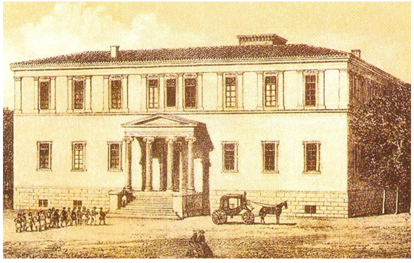


Π.Π. ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΚΑΤ/ΝΣΗΣ

27 Απριλίου 2015

Τμήματα Τεχνολογικής: Ζ4

Διάρκεια: 3 ώρες

1. (α') Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Δείξτε ότι:

   i. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

   ii. Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 10

   (β') Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

   i. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

   ii. Για κάθε συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε διάστημα $[a, b]$, ισχύει $\displaystyle\int_a^b f'(x)dx = f(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$

   iii. Αν z μιγαδικός αριθμός και $\overline{z}$ ο συζυγής του, τότε ισχύει $|z| = |\overline{z}| = |-z|$.

   iv. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο με την ευθεία $y = x$, τότε το σημείο αυτό ανήκει και στο γράφημα της f^{-1}.

   v. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f''(x) > 0$ για καθε πραγματικό αριθμό x.

Μονάδες $5 \times 3 = 15$

2. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζω τον μιγαδικό $z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} z_n$ με $z_0 = 2$. Έστω M_n η εικόνα του z_n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(α') Υπολογίστε τους $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ και δείξτε ότι $z_4 \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

(β') Να παρασταθούν στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες $M_0,\ M_1,\ M_2$,-M_3 και M_4.

Μονάδες 2

(γ') Έστω $u_n = |z_n|$, $n \in \mathbb{N}$.

i. Δείξτε ότι η ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια γεωμετρική πρόοδος με

$$u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

Μονάδες 4

ii. Να βρείτε τον μικρότερο φυσικό n_0 έτσι ώστε όλοι οι μιγαδικοί M_k με $k \geq n_0$ να ανήκουν σε δίσκο με κέντρο το O και ακτίνα $0,1$. Υποθέστε ότι $\dfrac{2\ln 20}{\ln 2} \approx 8,64$.

Μονάδες 4

(δ') i. Δείξτε ότι $\forall n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = i$.

Μονάδες 3

ii. Δείξτε ότι το τρίγωνο OM_nM_{n+1} είναι ισοσκελές.

Μονάδες 4

iii. Αν $l_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_{n-1}M_n$, να βρείτε το όριο

$$\lim_{n\to+\infty} l_n$$

Μονάδες 4

3. Δίδεται συνάρτηση $f : (-\infty, -2) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \ln\Big|x+2\Big| + (2-\alpha)x^2$$

όπου $\alpha \in (2, +\infty)$.

(α′) Δείξτε ότι η συνάρτηση έχει ολικό μέγιστο, έστω $A(\alpha)$.

Μονάδες 5

(β′) Να υπολογίσετε το $A(\alpha)$ και να βρείτε το $\lim\limits_{\alpha \to 2^+} A(\alpha)$.

Μονάδες 5

(γ′) Αποδείξτε ότι υπάρχει περιοχή Δ του 2 έτσι ώστε ιχύει ότι $A(\alpha) > 0$, για κάθε $\alpha \in \Delta$.

Μονάδες 2

(δ′) Να βρείτε τις ασυμπτώτους της $f(x)$.

Μονάδες 5

(ε′) Δείξτε ότι η $f(x) = 0$ έχει 2 ακριβώς πραγματικές ρίζες $\rho_1 < \rho_2$ όταν $\alpha \in \Delta$, με Δ την περιοχή του ερωτήματος 3γ′ όπου $A(\alpha) > 0$.

Μονάδες 4

(ϝ′) Δείξτε ότι

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} (1 + \ln|2+x|)dx = (\alpha-2)(\rho_2-\rho_1)\left(\rho_2^2+\rho_1^2+\rho_1\rho_2+2(\rho_1+\rho_2)\right)$$

Μονάδες 4

4. Έστω $\alpha \in [0, +\infty)$ και $J_0(\alpha) = \int\limits_0^{\alpha} \frac{dt}{1+t}$ και για $n \in \mathbb{N}^*$ ορίζω

$$J_n(\alpha) = \int\limits_0^{\alpha} \frac{(t-\alpha)^n}{(1+t)^{n+1}} dt.$$

(α′) Υπολογίστε το $J_0(\alpha)$ και το $J_1(\alpha)$ συναρτήσει το α.

Μονάδες 4

(β′) Δείξτε ότι $J_{n+1}(\alpha) = \frac{(-1)^{n+1}\alpha^{n+1}}{n+1} + J_n(\alpha)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Μονάδες 5

(γ′) Αν $p(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$, δείξτε ότι

$$J_5(\alpha) = \ln(1+\alpha) - p(\alpha)$$

Μονάδες 4

(δ′) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $K(\alpha) = \int\limits_0^{\alpha} (t-\alpha)^5 dt.$

Μονάδες 3

(ε′) Δείξτε ότι $\forall \alpha \in [0, +\infty)$, ισχύει $\left| \ln(1+\alpha) - p(\alpha) \right| \leq \frac{\alpha^6}{6}$

Μονάδες 6

(ϝ′) Ποιά μαθηματική ερμηνεία θα δίναται στο αποτέλεσμα της προηγούμενης ερώτησης, 4ε′;

Μονάδες 3

Λύσεις του Διαγωνίσματος -*Τυπογραφικά λάθη είναι πιθανά και αναπόφευκτα!*-

1. (α΄) Θεώρημα σελίδα 253 Σχολικό Βιβλίο.

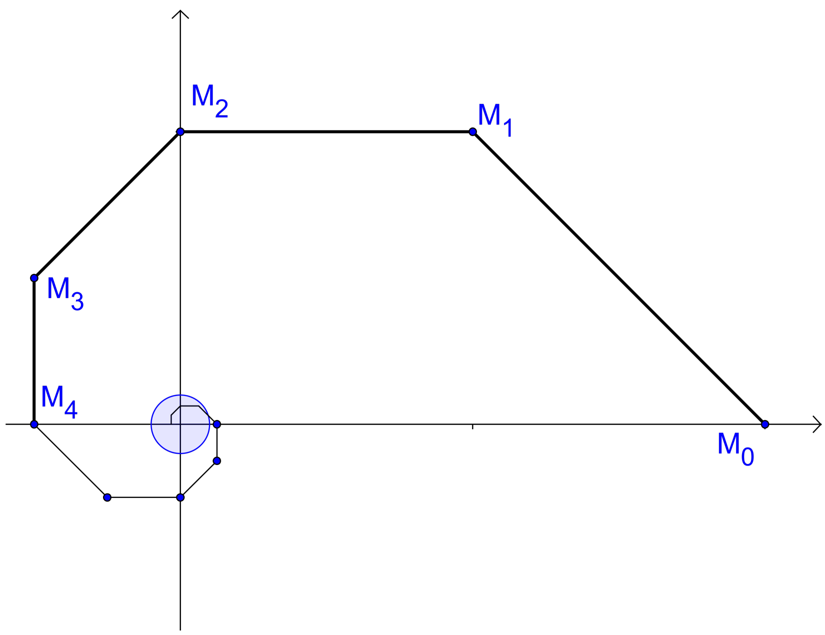
   (β΄)
   i. Σ
   ii. Λ
   iii. Σ
   iv. Σ
   v. Λ

■

2. (α΄)

$$\begin{aligned}
z_0 &= 2 \\
z_1 &= \frac{1+i}{2}\cdot 2 &&= 1+i \\
z_2 &= \frac{1+i}{2}(1+i) &&= \frac{1}{2}\cdot i = i \\
z_3 &= \frac{1+i}{2}i &&= \frac{i-1}{2} \\
z_4 &= \frac{1+i}{2}\cdot\frac{i-1}{2} &&= -\frac{1}{2}\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

   (β΄) *Παρατηρείστε ότι η διάταξη των εικόνων συμπεριφέρεται σαν την γνωστή μας σπείρα. Πράγματι, η άσκηση λαμβάνει υπόψη αυτό το μοτίβο.*



(γ΄) i. Παρατηρώ ότι: $|z_{n+1}| = \left|\frac{1+i}{2}\right| \cdot |z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$. Άρα, η $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γ. πρόδος με πρώτο όρο $u_0 = 2$ και λόγο $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Επομένως, $u_n = u_0 \cdot \lambda^n = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

ii. Ζητάμε να βρούμε ένα n_0 έτσι ώστε $|z_k| = 0,1$, για κάθε $k \geq n_0$. Ή ισοδύναμα, $u_{n_0} \leq 0,1 \Rightarrow 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n_0} \leq 0,1$.

$$\begin{aligned}
2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n_0} &\leq 0,1 \\
\ln 2 + n_0 \ln \frac{1}{\sqrt{2}} &\leq \ln 0,1 \\
\ln 2 + n_0 \left(\ln(\sqrt{2})^{-1}\right) &\leq \ln 10^{-1} \\
\ln 2 - \frac{1}{2} \cdot n_0 \cdot \ln 2 &\leq -\ln 10 \\
\ln 20 &\leq \frac{1}{2} \cdot n_0 \cdot \ln 2 \\
n_0 &\geq \frac{2\ln 20}{\ln 2} \approx 8,64 \\
n_0 &= 9
\end{aligned}$$

(δ΄) i. Ας υπολογίσουμε πρώτα το

$$\begin{aligned}
\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} &= \frac{\frac{1+i}{2}z_n - z_n}{\frac{1+i}{2}z_n} \\
&= \dots \\
&= \frac{-1+i}{1+i} = i
\end{aligned}$$

ii. Από το προηγούμενο αποτέλεσμα έχω:

$$\left|\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}\right| = \frac{|M_{n+1}M_n|}{|OM_{n+1}|} = |i| = 1$$

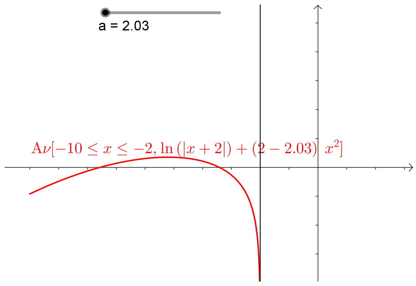
Άρα, το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

iii. Αφού παρατηρήσουμε πρώτα ότι: $|M_{n-1}M_n| = |OM_n| = u_n$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
l_n &= M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_{n-1}M_n \\
&= u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\
&\underset{\text{άθροισμα γπ}}{\overset{[S_n = a_1 \cdot \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}]}{=}} \sqrt{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}
\end{aligned}$$

Επομένως, $\lim_{n\to+\infty} l_n = \frac{\sqrt{2}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2}{\sqrt{2}-1}$, αφού $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$. Δες σελ. 186 Σχολικό. ■

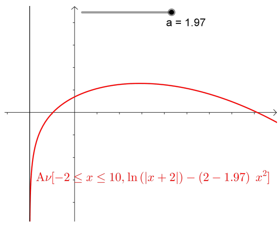
3. Το γράφημα της συνάρτησης $f(x)$ είναι:



Σχήμα 1: $f(x) = \ln|x+2| + (2-\alpha)x^2$

Για να καταλάβετε την άσκηση προσπαθείστε να την ξαναγράψετε χρησιμοποιώντας τώρα σαν συνάρτηση την

$$g(x) = \ln|x+2| - (2-\alpha)x^2, \quad \alpha < 2, \quad x \in (-2, +\infty)$$



Σχήμα 2: $g(x) = \ln|x+2| - (2-\alpha)x^2$

Αφού $x < -2$, ο τύπος της $\boxed{f(x) = \ln(-x-2) + (2-\alpha)x^2}$.

(α') Υπολογίζοντας την πρώτη παράγωγο:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{-1-4x^2-8x+2\alpha x^2+4\alpha x}{x+2} \\ &= \frac{2x^2(2-\alpha)+4x(2-\alpha)+1}{x+2} \end{aligned} \tag{1}$$

Το τριώνυμο του αριθμητού της (1) έχει διακρίνουσα $\Delta = 16(2-\alpha)^2 - 8\Big[(2-\alpha)\cdot 1\Big] = 8(2\alpha-3)(\alpha-2)$ με $\alpha > 2$ η $\Delta > 0$. Άρα, η $f'(x) = 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες $\xi_1,\ \xi_2 = -\dfrac{1}{2}\left(2 \pm \dfrac{\sqrt{2(2\alpha-3)}}{\sqrt{\alpha-2}}\right)$. Αλλά, $\xi_1 \cdot \xi_2 = \dfrac{1}{2-a} < 0$. Επομένως μια ρίζα είναι θετική και η άλλη αρνητική. Αλλά,

$$-\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{\frac{2(2\alpha-3)}{\alpha-2}}\right) < -2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \sqrt{\frac{4\alpha-6}{\alpha-2}} > 2 \Leftrightarrow \alpha > 2$$

που είναι αληθές αφού $\alpha > 2$ από υπόθεση. Έστω $\xi_1 = -\dfrac{1}{2}\left(2+\sqrt{\dfrac{2(2\alpha-3)}{\alpha-2}}\right) < -2 < 0 < \xi_2$.

Επομένως για $(-\infty, \xi_1)$ η $f'(x) > 0$ και $f(x)\ \uparrow$, ενώ στο $(\xi_1, -2)$, η $f'(x) < 0$ και $f(x)\ \downarrow$. Άρα, στο ξ_1 η $f(x)$ παρουσιάζει max.

(β')

$$
\begin{aligned}
A(\alpha) &= f(\rho_1) \\
&= \ln\left(-1+\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\frac{2\alpha-3}{\alpha-2}}\right)+(2-\alpha)\left(-1+\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\frac{2\alpha-3}{\alpha-2}}\right)^2 \\
&= -2\alpha-\alpha\sqrt{2}\sqrt{\frac{2\alpha-3}{\alpha-2}}-\ln(2)+\ln\left(-2+\sqrt{2}\sqrt{\frac{2\alpha-3}{\alpha-2}}\right)+\frac{7}{2}+2\sqrt{2}\sqrt{\frac{2\alpha-3}{\alpha-2}}
\end{aligned}
$$

για $\lim\limits_{\alpha\to 2^+}\sqrt{\dfrac{2\alpha-3}{\alpha-2}}=+\infty$ και $\lim\limits_{\alpha\to 2^+}A(\alpha)=+\infty$

(γ') Αφού $\lim\limits_{\alpha\to 2^+}A(\alpha)=+\infty$, έπεται ότι υπάρχει περιοχή Δ του 2 έτσι ώστε $A(\alpha)>0$ για κάθε $\alpha\in\Delta$.

(δ')

- $$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}\left[\ln(-x-2)+(2-\alpha)x^2\right] \tag{2}$$

  Αλλά, $\lim\limits_{x\to -2^-}\ln(-x-2)=-\infty$, άρα το όριο στην (2) είναι:
  $(2)=-\infty+(2-\alpha)(-2)^2=-\infty$.
  Επομένως η συνάρτηση έχει $\boxed{\text{κατακόρυφη ασύμπτωτο την } x=-2}$.

- $$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\ln(-x-2)+(2-\alpha)x^2 \\
&= \lim_{x\to-\infty}x^2\left(\frac{\ln(-x-2)}{x^2}+(2-\alpha)\right) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

  Αλλά,

  $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x-2)}{x^2}\underset{\mathrm{H}}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{-\dfrac{1}{x+2}}{2x}=0$$

  Άρα, η (3) δίνει όριο

  $$\lim_{x\to-\infty}x^2\left(\frac{\ln(-x-2)}{x^2}+(2-\alpha)\right)=+\infty\cdot(0+(2-\alpha))=-\infty$$

  Άρα, η $f(x)$ δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

- Επίσης,

  $$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x-2)+(2-\alpha)x^2}{x} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x-2)}{x}+(2-\alpha)x \\
&= \lim_{x\to-\infty}\left[x\left(\frac{\ln(-x-2)}{x^2}\right)+(2-\alpha)\right] \\
&= -\infty\Big(0+(2-\alpha)\Big) \\
&= +\infty
\end{aligned}
$$

  Άρα, δεν έχει ούτε πλάγιες ασύμπτωτες.

(ε') Στο διάστημα $(-\infty,\xi_1)$ η f είναι αύξουσα, άρα το Πεδίο Τιμών της είναι το $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),f(\xi_1)\right)=(-\infty,f(\xi_1))$ με $f(\xi_1)=A(\alpha)>0$. Επομένως αφού αλλάζει πρόσημο η $f(x)=0$ έχει ρίζα ρ_1 στο $(-\infty,\xi_1)$.

Στο $(\xi_1, -2)$ η f είναι φθίνουσα με Πεδίο Τιμών $\left(\lim\limits_{x\to -2^-} f(x), f(\xi_1)\right) = (-\infty, f(\xi_1))$ με $f(\xi_1) = A(\alpha) > 0$. Επομένως αφού αλλάζει πρόσημο η $f(x) = 0$ έχει ρίζα ρ_2 στο $(\xi_1, -2)$.

$$f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ln(-\rho_1 - 2) = (\alpha-2)\rho_1^2 \\ \ln(-\rho_2 - 2) = (\alpha-2)\rho_2^2 \end{cases} \tag{4}$$

(γ′)

$$\begin{aligned}
\int_{\rho_1}^{\rho_2} (1+\ln|2+x|)dx = \int_{\rho_1}^{\rho_2} (x+2)'(1+\ln(-x-2))dx \\
&= (2+x)\left(1+\ln(-x-2)\right)\Big|_{\rho_1}^{\rho_2} - \int_{\rho_1}^{\rho_2} (x+2)\cdot(-1)\frac{1}{-x-2}dx \\
&= 2+\rho_2+(2+\rho_2)\ln(-2-\rho_2) - 2 - \rho_1 - (2+\rho_1)\ln(-2-\rho_1) - (\rho_2-\rho_1) \\
&\overset{(4)}{=} (\alpha-2)(\rho_2-\rho_1)\left(\rho_2^2+\rho_1^2+\rho_1\rho_2+2(\rho_1+\rho_2)\right)
\end{aligned}$$

■

4. Πρόκειται για μια άσκηση που δίνει την προσέγγιση του $\ln(1+\alpha)$ από ένα πολυώνυμο 5ου βαθμού για κάθε $\alpha \in [0, +\infty)$. Το πολυώνυμο δεν είναι τίποτα άλλο παρά το γνωστό ανάπτυγμα Taylor της $\ln(1+x)$:

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots$$

Το πολυώνυμο παρεμβολής $p(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$ το έχουμε συναντήσει ξανά στην $1A(iii)$ σελ. 238 στο σχολικό βιβλίο. Εδώ χρησιμοποιούμε την μεθοδολογία του J. Bernoulli το 1694 στο *Effectionis omnium quadraturan & rectification curvarum per seriem quandam generalissiman*, σύμφωνα με την οποία χρησιμοποιούμε ολοκληρώσεις κατα παράγοντες ώστε να πάρουμε generalissiman σειρές όμοιες με αυτές που βρήκαν μετέπειτα οι Taylor και Cauchy ανακαλύπτοντας ότι η μέθοδος αυτή έξυπνα τροποποιημένη μπορεί να δώσει το αναπτύγμα μιας συνάρτησης με τον γνωστό όρο-υπόλοιπο σαν ένα ολοκλήρωμα.

(α′)

$$\begin{aligned}
J_0(\alpha) &= \int_0^\alpha \frac{dt}{1+t} = \ln(1+t)|_0^\alpha \\
&= \ln(1+\alpha) - \ln 1 = \ln(1+\alpha) \\
J_1(\alpha) &= \int_0^\alpha \frac{(t-\alpha)}{(1+t)^2}dt \\
& \quad \text{αν } u'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} \longrightarrow u(t) = \frac{-1}{1+t} \\
&= \int_0^\alpha (t-\alpha)\left(-\frac{1}{1+t}\right)' dt \\
&= \left(-\frac{t-\alpha}{1+t}\right)_0^\alpha + \int_0^\alpha \frac{(t-\alpha)'}{1+t}dt \\
&= \left(-\frac{0}{1+t} + \frac{-\alpha}{1}\right) + \int_0^\alpha \frac{dt}{1+t} \\
&= -\alpha + \ln(1+\alpha)
\end{aligned}$$

(β')

$$\begin{aligned} J_{n+1}(\alpha) &= \int_0^\alpha \frac{(t-\alpha)^{n+1}}{(1+t)^{n+2}}dt = \int_0^\alpha (t-\alpha)^{n+1}\left(-\frac{1}{(1+t)^{n+2}}\right)' dt \\ &= \left[-(t-\alpha)^{n+1}\frac{1}{(n+1)(1+t)^{n+1}}\right]\Big|_0^\alpha - \int_0^\alpha (n+1)(t-\alpha)^n\left(-\frac{1}{(n+1)(1+t)^{n+1}}\right)dt \\ &= (-\alpha)^{n+1}\frac{1}{n+1} + \int_0^\alpha \frac{(t-\alpha)^n}{(1+t)^{n+1}}dt \\ &= (-\alpha)^{n+1}\frac{1}{n+1} + J_n(\alpha) \end{aligned}$$

(γ')

$$\begin{aligned} J_0(\alpha) &= \ln(1+\alpha) \\ J_1(\alpha) &= \frac{(-\alpha)}{1} + J_0(\alpha) = \ln(1+\alpha) - \alpha \\ J_2(\alpha) &= \frac{(-\alpha)^2}{2} + J_1(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} + \ln(1+\alpha) - \alpha \\ J_3(\alpha) &= \frac{(-\alpha)^3}{3} + J_2(\alpha) = -\frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^2}{2} + \ln(1+\alpha) - \alpha \\ J_4(\alpha) &= \frac{(-\alpha)^4}{4} + J_3(\alpha) = \frac{\alpha^4}{4} - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^2}{2} + \ln(1+\alpha) - \alpha \\ J_5(\alpha) &= \frac{(-\alpha)^5}{5} + J_4(\alpha) = -\frac{\alpha^5}{5} + \frac{\alpha^4}{4} - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^2}{2} + \ln(1+\alpha) - \alpha = \ln(1+\alpha) - p(\alpha) \end{aligned}$$

(δ') $K(\alpha) = \int_0^\alpha (t-\alpha)^5 dt = \frac{(t-\alpha)^6}{6}\Big|_0^\alpha = -\frac{\alpha^6}{6}$.

(ε') Επειδή $t \le \alpha \Leftrightarrow t-\alpha \le 0 \Leftrightarrow (t-\alpha)^5 \le 0$, θα ισχύει:

$$\frac{(t-\alpha)^5}{(1+t)^6} \ge (t-\alpha)^5 \tag{5}$$

αφού $(1+t)^6 \ge 1$. Επειδή $\alpha > 0$, η ανισότητα (5) δίνει

$$\int_0^\alpha \frac{(t-\alpha)^5}{(1+t)^6}dt \ge \int_0^\alpha (t-\alpha)^5 dt \Rightarrow 0 \ge J_5(\alpha) \ge K(\alpha)$$

Επομένως, $\ln(1+\alpha) - p(\alpha) \ge -\frac{\alpha^6}{6}$. Άρα, $\boxed{|\ln(1+\alpha) - p(\alpha)| \le \left|\frac{\alpha^6}{6}\right| = \frac{\alpha^6}{6}}$.

(ϝ') Η τελευταία σχέση λέει ότι η τιμή του 5ου βαθμού πολυωνύμου, $p(\alpha)$, είναι μια προσεγγιστική τιμή του λογαρίθμου $\ln(1+\alpha)$ για $\alpha \in [0, +\infty)$. ■

Ας δούμε λίγο εγκυκλοπαιδικά το τελευταίο. Υποθέστε ότι θέλουμε να βρούμε τη τιμή ενός λογαρίθμου με προσέγγιση της τάξης 0.03 με την βοήθεια πολυωνύμου 5ου βαθμού. Αφού λύσουμε την εξίσωση $\frac{\alpha^6}{6} = 0.03$ και πάρουμε $\alpha = 0.7514130804$, τότε το πολυώνυμό μας 5ου βαθμού μπορεί να δώσει με προσέγγιση το πολύ 0.03, τη τιμή του λογαρίθμου $\ln(1+0.7514130804)$.
Για παράδειγμα: $p(0.7514130804) = 0.5787339682$ ενώ η τιμή του $\ln(1+0.7514130804) = 0.5604229364$.
Επομένως η τιμή 0.5787339682 είναι μια καλή προσέγγιση αφού

$$0.5787339682 - 0.5604229364 = 0.0183110318 < 0.03$$