλοποιώ το κλάσμα στο τέλος!})$$

ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΑΔΑ

Όπως και με τους φυσικούς αριθμούς, έτσι και με τα κλάσματα, όταν ξέρω μια ποσότητα (ένα κλάσμα) ενός αριθμού και θέλω να βρω μια άλλη ποσότητα (ένα άλλο κλάσμα), μπορώ να κάνω αναγωγή στην υλασματιυή μονάδα.

Π.χ. Τα $\frac{5}{6}$ των 12 μήλων είναι 10 μήλα. Πόσα μήλα είναι τα $\frac{2}{6}$ των 12 μήλων;

ΛΥΣΗ: Κάνω αναγωγή στην κλασματική μονάδα, για να βρω πρώτα το $\frac{1}{6}$ των 12 μήλων.

Το $\frac{1}{6}$ των 12 μήλων είναι $12 : 6 = 2$ μήλα. Άρα τα $\frac{2}{6}$ είναι $2 \cdot 2 = 4$ μήλα.

ΚΑΘΕ ΚΛΑΣΜΑ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΓΡΑΦΕΙ ΟΣ ΔΙΑΙΡΕΣΗ

Θέλω να μοιράσω 3 σοκολάτες σε 4 παιδιά.

Για να βρω πόση σοκολάτα θα πάρει το κάθε παιδί, πρέπει να κάνω την διαίρεση $3 : 4$.



Εναλλακτικά, μπορώ να χωρίσω κάθε σοκολάτα σε 4 ίσα μέρη, για να πάρει το κάθε ένα παιδί το $\frac{1}{4}$ της κάθε σοκολάτας.

Επειδή οι σοκολάτες είναι 3, το κάθε παιδί θα πάρει 3 φορές από $\frac{1}{4}$, δηλ. $\frac{3}{4}$.

Βλέπω ότι $3 : 4 = \frac{3}{4}$. Άρα κάθε κλάσμα μπορεί να γραφεί ως διαίρεση: $\frac{3}{4} = 3 : 4$

ΚΑΘΕ ΦΥΣΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΓΡΑΦΕΙ ΟΣ ΚΛΑΣΜΑ

* Βάζω παρονομαστή το 1, και αριθμητή τον αριθμό.

$$\text{Π.χ. } 5 = \frac{5}{1}, \quad 26 = \frac{26}{1}$$

* (Αλλιώς:) Βάζω παρονομαστή οποιονδήποτε αριθμό, και αριθμητή το γινόμενο του παρονομαστή με τον αριθμό που έχω.

$$\text{Π.χ. } \alpha) 5 = \frac{20}{4} \quad (\text{αν βάλω παρονομαστή το 4, τότε θα βάλω αριθμητή: } 4 \times 5 = 20)$$

$$\beta) 5 = \frac{35}{7} \quad (\text{αν βάλω παρονομαστή το 7, τότε θα βάλω αριθμητή: } 7 \times 5 = 35)$$

ΔΕΚΑΔΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Είναι τα υλάσματα που έχουν ως παρονομαστή το 10, το 100, το 1.000, κλπ.

Για να μετατρέψω ένα απλό κλάσμα σε δεκαδικό, διαιρώ τον αριθμητή δια τον παρονομαστή **αν διαιρείται ακριβώς** (αν η διαίρεση δεν αφήνει υπόλοιπο):

Π.χ. $\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0,75$. Ξέρω όμως ότι: $0,75 = \frac{75}{100}$.

Επομένως: $\frac{3}{4} (= 3 : 4 = 0,75) = \frac{75}{100}$

ΜΕΤΑΤΡΕΠΩ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΣΕ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

Για να μετατρέψω ένα οποιοδήποτε υλάσμα σε δευαδιού αριθμό, διαιρώ τον αριθμητή του υλάσματος με τον παρονομαστή.

Π.χ. Το κλάσμα $\frac{3}{4}$ γίνεται $\rightarrow 3 : 4 = 0,75$

Σημείωση:

Αν η διαίρεση δεν είναι τέλεια, το κλάσμα δεν μπορεί να μετατραπεί σε δεκαδικό.

ΜΕΤΑΤΡΕΠΩ ΔΕΚΑΔΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΣΕ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

- * α. Γράφω τον αριθμητή του υλάσματος.
- β. Παίρνω τόσα δευαδικά ψηφία όσα είναι τα μηδενικά του παρονομαστή.

Π.χ. Έχω το κλάσμα $\frac{75}{100}$. Ο παρονομαστής έχει 2 μηδενικά.

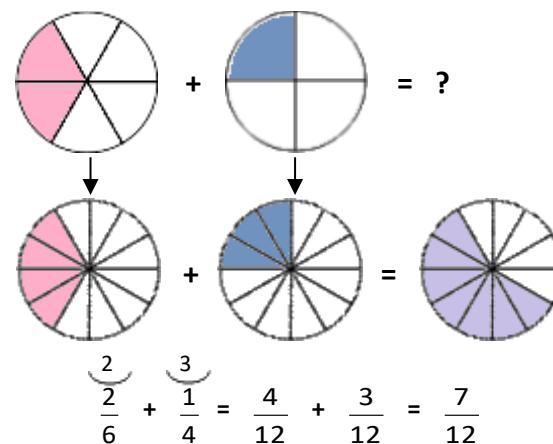
α. Γράφω το 75.

β. Παίρνω 2 δεκαδικά ψηφία από δεξιά προς τα αριστερά (επειδή 2 είναι και τα μηδενικά του παρονομαστή). Ο δεκαδικός που βγαίνει είναι το **0,75**.

- * (Εναλλακτικά): Διαιρώ τον αριθμητή δια τον παρονομαστή:

$$\frac{75}{100} = 75 : 100 = 0,75$$

ΠΡΟΣΘΕΤΩ ΕΤΕΡΩΝΥΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ



Τα ετερόνυμα κλάσματα τα μετατρέπω σε ομώνυμα και μετά κάνω την πρόσθεση.

ΠΡΟΣΘΕΤΩ ΜΕΙΚΤΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ (που έχουν ΕΤΕΡΩΝΥΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ)

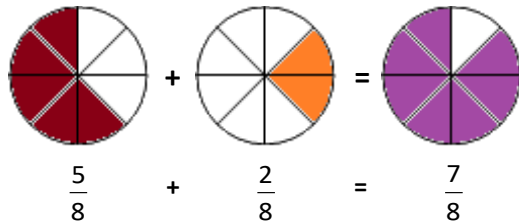
- * Μετατρέπω τους μεικτούς αριθμούς σε απλά υλάσματα, μετατρέπω μετά σε ομώνυμα και κάνω την πρόσθεση:

Π.χ. $2\frac{2}{8} + 1\frac{4}{6} = \frac{18}{8} + \frac{10}{6} = \frac{54}{24} + \frac{40}{24} = \frac{94}{24} = 3\frac{22}{24} = 3\frac{11}{12}$

- * (Εναλλακτικά): Προσθέτω ξεχωριστά τους ακεραίους και ξεχωριστά τα υλάσματα (αφού τα μετατρέψω πρώτα σε ομώνυμα).

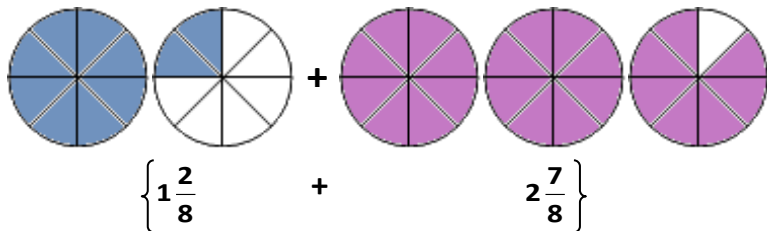
$$2\frac{2}{8} + 1\frac{4}{6} = 2\frac{6}{24} + 1\frac{16}{24} = 3\frac{22}{24} = 3\frac{11}{12}$$

ΠΡΟΣΘΕΤΟ ΟΜΟΝΥΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ



Στα ομώνυμα κλάσματα προσθέτω μόνο τους αριθμητές.
Ο παρονομαστής μένει ίδιος.

ΠΡΟΣΘΕΤΟ ΜΕΙΚΤΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ (που έχουν ΟΜΟΝΥΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ)



* Μετατρέπω τους μεικτούς αριθμούς σε απλά υλάσματα:
 $1\frac{2}{8} + 2\frac{7}{8} = \frac{10}{8} + \frac{23}{8} = \frac{33}{8}$, που με την απλοποίηση γίνεται: $4\frac{1}{8}$

* (Εναλλακτικά:) Προσθέτω ξεχωριστά
αιέραιο με αιέραιο και υλάσμα με υλάσμα:

α. $1\frac{2}{8} + 2\frac{7}{8} = 3\frac{9}{8}$

β. Απλοποιώ το $\frac{9}{8}$, μετατρέποντάς το σε $1\frac{1}{8}$.

γ. Το $3\frac{9}{8}$ γίνεται $3 + \left(1\frac{1}{8}\right)$, δηλαδή: $4\frac{1}{8}$

ΜΕΤΑΤΡΕΠΟ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ ΣΕ ΔΕΚΑΔΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

- Σχεδιάζω την γραμμή του υλάσματος.
- Ως αριθμητή γράφω τον αριθμό χωρίς την υποδιαστολή (και χωρίς τα μηδενικά που ίσως βρίσκονται αριστερά του).
- Ως παρονομαστή βάζω το 1, με τόσα μηδενικά όσα είναι και τα δεκαδικά ψηφία του δεκαδικού αριθμού.

Π.χ. Έχω τον δεκαδικό αριθμό 0,016 .

α. Σχεδιάζω την γραμμή του κλάσματος.

β. Ως αριθμητή γράφω το 16.

γ. Ως παρονομαστή γράφω το 1 με τρία μηδενικά (αφού το 0,016 έχει τρία δεκαδικά ψηφία).

Επομένως, ο δεκαδικός 0,016 ως κλάσμα γίνεται : $\frac{16}{1000}$

ΓΝΗΣΙΑ - ΚΑΤΑΧΡΗΣΤΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

* **Γνήσια** λέγονται τα κλάσματα που έχουν αριθμητή μικρότερο από τον παρονομαστή, δηλαδή είναι μικρότερα από την μονάδα (<1).



Το $\frac{2}{3}$ είναι γνήσιο κλάσμα (δεν έχω πάρει όλη την μονάδα:

από τα 3 κομμάτια έχω πάρει μόνο τα 2).

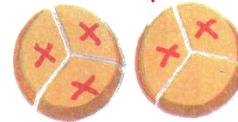
Όλα τα γνήσια υλάσματα βρίσκονται
μεταξύ του 0 και του 1.

* Τα κλάσματα με αριθμητή ίσο με τον παρονομαστή είναι ίσα με την μονάδα.



Το $\frac{3}{3}$ είναι μία μονάδα (σημαίνει πως έχω χωρίσει την μονάδα σε 3 μέρη και έχω πάρει και τα 3, δηλαδή ολόκληρη την μονάδα).

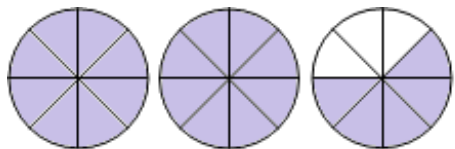
* **Καταχρηστικά** λέγονται τα κλάσματα που έχουν αριθμητή μεγαλύτερο από τον παρονομαστή, δηλαδή είναι μεγαλύτερα από την μονάδα (>1).



Το $\frac{5}{3}$ είναι ένα καταχρηστικό κλάσμα (σημαίνει πως έχω πάρει 2 μονάδες, τις έχω χωρίσει σε 3 ίσα μέρη την κάθε μία, και έχω πάρει όλη την μία μονάδα και 2 μέρη από την δεύτερη).

ΜΕΙΚΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Μεικτοί λέγονται οι αριθμοί που αποτελούνται από ένα ακέραιο μέρος και από ένα κλασματικό.



Π.χ. Ο αριθμός $2\frac{5}{8}$ είναι **μεικτός**.

Αποτελείται από 2 μονάδες και από τα $\frac{5}{8}$ μιας τρίτης μονάδας.

ΜΕΤΑΤΡΕΠΩ ΕΝΑΝ ΜΕΙΚΤΟ ΑΡΙΘΜΟ ($2\frac{5}{8}$)

ΣΕ ΑΠΛΟ -ΚΑΤΑΧΡΗΣΤΙΚΟ- ΚΛΑΣΜΑ ($\frac{21}{8}$)

- ✓ Πολλαπλασιάζω τις ακέραιες μονάδες (το 2) με τον παρονομαστή (το 8).
- ✓ Στο γινόμενο που θα βρω (το 16) προσθέτω τον αριθμητή (το 5).
- ✓ Τον αριθμό που βρίσκω (21) τον βάζω αριθμητή.
- ✓ Παρονομαστή αφήνω τον ίδιο (το 8).

$$\text{Έτσι: } 2\frac{5}{8} = \frac{21}{8}$$

$$(2 \times 8 = 16, 16 + 5 = 21)$$

ΜΕΤΑΤΡΕΠΩ ΕΝΑ ΑΠΛΟ -ΚΑΤΑΧΡΗΣΤΙΚΟ- ΚΛΑΣΜΑ ($\frac{21}{8}$)

ΣΕ ΜΕΙΚΤΟ ΑΡΙΘΜΟ ($2\frac{5}{8}$)

- ✓ Διαιρώ τον αριθμητή δια τον παρονομαστή ($21 : 8$).
- ✓ Το πηλίκο που θα βρω (δηλαδή το 2) είναι οι ακέραιες μονάδες.
- ✓ Το υπόλοιπο (αν υπάρχει - εδώ είναι το 5) είναι το κλάσμα που περισσεύει.

$$\text{Δηλαδή: } \frac{21}{8} = 2\frac{5}{8}$$

$$(21 : 8 = 2, \text{ με υπόλοιπο } 5)$$

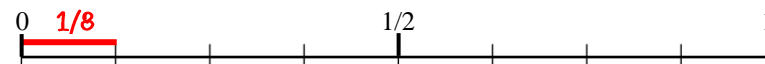
{ Στις πράξεις, χρησιμοποιώ μεικτό αριθμό ή απλό κλάσμα, ανάλογα με το τι με βολεύει κάθε φορά. }

ΣΥΓΚΡΙΝΩ: γ) ΕΤΕΡΟΝΥΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΗΤΕΣ ...

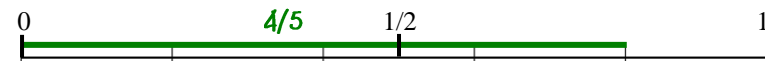
... παρατηρώντας την σχέση που έχουν οι όροι μεταξύ τους.

Π.χ. Έχω τα κλάσματα $\frac{1}{8}, \frac{4}{5}, \frac{5}{10}, \frac{12}{20}, \frac{7}{16}$.

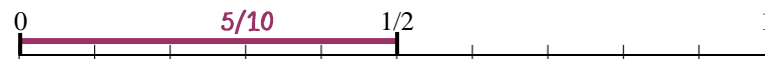
- α. Στο $\frac{1}{8}$ ο αριθμητής είναι πολύ μικρότερος από τον παρονομαστή.
Βλέπω ότι στην αριθμογραμμή 0 - 1 **βρίσκεται πιο κοντά στο 0**.



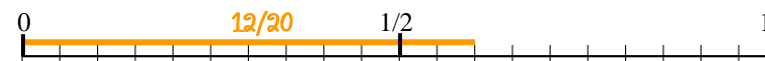
- β. Στο $\frac{4}{5}$ ο αριθμητής απέχει πολύ λίγο από τον παρονομαστή.
Βλέπω ότι στην αριθμογραμμή 0 - 1 **βρίσκεται αρκετά κοντά στην μονάδα**.



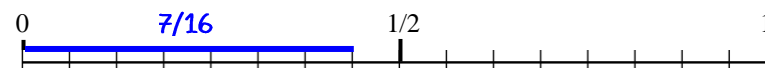
- γ. Στο $\frac{5}{10}$ ο αριθμητής είναι ακριβώς ο μισός από τον παρονομαστή.
Βλέπω ότι στην αριθμογραμμή 0 - 1 **βρίσκεται ακριβώς στην μέση**.



- δ. Στο $\frac{12}{20}$ ο αριθμητής είναι λίγο πιο μεγάλος από το μισό του παρονομαστή.
Βλέπω ότι στην αριθμογραμμή 0 - 1 **βρίσκεται λίγο πιο μετά από το μισό**.



- ε. Στο $\frac{7}{16}$ ο αριθμητής είναι λίγο πιο μικρός από το μισό του παρονομαστή.
Βλέπω ότι στην αριθμογραμμή 0 - 1 **βρίσκεται λίγο πιο πριν από το μισό**.

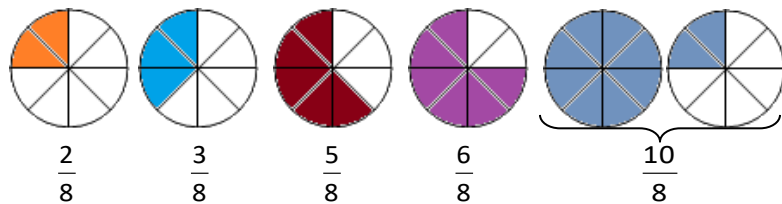


$$\text{Επομένως: } \frac{1}{8} < \frac{7}{16} < \frac{5}{10} < \frac{12}{20} < \frac{4}{5}$$

* (Εναλλακτικά:) Μετατρέπω τα υλάσματα σε δεκαδικούς και βλέπω ποιος είναι ο πιο μεγάλος. ($\frac{1}{8} = 1 : 8 = 0,125 / \frac{4}{5} = 4 : 5 = 0,8$ / κλπ.)

ΣΥΓΚΡΙΝΟ: α) ΟΜΟΝΥΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Ο **μικρότερος αριθμητής** δείχνει **μικρότερο υλάσμα** (αφού τα κλάσματα με μικρότερους αριθμητές έχουν λιγότερα μέρη της μονάδας).



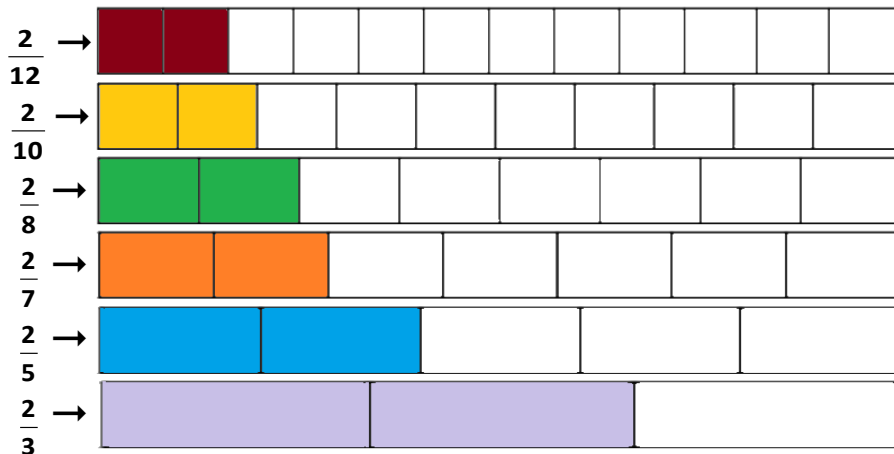
Έτσι: $\frac{2}{8} < \frac{3}{8} < \frac{5}{8} < \frac{6}{8} < \frac{10}{8}$

ΣΥΓΚΡΙΝΟ: β) ΕΤΕΡΟΝΥΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΜΕ ΙΔΙΟΥΣ ΑΡΙΘΜΗΤΕΣ

Αφού οι αριθμητές είναι ίδιοι, συγκρίνω τους παρονομαστές.

Ο **μεγαλύτερος παρονομαστής** δείχνει **μικρότερο υλάσμα**.

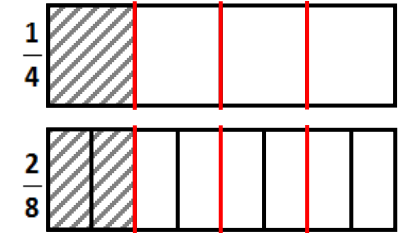
Οι αριθμητές είναι ίδιοι, επομένως κάθε κλάσμα έχει τον ίδιο αριθμό κομματιών. Οι μεγαλύτεροι παρονομαστές δείχνουν πως η μονάδα έχει χωριστεί σε περισσότερα κομμάτια, άρα και μικρότερα.



$\frac{2}{12} < \frac{2}{10} < \frac{2}{8} < \frac{2}{7} < \frac{2}{5} < \frac{2}{3}$

ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Ισοδύναμα λέμε τα κλάσματα που έχουν την ίδια αξία που εκφράζουν δηλαδή την ίδια ποσότητα.



Την μονάδα πάνω δεξιά την έχουμε χωρίσει σε 4 ίσα μέρη. Την μονάδα από κάτω την έχουμε χωρίσει σε 8 ίσα μέρη.

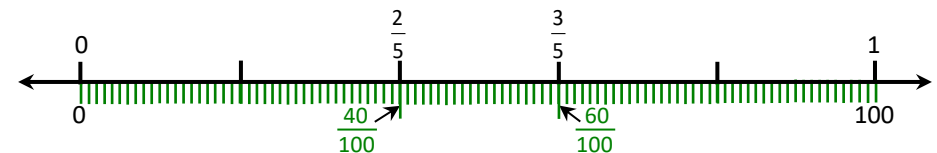
Το $\frac{1}{4}$ της πάνω μονάδας και τα $\frac{2}{8}$ της κάτω μονάδας εκφράζουν την ίδια ποσότητα, παρ' όλο που έχουν διαφορετικούς όρους.

Λέμε ότι: Τα υλάσματα $\frac{1}{4}$ και $\frac{2}{8}$ είναι **ισοδύναμα**.

ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩ ΤΑ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ για να εντοπίσω "υρυμμένους" αριθμούς

Παράδειγμα: Μεταξύ του $\frac{2}{5}$ και του $\frac{3}{5}$ δεν φαίνεται να υπάρχει άλλος αριθμός.

- Αν όμως πάρω π.χ. τα διπλάσια ισοδύναμά τους, δηλαδή το $\frac{4}{10}$ και το $\frac{6}{10}$, τότε εμφανίζεται άλλος ένας αριθμός: το $\frac{5}{10}$.
- Αν πάρω (π.χ.) τα εικοσάπλάσια ισοδύναμά τους, δηλαδή το $\frac{40}{100}$ και το $\frac{60}{100}$, τότε ανάμεσά τους εμφανίζονται άλλα 19 κλάσματα.



(Το ίδιο πράγμα μπορεί να συνεχίζεται άπειρες φορές και να μας δίνει άπειρα "καινούρια" κλάσματα.)

ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΘΕ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ...

★ ...πολλαπλασιάζοντας τους όρους του κλάσματος με τον ίδιο αριθμό:

$$\frac{3}{8} = \frac{6}{16} = \frac{60}{160}$$

$$\frac{7}{9} = \frac{21}{27} = \frac{42}{54}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{40}{50}$$

★ ...διαιρώντας τους όρους του κλάσματος με τον ίδιο αριθμό:

$$\frac{20}{60} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{24}{60} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{54}{81} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

ΕΛΕΓΧΘΕ ΕΑΝ ΔΥΟ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ

Πολλαπλασιάζω τους όρους τους "χιαστί", δηλαδή σταυρωτά:

Αν τα σταυρωτά γινόμενα είναι ίσα, τα κλάσματα είναι ισοδύναμα.

Π.χ. $\frac{4}{5}, \frac{12}{15} \rightarrow \frac{4}{5} \times \frac{12}{15}$ $4 \times 15 = 60, 5 \times 12 = 60$. Τα σταυρωτά γινόμενα είναι ίσα. Τα κλάσματα $\frac{4}{5}$ και $\frac{12}{15}$ είναι ισοδύναμα.

ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ - ΑΝΑΓΩΓΗ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Όταν διαιρώ (και τους δύο) τους όρους του κλάσματος με κάποιον αριθμό, δημιουργώ ένα άλλο κλάσμα, ισοδύναμο με το αρχικό, αλλά με μικρότερους όρους. Κάνω δηλαδή απλοποίηση.

Όταν οι όροι του κλάσματος δεν μπορούν να διαιρεθούν άλλο, λέμε ότι το κλάσμα είναι ανάγωγο.

Π.χ. Το κλάσμα $\frac{20}{60}$ αν απλοποιηθεί θα γίνει $\frac{1}{3}$.

$$\frac{20}{60} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Το $\frac{1}{3}$ δεν απλοποιείται άλλο· είναι ανάγωγο.

ΑΠΛΟΠΟΙΩ ΕΝΑ ΚΑΤΑΧΡΗΣΤΙΚΟ ΚΛΑΣΜΑ

Το κλάσμα $\frac{25}{6}$ λέγεται καταχρηστικό, επειδή είναι μεγαλύτερο από 1 μονάδα.

Για να το απλοποιήσω, δηλαδή για να βγάλω τις μονάδες που κρύβει: διαιρώ τον αριθμητή δια τον παρονομαστή.

$25 : 6 = 4$, και υπόλοιπο 1. Επομένως: $\frac{25}{6} = 4 \frac{1}{6}$

ΟΜΟΝΥΜΑ - ΕΤΕΡΟΝΥΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Ομώνυμα λέγονται τα κλάσματα που έχουν κοινούς (όμοιους) παρονομαστές.

Π.χ. $\frac{2}{8}, \frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{6}{8}, \frac{10}{8}, \frac{20}{8}$

Ετερόνυμα λέγονται τα κλάσματα που έχουν διαφορετικούς παρονομαστές.

Π.χ. $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{3}{9}, \frac{2}{10}, \frac{4}{7}, \frac{12}{4}$

ΜΕΤΑΤΡΕΠΩ ΕΤΕΡΟΝΥΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΣΕ ΟΜΟΝΥΜΑ

Θέλω να μετατρέψω π.χ. τα ετερόνυμα κλάσματα $\frac{3}{4}$ και $\frac{2}{10}$ σε ομώνυμα.

- Βρίσκω το Ε.Κ.Π. (Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο) των παρονομαστών.
Ε.Κ.Π.(4, 10) = 20.
Το 20 θα είναι ο κοινός παρονομαστής των τελικών (ομώνυμων) κλασμάτων.
- Βάζω "καπελάκια" πάνω από τα κλάσματα: $\frac{3}{4}, \frac{2}{10}$
- Μέσα στα καπελάκια γράφω τέτοιους αριθμούς, έτσι ώστε όταν πολλαπλασιαστούν με το 4 και με το 10 αντίστοιχα, να δίνουν το Ε.Κ.Π., δηλαδή το 20.
- Στο α' καπελάκι γράφω 5 (αφού $5 \times 4 = 20$).
Στο β' καπελάκι γράφω 2 (αφού $2 \times 10 = 20$). $\Rightarrow \frac{5}{4}, \frac{2}{10}$
- Πολλαπλασιάζω τους όρους του α' κλάσματος με το 5, και του β' με το 2.
- Τα αρχικά κλάσματα $\frac{3}{4}, \frac{2}{10}$ γίνονται: $\frac{15}{20}, \frac{4}{20}$.