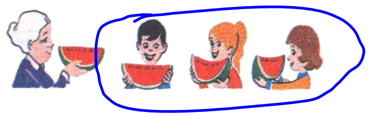
ΚΛΑΣΜΑ - ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΑΔΑ

✓ 1 αντικείμενο ή 1 ομάδα αντικειμένων είναι 1 ακέραιη μονάδα.

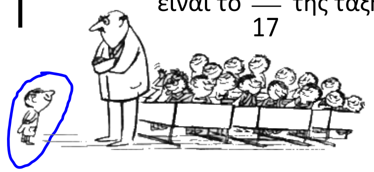
Π.χ.
1 καρπούζι:  1 σχολική τάξη: 

✓ Ένα κομμάτι της ακέραιης μονάδας λέγεται κλασματικός αριθμός ή κλάσμα*.

Π.χ.
Τα 3 από τα 4 **ίσα** κομμάτια που έκοψε η γιαγιά το καρπούζι είναι τα $\frac{3}{4}$ του καρπουζιού.



Το 1 από τα 17 παιδιά της τάξης είναι το $\frac{1}{17}$ της τάξης.



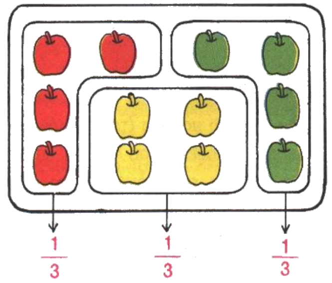
αριθμητής 3 — Δείχνει πόσα κομμάτια θα πάρω.
παρονομαστής 4 — Δείχνει σε πόσα κομμάτια έχω χωρίσει την μονάδα.
όροι

Το ένα κομμάτι από όλα τα κομμάτια στα οποία έχω χωρίσει την μονάδα, λέγεται κλασματική μονάδα.

Π.χ.
Η τάξη έχει 17 παιδιά.
Το κάθε 1 παιδί, δηλαδή το $\frac{1}{17}$ της τάξης, είναι μία κλασματική μονάδα.

* *Η λέξη «κλάσμα» μάς έρχεται από τα αρχαία και σημαίνει «κομμάτι».*

ΠΩΣ ΒΡΙΣΚΩ ΤΗΝ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΑΔΑ ΕΝΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ



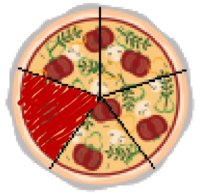
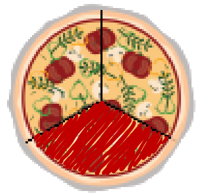
Για να βρω το $\frac{1}{3}$ των 12 μήλων, διαιρώ 12 δια 3 (χωρίζω τα 12 μήλα σε 3 μέρη και παίρνω το 1).

12 : 3 = 4

Το $\frac{1}{3}$ των 12 μήλων είναι 4 μήλα.

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ

Ανάμεσα σε δύο κλασματικές μονάδες:
μικρότερη είναι εκείνη που έχει τον μεγαλύτερο παρονομαστή.

$\frac{1}{5}$   $\frac{1}{3}$

$$\mathbf{\frac{1}{5} < \frac{1}{3}}$$

Όσο μεγαλύτερος είναι ο παρονομαστής,
δηλ σε όσο περισσότερα κομμάτια κόψω την πίτσα,
τόσο μικρότερο θα είναι το κάθε κομμάτι.

Π.χ.
$$\frac{1}{12} < \frac{1}{9} < \frac{1}{7} < \frac{1}{4} < \frac{1}{6} < \frac{1}{2}$$

ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΑΔΑ

Όπως και με τους φυσικούς αριθμούς, έτσι και με τα κλάσματα, όταν ξέρω μια ποσότητα (ένα κλάσμα) ενός αριθμού και θέλω να βρω μια άλλη ποσότητα (ένα άλλο κλάσμα), μπορώ να κάνω **αναγωγή στην κλασματική μονάδα**.

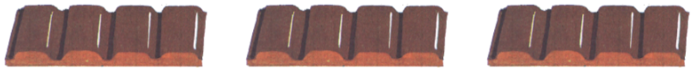
Π.χ. Τα $\frac{5}{6}$ των 12 μήλων είναι 10 μήλα. Πόσα μήλα είναι τα $\frac{2}{6}$ των 12 μήλων;

ΛΥΣΗ: Κάνω αναγωγή στην κλασματική μονάδα, για να βρω πρώτα το $\frac{1}{6}$ των 12 μήλων.

Το $\frac{1}{6}$ των 12 μήλων είναι 12 **:** 6 = 2 μήλα. Άρα τα $\frac{2}{6}$ είναι 2 **·** 2 = 4 μήλα.

ΚΑΘΕ ΚΛΑΣΜΑ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΓΡΑΦΕΙ ΩΣ ΔΙΑΙΡΕΣΗ

Θέλω να μοιράσω 3 σοκολάτες σε 4 παιδιά.
Για να βρω πόση σοκολάτα θα πάρει το κάθε παιδί, πρέπει να κάνω την διαίρεση 3 : 4.



Εναλλακτικά, μπορώ να χωρίσω κάθε σοκολάτα σε 4 ίσα μέρη, για να πάρει το κάθε ένα παιδί το 1/4 από κάθε σοκολάτα.

Επειδή οι σοκολάτες είναι 3, το κάθε παιδί θα πάρει 3 φορές από $\frac{1}{4}$, δηλ. $\frac{3}{4}$.

Βλέπω ότι $3 : 4 = \frac{3}{4}$. Άρα κάθε κλάσμα μπορεί να γραφεί ως διαίρεση: $\frac{3}{4} = 3 : 4$

ΚΑΘΕ ΦΥΣΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΓΡΑΦΕΙ ΩΣ ΚΛΑΣΜΑ

✷ Βάζω παρονομαστή το 1, και αριθμητή τον αριθμό.

Π.χ. $5 = \frac{5}{1}$, $26 = \frac{26}{1}$

✷ (ή:) Βάζω παρονομαστή οποιονδήποτε αριθμό, και αριθμητή το γινόμενο του παρονομαστή με τον αριθμό που έχω.

Π.χ. $5 = \frac{20}{4}$ (παρονομαστής: π.χ. το 4, αριθμητής: 4 x 5 = 20)

$5 = \frac{35}{7}$ (παρονομαστής: π.χ. το 7, αριθμητής: 7 x 5 = 35)

ΔΕΚΑΔΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Είναι τα κλάσματα που έχουν ως παρονομαστή το 10, το 100, το 1.000, κλπ.

Για να μετατρέψω ένα απλό κλάσμα σε δεκαδικό, διαιρώ τον αριθμητή δια τον παρονομαστή **αν διαιρείται ακριβώς** (αν η διαίρεση δεν αφήνει υπόλοιπο):

$\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0{,}75.$ Ξέρω όμως ότι: $0{,}75 = \frac{75}{100}$.

Επομένως: $\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0{,}75 = \frac{75}{100}$.

ΜΕΤΑΤΡΕΠΩ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΣΕ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

Για να μετατρέψω ένα οποιοδήποτε κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό, διαιρώ τον αριθμητή του κλάσματος με τον παρονομαστή.

Π.χ. Το κλάσμα $\frac{3}{4}$ γίνεται → 3 **:** 4 = 0,75

Σημείωση:
Αν η διαίρεση δεν είναι τέλεια, το κλάσμα δεν μπορεί να μετατραπεί σε δεκαδικό.

ΜΕΤΑΤΡΕΠΩ ΔΕΚΑΔΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΣΕ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

✷ α. Γράφω τον αριθμητή του κλάσματος.
β. Παίρνω τόσα δεκαδικά ψηφία όσα είναι τα μηδενικά του παρονομαστή.

Π.χ. Έχω το κλάσμα $\frac{75}{100}$. Ο παρονομαστής έχει 2 μηδενικά.

α. Γράφω το 75.
β. Παίρνω 2 δεκαδικά ψηφία από δεξιά προς τα αριστερά (επειδή 2 είναι και τα μηδενικά του παρονομαστή) και ο αριθμός που βγαίνει είναι ο αριθμός **0,75** .

✷ (Εναλλακτικά): Διαιρώ τον αριθμητή δια τον παρονομαστή:

$\frac{75}{100} = 75 : 100 = 0{,}75$

ΜΕΤΑΤΡΕΠΩ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ ΣΕ ΔΕΚΑΔΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

α. Σχεδιάζω την γραμμή του κλάσματος.

β. Ως αριθμητή γράφω τον αριθμό χωρίς την υποδιαστολή (και χωρίς τα μηδενικά που ίσως βρίσκονται αριστερά του).

γ. Ως παρονομαστή γράφω το 1, με τόσα μηδενικά όσα είναι και τα δεκαδικά ψηφία του δεκαδικού αριθμού.

Π.χ. Έχω τον δεκαδικό αριθμό 0,016 .
α. Σχεδιάζω την γραμμή του κλάσματος.
β. Ως αριθμητή γράφω το 16.
γ. Ως παρονομαστή γράφω το 1 με τρία μηδενικά (αφού το 0,016 έχει τρία δεκαδικά ψηφία).
Επομένως, ο αριθμός 0,016 ως κλάσμα γίνεται : $\frac{16}{1000}$.

ΓΝΗΣΙΑ - ΚΑΤΑΧΡΗΣΤΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

✷ **Γνήσια** λέγονται τα κλάσματα που έχουν αριθμητή μικρότερο από τον παρονομαστή, δηλαδή είναι μικρότερα από την μονάδα (<1).

Το $\frac{2}{3}$ είναι γνήσιο κλάσμα (σημαίνει πως έχω χωρίσει την μονάδα σε 3 μέρη και έχω πάρει τα 2).

Όλα τα γνήσια κλάσματα βρίσκονται μεταξύ του 0 και του 1.

✷ Τα κλάσματα με αριθμητή ίσο με τον παρονομαστή, είναι ίσα με την μονάδα.

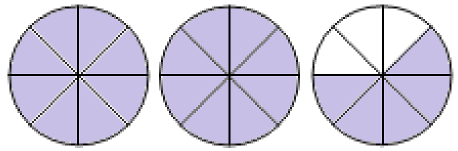
Το $\frac{3}{3}$ είναι μία μονάδα (σημαίνει πως έχω χωρίσει την μονάδα σε 3 μέρη και έχω πάρει και τα 3, δηλαδή ολόκληρη την μονάδα).

✷ **Καταχρηστικά** λέγονται τα κλάσματα που έχουν αριθμητή μεγαλύτερο από τον παρονομαστή, δηλαδή είναι μεγαλύτερα από την μονάδα (>1).

Το $\frac{5}{3}$ είναι ένα καταχρηστικό κλάσμα (σημαίνει πως έχω πάρει 2 μονάδες, τις έχω χωρίσει σε 3 ίσα μέρη την κάθε μία, και έχω πάρει όλη την μία μονάδα και 2 μέρη από την δεύτερη).

ΜΕΙΚΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Μεικτοί λέγονται οι αριθμοί που αποτελούνται από ένα ακέραιο μέρος και από ένα κλασματικό.



Π.χ. Ο αριθμός $2\frac{5}{8}$ είναι **μεικτός**.
Αποτελείται από 2 μονάδες και από τα $\frac{5}{8}$ μιας τρίτης μονάδας.

ΜΕΤΑΤΡΕΠΩ ΕΝΑΝ ΜΕΙΚΤΟ ΑΡΙΘΜΟ ($2\frac{5}{8}$) ΣΕ ΑΠΛΟ -ΚΑΤΑΧΡΗΣΤΙΚΟ- ΚΛΑΣΜΑ ($\frac{21}{8}$)

✓ Πολλαπλασιάζω τις ακέραιες μονάδες (το 2) με τον παρονομαστή (το 8).
✓ Στο γινόμενο που θα βρω (το 16) προσθέτω τον αριθμητή (το 5).
✓ Τον αριθμό που βρίσκω (21) τον βάζω αριθμητή.
✓ Παρονομαστή αφήνω τον ίδιο (το 8).

Έτσι: $\mathbf{2\frac{5}{8} = \frac{21}{8}}$

(2 x 8 = 16, 16 + 5 = 21)

ΜΕΤΑΤΡΕΠΩ ΕΝΑ ΑΠΛΟ -ΚΑΤΑΧΡΗΣΤΙΚΟ- ΚΛΑΣΜΑ ($\frac{21}{8}$) ΣΕ ΜΕΙΚΤΟ ΑΡΙΘΜΟ ($2\frac{5}{8}$)

✓ Διαιρώ τον αριθμητή δια τον παρονομαστή (21 : 8).
✓ Το πηλίκο που θα βρω (δηλαδή το 2) είναι οι ακέραιες μονάδες.
✓ Το υπόλοιπο (αν υπάρχει - εδώ είναι το 5) είναι το κλάσμα που περισσεύει.

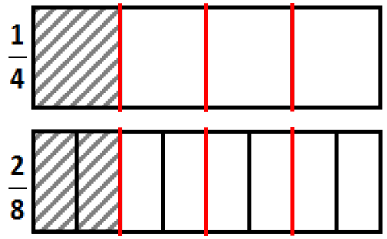
Δηλαδή: $\mathbf{\frac{21}{8} = 2\frac{5}{8}}$

(21 : 8 = 2, με υπόλοιπο 5)

Στις πράξεις, χρησιμοποιώ μεικτό αριθμό ή απλό κλάσμα, ανάλογα με το τι με βολεύει κάθε φορά.

ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Ισοδύναμα λέμε τα κλάσματα που έχουν την ίδια αξία· που εκφράζουν δηλαδή την ίδια ποσότητα.



Την μονάδα πάνω δεξιά την έχουμε χωρί-σει σε 4 μέρη.
Την μονάδα από κάτω την έχουμε χωρίσει σε 8 μέρη.

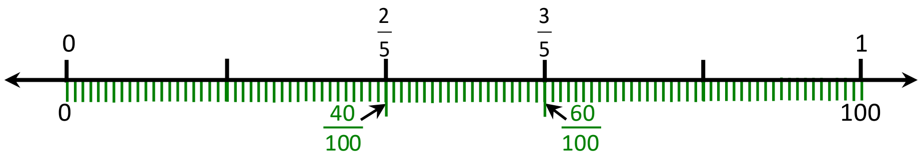
Το $\frac{1}{4}$ της πάνω μονάδας και τα $\frac{2}{8}$ της κάτω μονάδας εκφράζουν την ίδια ποσότη-τα, παρ' όλο που έχουν διαφορετικούς όρους.

Λέμε ότι: Τα κλάσματα $\frac{1}{4}$ και $\frac{2}{8}$ είναι ισοδύναμα.

ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩ ΤΑ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ για να εντοπίζω "κρυμμένους" αριθμούς

Παράδειγμα: Μεταξύ τού $\frac{2}{5}$ και του $\frac{3}{5}$ δεν φαίνεται να υπάρχει άλλος αριθμός.

- Αν όμως πάρω π.χ. τα διπλάσια ισοδύναμά τους, δηλαδή το $\frac{4}{10}$ και το $\frac{6}{10}$, τότε εμφανίζεται άλλος ένας αριθμός : το $\frac{5}{10}$.
- Αν πάρω (π.χ.) τα εικοσαπλάσια ισοδύναμά τους, δηλαδή το $\frac{40}{100}$ και το $\frac{60}{100}$, τότε ανάμεσά τους εμφανίζονται άλλα 19 κλάσματα.



(Το ίδιο πράγμα μπορεί να συνεχίζεται άπειρες φορές και να μας δίνει άπειρα "καινούρια" κλάσματα.)

ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΖΩ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ...

✷ ...πολλαπλασιάζοντας τους όρους του κλάσματος με τον **ίδιο αριθμό**:

$\frac{3}{8} \overset{\times 2}{=} \frac{6}{16} \overset{\times 10}{=} \frac{60}{160}$ | $\frac{7}{9} \overset{\times 3}{=} \frac{21}{27} \overset{\times 2}{=} \frac{42}{54}$ | $\frac{4}{5} \overset{\times 2}{=} \frac{8}{10} \overset{\times 5}{=} \frac{40}{50}$

✷ ...διαιρώντας τους όρους του κλάσματος με τον **ίδιο αριθμό**:

$\frac{20}{60} \overset{:5}{=} \frac{4}{12} \overset{:4}{=} \frac{1}{3}$ | $\frac{24}{60} \overset{:4}{=} \frac{6}{15} \overset{:3}{=} \frac{2}{5}$ | $\frac{54}{81} \overset{:9}{=} \frac{6}{9} \overset{:3}{=} \frac{2}{3}$

ΕΛΕΓΧΩ ΕΑΝ ΔΥΟ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ

Πολλαπλασιάζω τους όρους τους "χιαστί", δηλαδή σταυρωτά:
Αν τα σταυρωτά γινόμενα **είναι** ίσα, **τα** κλάσματα **είναι** ισοδύναμα.

Π.χ. $\frac{4}{5}$, $\frac{12}{15}$ → $\frac{4}{5} \times \frac{12}{15}$

4 x 15 = 60, 5 x 12 = 60. Τα σταυρωτά γινόμενα είναι ίσα. Τα κλάσματα $\frac{4}{5}$ και $\frac{12}{15}$ είναι **ισοδύναμα**.

ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ - ΑΝΑΓΩΓΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Όταν διαιρώ (και τους δύο) τους όρους του κλάσματος με κάποιον αριθμό, δημιουργώ ένα άλλο κλάσμα, ισοδύναμο με το αρχικό, αλλά με μικρότερους όρους. Κάνω δηλαδή απλοποίηση.

Όταν οι όροι του κλάσματος δεν μπορούν να διαιρεθούν άλλο, λέμε ότι το κλάσμα είναι ανάγωγο.

Π.χ. Το κλάσμα $\frac{20}{60}$ αν απλοποιηθεί, θα γίνει $\frac{1}{3}$.

$\frac{20}{60} \overset{:5}{=} \frac{4}{12} \overset{:4}{=} \frac{1}{3}$

Το $\frac{1}{3}$ δεν απλοποιείται άλλο: Είναι **ανάγωγο**.

ΑΠΛΟΠΟΙΩ ΕΝΑ ΚΑΤΑΧΡΗΣΤΙΚΟ ΚΛΑΣΜΑ

Το κλάσμα $\frac{25}{6}$ λέγεται **καταχρηστικό**, επειδή είναι μεγαλύτερο από 1 μονάδα.

Για να το απλοποιήσω, δηλαδή για να βγάλω τις μονάδες που κρύβει:

διαιρώ τον αριθμητή δια τον παρονομαστή.

25 : 6 = 4, και υπόλοιπο 1. **Επομένως:** $\mathbf{\frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}}$

ΟΜΩΝΥΜΑ - ΕΤΕΡΩΝΥΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Ομώνυμα λέγονται τα κλάσματα που έχουν κοινούς (όμοιους) παρονομαστές.

Π.χ. $\frac{2}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{10}{8}$, $\frac{20}{8}$

Ετερώνυμα λέγονται τα κλάσματα που έχουν διαφορετικούς παρονομαστές.

Π.χ. $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{12}{4}$

ΜΕΤΑΤΡΕΠΩ ΕΤΕΡΩΝΥΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΣΕ ΟΜΩΝΥΜΑ

Θέλω να μετατρέψω π.χ. τα ετερώνυμα κλάσματα $\frac{3}{4}$ και $\frac{2}{10}$ σε ομώνυμα.

1. **Βρίσκω το Ε.Κ.Π.** (Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο) των παρονομαστών.
   Ε.Κ.Π.(4, 10) = 20.
   Άρα, το 20 θα είναι ο κοινός παρονομαστής των τελικών (ομώνυμων) κλασμάτων.

2. **Βάζω "καπελάκια" πάνω από τα κλάσματα:** $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{10}$

3. **Μέσα στα καπελάκια γράφω τέτοιους αριθμούς, έτσι ώστε** όταν πολλαπλασιαστούν με το 4 και με το 10 αντίστοιχα, **να δίνουν το Ε.Κ.Π.**, δηλαδή το 20.

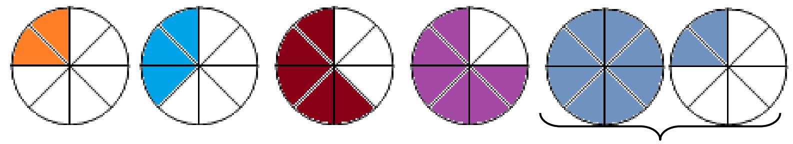
4. **Στο α΄ καπελάκι γράφω 5** (αφού 5 x 4 = 20).
   Στο β΄ καπελάκι γράφω 2 (αφού 2 x 10 = 20). ⇨ $\overset{5}{\frac{3}{4}}$, $\overset{2}{\frac{2}{10}}$

5. **Πολλαπλασιάζω τους όρους του α΄ κλάσματος με το 5, και του β΄ με το 2.**

6. **Τα αρχικά κλάσματα** $\mathbf{\frac{3}{4}}$, $\mathbf{\frac{2}{10}}$ **γίνονται :** $\mathbf{\frac{15}{20}}$, $\mathbf{\frac{4}{20}}$.

ΣΥΓΚΡΙΝΩ: α) ΟΜΩΝΥΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Ο μικρότερος αριθμητής δείχνει μικρότερο κλάσμα *(αφού τα κλάσματα με μικρότερους αριθμητές δείχνουν λιγότερα μέρη της μονάδας).*



$\frac{2}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{10}{8}$

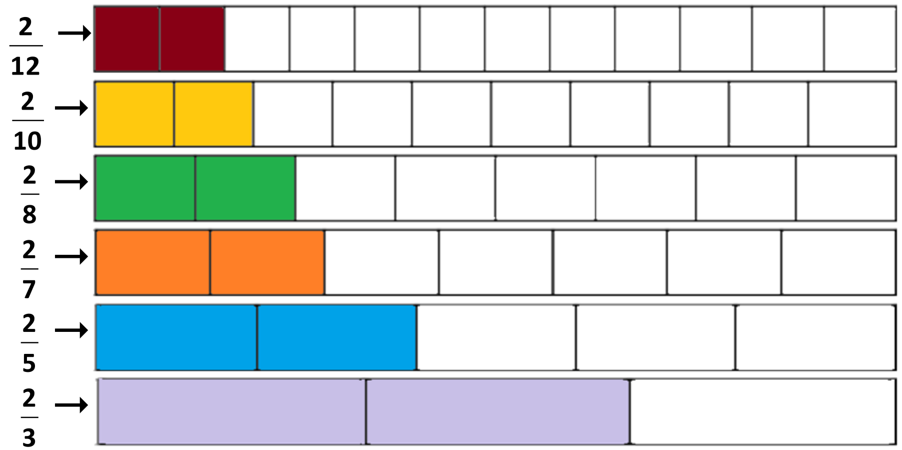
Έτσι: $\mathbf{\frac{2}{8} < \frac{3}{8} < \frac{5}{8} < \frac{6}{8} < \frac{10}{8}}$

ΣΥΓΚΡΙΝΩ: β) ΕΤΕΡΩΝΥΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ, ΜΕ ΙΔΙΟΥΣ ΑΡΙΘΜΗΤΕΣ

Αφού οι αριθμητές είναι ίδιοι, συγκρίνω τους παρονομαστές.

Ο μεγαλύτερος παρονομαστής δείχνει μικρότερο κλάσμα.

Οι αριθμητές είναι ίδιοι, επομένως κάθε κλάσμα δείχνει ίδιο αριθμό κομματιών. Οι μεγαλύτεροι παρονομαστές δείχνουν πως η μονάδα έχει χωριστεί σε περισσότερα κομμάτια, άρα και μικρότερα.



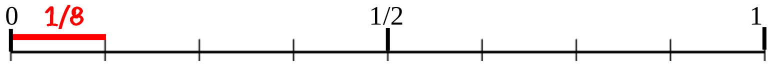
$\mathbf{\frac{2}{12} < \frac{2}{10} < \frac{2}{8} < \frac{2}{7} < \frac{2}{5} < \frac{2}{3}}$

ΣΥΓΚΡΙΝΩ: γ) ΕΤΕΡΩΝΥΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ, ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΗΤΕΣ…

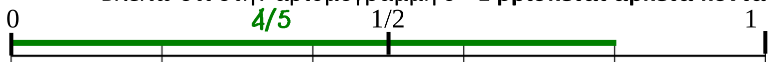
...παρατηρώντας την σχέση που έχουν οι όροι μεταξύ τους.

Π.χ. Έχω τα κλάσματα $\frac{1}{8}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{12}{20}$, $\frac{7}{16}$.

α. Στο $\frac{1}{8}$ ο αριθμητής είναι πολύ μικρότερος από τον παρονομαστή.
Βλέπω ότι στην αριθμογραμμή 0 - 1 **βρίσκεται πιο κοντά στο 0**.



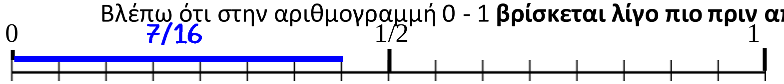
β. Στο $\frac{4}{5}$ ο αριθμητής απέχει πολύ λίγο από τον παρονομαστή.
Βλέπω ότι στην αριθμογραμμή 0 - 1 **βρίσκεται αρκετά κοντά στην μονάδα**.



γ. Στο $\frac{5}{10}$ ο αριθμητής είναι ακριβώς ο μισός από τον παρονομαστή.
Βλέπω ότι στην αριθμογραμμή 0 - 1 **βρίσκεται ακριβώς στην μέση**.

δ. Στο $\frac{12}{20}$ ο αριθμητής είναι λίγο πιο μεγάλος από το μισό του παρονομαστή.
Βλέπω ότι στην αριθμογραμμή 0 - 1 **βρίσκεται λίγο πιο μετά από το μισό**.

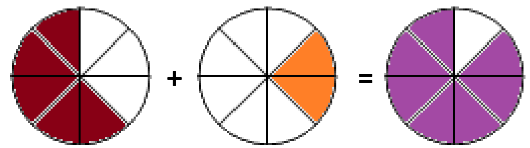
ε. Στο $\frac{7}{16}$ ο αριθμητής είναι λίγο πιο μικρός από το μισό του παρονομαστή.
Βλέπω ότι στην αριθμογραμμή 0 - 1 **βρίσκεται λίγο πιο πριν από το μισό**.



Επομένως: $\frac{1}{8} < \frac{7}{16} < \frac{5}{10} < \frac{12}{20} < \frac{4}{5}$.

✷ (Εναλλακτικά:) Μετατρέπω τα κλάσματα σε δεκαδικούς και βλέπω ποιος είναι ο πιο μεγάλος. ($\frac{1}{8}$ = 1: 8 = **0,125** / $\frac{4}{5}$ = 4 : 5 = **0,8** / κλπ.)

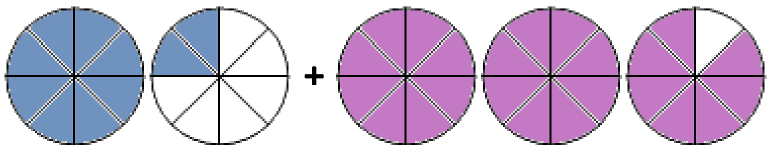
ΠΡΟΣΘΕΤΩ ΟΜΩΝΥΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ



$\frac{5}{8} + \frac{2}{8} = \frac{7}{8}$

Στα ομώνυμα κλάσματα προσθέτω μόνο τους αριθμητές.
Παρονομαστής μένει ο ίδιος.

ΠΡΟΣΘΕΤΩ ΜΕΙΚΤΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ (που έχουν ΟΜΩΝΥΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ)



$\left\{ 1\frac{2}{8} \quad + \quad 2\frac{7}{8} \right\}$

✷ Μετατρέπω τους μεικτούς αριθμούς σε απλά κλάσματα:

$1\frac{2}{8} + 2\frac{7}{8} = \frac{10}{8} + \frac{23}{8} = \frac{33}{8}$, που με την απλοποίηση γίνεται: $4\frac{1}{8}$

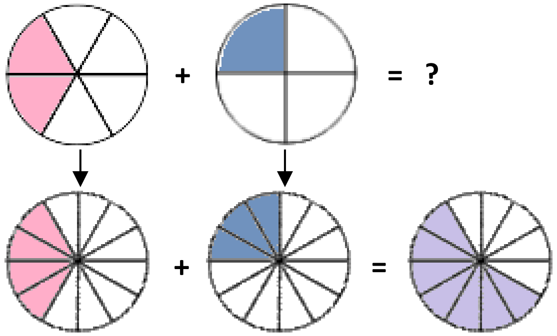
✷ (Εναλλακτικά:) Προσθέτω ξεχωριστά ακέραιο με ακέραιο και κλάσμα με κλάσμα:

α. $1\frac{2}{8} + 2\frac{7}{8} = 3\frac{9}{8}$

β. Απλοποιώ το $\frac{9}{8}$, μετατρέποντάς το σε $1\frac{1}{8}$.

γ. Το $3\frac{9}{8}$ **γίνεται** $3 + \left(1\frac{1}{8}\right)$, δηλαδή: $4\frac{1}{8}$

ΠΡΟΣΘΕΤΩ ΕΤΕΡΩΝΥΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ



$$\overset{2}{\frac{2}{6}} + \overset{3}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

Τα ετερώνυμα κλάσματα τα μετατρέπω σε ομώνυμα **και μετά κάνω την πρόσθεση.**

ΠΡΟΣΘΕΤΩ ΜΕΙΚΤΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ (που έχουν ΕΤΕΡΩΝΥΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ)

✶ Μετατρέπω τους μεικτούς αριθμούς σε απλά κλάσματα, μετατρέπω μετά σε ομώνυμα **και κάνω την πρόσθεση:**

Π.χ. $2\frac{2}{8} + 1\frac{4}{6} = \overset{3}{\frac{18}{8}} + \overset{4}{\frac{10}{6}} = \frac{54}{24} + \frac{40}{24} = \frac{94}{24} = 3\frac{22}{24} = 3\frac{11}{12}$

✶ (Εναλλακτικά:) Προσθέτω ξεχωριστά τους ακεραίους και ξεχωριστά τα κλάσματα (αφού τα μετατρέψω πρώτα σε ομώνυμα).

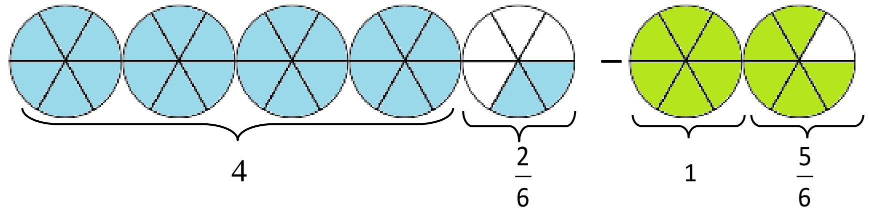
$$2\overset{3}{\frac{2}{8}} + 1\overset{4}{\frac{4}{6}} = 2\frac{6}{24} + 1\frac{16}{24} = 3\frac{22}{24} = 3\frac{11}{12}$$

ΑΦΑΙΡΩ ΟΜΩΝΥΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΙΚΤΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

Κάνω τα ίδια ακριβώς όπως και στην πρόσθεση.

ΑΦΑΙΡΩ ΜΕΙΚΤΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ, ΣΤΟΥΣ ΟΠΟΙΟΥΣ όμως ΤΟ β΄ ΚΛΑΣΜΑ ΕΙΝΑΙ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟ ΑΠΟ ΤΟ α΄

Π.χ. Έχω την αφαίρεση $4\frac{2}{6} - 1\frac{5}{6}$.

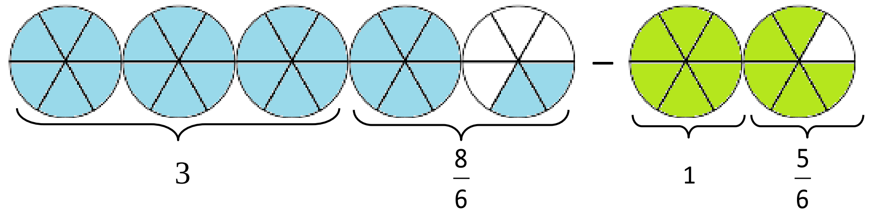


Αν αφαιρέσω ξεχωριστά τους ακέραιους και ξεχωριστά τα κλάσματα, βλέπω πως **η αφαίρεση 4 (μονάδες) – 1 (μονάδα) γίνεται,**
όμως η αφαίρεση 2 (έκτα) **– 5** (έκτα) **δεν γίνεται.**

Έτσι:

Παίρνω 1 μονάδα από τις 4, την κάνω έκτα ($\frac{6}{6}$) και την προσθέτω στα $\frac{2}{6}$.

Οπότε, το $4\frac{2}{6}$ γίνεται $3\frac{8}{6}$.



Οπότε, η αφαίρεση αλλάζει μορφή και γίνεται ως εξής:

$$\mathbf{4\frac{2}{6} - 1\frac{5}{6} = 3\frac{8}{6} - 1\frac{5}{6} = 2\frac{3}{6} = 2\frac{1}{2}}$$

(Θυμάμαι πάντα να απλοποιώ το κλάσμα στο τέλος!)

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Είναι οι αριθμοί που
αν πολλαπλασιαστούν μεταξύ τους, το γινόμενό τους είναι το 1.

Π.χ. Οι αριθμοί **2** και $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{12}$ και $\frac{12}{5}$, κλπ. είναι αντίστροφοι,

διότι: $2 \times \frac{1}{2} = 1$ $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$, $\frac{5}{12} \times \frac{12}{5} = 1$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΖΩ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

✱ Κλάσμα επί κλάσμα: $\frac{2}{4} \times \frac{3}{5}$

Πολλαπλασιάζω αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή.

$$\frac{2}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{2x3}{4x5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

✱ Ακέραιο επί κλάσμα: $4 \times \frac{2}{4}$

Πολλαπλασιάζω τον ακέραιο με τον αριθμητή, και **παρονομαστή αφήνω τον ίδιο:** $\frac{2}{4} \times 4 = \frac{2x4}{4} = \frac{8}{4} = 2$

✱ Πολλαπλασιάζω με μεικτό αριθμό: $1\frac{4}{6} \times 5$

Μετατρέπω τον μεικτό σε απλό κλάσμα και κάνω κανονικά τον πολλαπλασιασμό:

$$1\frac{4}{6} \times 5 = \frac{10}{6} \times 5 = \frac{10x5}{6} = \frac{50}{6} = 8\frac{2}{6} = 8\frac{1}{3}$$

ΒΡΙΣΚΩ ΤΟ ΚΛΑΣΜΑ ΕΝΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ

Για να βρω το κλάσμα ενός αριθμού, πολλαπλασιάζω το κλάσμα με τον αριθμό.

Π.χ. $\frac{3}{4}$ του 12 $= \frac{3}{4} \times 12 = \frac{3x12}{4} = \frac{36}{4} = 9$

ΔΙΑΙΡΩ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

1. Διαίρεση ομώνυμων κλασμάτων: $\frac{12}{20} : \frac{6}{20}$

Σε διαίρεση με ομώνυμα κλάσματα απλώς διαιρώ τους αριθμητές.

$$\frac{12}{20} : \frac{6}{20} = 12 : 6 = 2$$

2. Διαίρεση ετερώνυμων κλασμάτων: $\frac{3}{4} : \frac{2}{3}$

Σε διαίρεση με ετερώνυμα κλάσματα:

✱ Αντιστρέφω τον διαιρέτη (τον β΄ αριθμό) και κάνω πολλαπλασιασμό.

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3x3}{4x2} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$$

✱ (Εναλλακτικά:) Τα κάνω ομώνυμα και διαιρώ τους αριθμητές.

3. Διαίρεση με μεικτούς αριθμούς: $2\frac{1}{5} : 1\frac{2}{9}$

Μετατρέπω τους μεικτούς σε απλά κλάσματα και κάνω την διαίρεση, όπως παραπάνω.

$$2\frac{1}{5} : 1\frac{2}{9} = \frac{11}{5} : \frac{11}{9} = \frac{\cancel{11}}{5} \cdot \frac{9}{\cancel{11}} = \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5}$$

4. Διαίρεση με διαιρετέο ή διαιρέτη ακέραιο: $5 : \frac{7}{9}$, $\frac{4}{5} : 2$

Μετατρέπω τον ακέραιο σε κλάσμα και κάνω την διαίρεση, όπως παραπάνω.

α) $5 : \frac{7}{9} = \frac{5}{1} : \frac{7}{9} = \frac{5}{1} \cdot \frac{9}{7} = \frac{45}{7} = 6\frac{3}{7}$

(Εναλλακτικά:) $5 : \frac{7}{9} = 5 \cdot \frac{9}{7} = \frac{45}{7} = 6\frac{3}{7}$

β) $\frac{4}{5} : 2 = \frac{4}{5} : \frac{2}{1} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4x1}{5x2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

ΔΥΟ ΝΕΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ για ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟ και ΔΙΑΙΡΕΣΗ

α. Πολλαπλασιασμός

Μέχρι τώρα λέγαμε πως, όταν ξέρουμε την αξία του ενός και ψάχνουμε την αξία των πολλών, κάνουμε πολλαπλασιασμό.

Από τώρα και στο εξής αντί για τα "πολλά", θα έχουμε στο μυαλό μας "κάποια άλλη ποσότητα" (διαφορετική από την μονάδα).

Δηλαδή:

ΟΤΑΝ ΞΕΡΟΥΜΕ ΤΗΝ ΑΞΙΑ ΤΗΣ ΜΟΝΑΔΑΣ (το 1) ΚΑΙ ΨΑΧΝΟΥΜΕ ΝΑ ΒΡΟΥΜΕ ΚΑΠΟΙΑ ΑΛΛΗ ΠΟΣΟΤΗΤΑ (τα 3, τα $\frac{4}{6}$, τα $\frac{2}{9}$, κλπ.):

Πολλαπλασιάζουμε την ποσότητα με την αξία της μονάδας.

Π.χ. : Το 1 κ. μήλα κοστίζει 2 €. Πόσο κοστίζουν τα $\frac{3}{4}$ του κιλού;

Λύση: Κοστίζουν $\frac{3}{4} \times 2 = \frac{3x2}{4} = \frac{6}{4} = 1\frac{2}{4} = 1\frac{1}{2}$

β. Διαίρεση

Μέχρι τώρα λέγαμε πως, όταν ξέρουμε την αξία των πολλών και ψάχνουμε την αξία του ενός, κάνουμε πολλαπλασιασμό.

Από τώρα και στο εξής αντί για τα "πολλά", θα έχουμε στο μυαλό μας "κάποια άλλη ποσότητα" (διαφορετική από την μονάδα).

Δηλαδή:

ΟΤΑΝ ΞΕΡΟΥΜΕ ΤΗΝ ΑΞΙΑ ΜΙΑΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΨΑΧΝΟΥΜΕ ΝΑ ΒΡΟΥΜΕ ΤΗΝ ΑΞΙΑ ΤΗΣ ΜΟΝΑΔΑΣ (το 1), ΚΑΝΟΥΜΕ ΔΙΑΙΡΕΣΗ:

Π.χ. : Τα $\frac{3}{4}$ της απόστασης Αθήνα - Ρώμη (σε ευθεία γραμμή) είναι περίπου 750 χμ. Πόσα χιλιόμετρα είναι η συνολική απόσταση (όλη η απόσταση) ;

Λύση:

Ξέρουμε μια ποσότητα (τα $\frac{3}{4}$) και ψάχνουμε να βρούμε όλη την ποσότητα, (όλη την απόσταση), δηλαδή την μονάδα. Θα κάνουμε διαίρεση:

$750 : \frac{3}{4} = 750 \times \frac{4}{3} = \frac{3000}{3} = 1.000$ χμ.