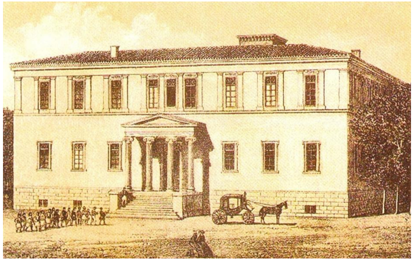

Π.Π. ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΚΑΤ/ΝΣΗΣ

25 Μαρτίου 2015

Τμήματα Τεχνολογικής: Ζ4

Διάρκεια: 3 ώρες

Έχετε δύο επιλογές:

1. *Μπορείτε να επιλέξετε τα* ***Θέματα 1, 2, 3 και 4***
2. *ή τα* ***Θέματα 2, 4 και 5***.

1. (α') i. Πότε δύο συναρτήσεις λέγονται ίσες;
   ii. Πότε μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται $1-1$;
   iii. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$ το $f(x_0)$;
   iv. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;
   v. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ. Ποιά σημεία του πεδίου ορισμού της είναι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτήτων;
   vi. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.
   vii. Δίδεται συνεχής συνάρτηση f σε διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι κοίλη στο διάστημα Δ;
   viii. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύπτωτη της γραφικής παράστασης της πραγματικής συνάρτησης f;

Μονάδες $8 \times 1,5 = 12$

(β') Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 13

2. (α') Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$

    i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της D_f.

    Μονάδες 5

    ii. Να δείξετε ότι $f(x) \geq 0$, $\forall x \in D_f$.

    Μονάδες 6

   (β') Θεωρήστε τώρα την συνάρτηση $g(x) = e^{-x} \ln(1+e^x)$.

    i. Δείξτε ότι είναι αυστηρώς φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

    Μονάδες 5

    ii. Να βρεθούν οι οριζόντιες ασύμπτωτες της συνάρτησης $g(x)$.

    Μονάδες 5

    iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

    Μονάδες 4

3. Δίνεται η συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την σχέση

$$f\Big(f(x)\Big) - 2f(x) = -6 - f^2(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

και $f(1) = 2$.

(α') Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(1)x^7 + f(10)x^5 - 3x^2 + 1}{f(2)x^2 + f(-3)x + 2}$.

Μονάδες 4

(β') Αν $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 32$, δείξτε ότι το γράφημα της $f(x)$ διέρχεται από σημείο με τεταγμένη 6.

Μονάδες 3

(γ') Έστω $g(x) = 3xf(x) - 60 \cdot \text{συν}(x^2\pi)$. Δείξτε ότι το γράφημα της $g(x)$ τέμνει τον οριζόντιο άξονα τουλάχιστον μία φορά.

Μονάδες 6

(δ') Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [-6, 2]$ έτσι ώστε

$$f(\xi) = \frac{f(-3) + 2f(-2) + f(0) + 3f(1)}{7}$$

Μονάδες 7

(ε') Έστω $h(x) = (x-1)f(x)$. Δείξτε ότι η $h(x)$ παραγωγίζεται στο 1 και ότι $h'(1) = 2$.

Μονάδες 5

4. (α') Δίνεται πραγματική συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(\alpha, +\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = f(\alpha)$$

i. Δείξτε ότι η συνάρτηση g ορισμένη από το διάστημα $[0, 1]$ στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε:

$$g(x) = \begin{cases} f\Big(\alpha - 1 + \frac{1}{x}\Big) & \text{αν} \quad x \in (0, 1] \\ \\ f(\alpha) & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο 0.

Μονάδες 4

ii. Δείξτε ότι υπάρχει c στο $(\alpha, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f'(c) = 0$.

Μονάδες 8

(β') Έστω πραγματική συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$$

i. Δείξτε ότι υπάρχει c στο (α, β) τέτοιο ώστε

$$\frac{f(c) - f(\alpha)}{c - \alpha} = f'(c)$$

Μονάδες 8

ii. Πώς θα μεταφράζατε το αποτέλεσμα αυτό πάνω στο γράφημα της συνάρτησης f;

Μονάδες 5

5. Έστω p και q δύο πραγματικοί αριθμοί. Σκοπός είναι να μελετήσουμε τον αριθμό των ριζών της εξίσωσης

$$x^3 + px + q = 0$$

Αποδείξτε ειδικότερα ότι η εξίσωση δέχεται τρείς πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν

$$4p^3 + 27q^2 < 0$$

Μονάδες 25

Λύσεις του Διαγωνίσματος

1. (α') i. Σχολ. σελ. 151
ii. Σχολ. σελ. 150
iii. Σχολ. σελ. 191
iv. Σχολ. σελ. 261
v. Σχολ. σελ. 246
vi. Σχολ. σελ. 273
vii. Σχολ. σελ. 279

(β') Σχολ. σελ. 260

■

2. (α') i. $D_f = (-1, +\infty)$

ii. $f'(x) = \dfrac{x}{(1+x)^2}$ με $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Τότε στο $(-1,0)$ η $f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow$. Στο $(0,+\infty)$ η $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow$. Άρα, για $x = 0$ η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το 0. Άρα, $\forall x \in D_f : f(x) \geq 0$.

(β') i. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη. Άρα, $g'(x) = -e^{-x}\left(\ln(1+e^x) - \dfrac{e^x}{e^x+1}\right)$. Αλλά από το 1ο ερώτημα για $x := e^x > 0$ η $g'(x) < 0$. Επομένως η g είναι αυστηρώς φθίνουσα.

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\ln\left[e^x(1+e^{-x}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{-x} + e^{-x}\ln\left(1+e^{-x}\right)\right) = 0$ Άρα, ο άξονας $y = 0$ είναι μια οριζόντια ασύμπτωτη. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}\ln(1+e^x) = 1$. Άρα, η ευθεία $y = 1$ είναι μια οριζόντια ασύμπτωτη.

iii. Επομένως το πεδίο τιμών της $g(x)$ είναι το $(0,1)$. Έτσι, δεν έχει ρίζες πραγματικές η $g(x) = 0$.

■

3. (α') $f(f(1)) - 2f(1) = -6 - f^2(1) \Rightarrow f(2) = 4 - 6 - 4 = -6$. Άρα, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(1)x^7 + f(10)x^5 - 3x^2 + 1}{f(2)x^2 + f(-3)x + 2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(1)x^7}{f(2)x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^7}{-6x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{-6}x^5 = +\infty$

(β') Αν $\lim\limits_{x\to5} f(x) = 32$ επειδή $f(x)$ συνεχής, $f(5) = 32$. Αλλά, $f(1) = 2 \neq f(5) = 32$, άρα από τον ΘΕΤ έχω ότι $\exists \eta \in (1,5)$ τέτοιο ώστε $f(\eta) = 6$ αφού $6 \in [2,32]$.

(γ') $f(2) = -6$, $f(-6) = -54$,
$g(2) = 3\cdot2\cdot(-6) - 60\cdot\text{συν}(4\pi) = -96 < 0$
$g(-6) = 3\cdot(-6)\cdot(-54) - 60\cdot\text{συν}(36\pi) = 12 > 0$
Άρα, το γράφημα της $g(x)$ τέμνει τουλάχιστον μία φορά τον οριζόντιο άξονα.

(δ') f συνεχής στο $[-6,2]$ από Θεώρημα ελαχίστης-μεγίστης τιμής έχω για $m = min$ και $M = max$:

$$\left.\begin{array}{lcl} m \leq & f(-3) & \leq M \\ 2m \leq & 2f(-2) & \leq 2M \\ m \leq & f(0) & \leq M \\ 3m \leq & 3f(1) & \leq M \end{array}\right\} \Rightarrow m \leq \frac{f(-3) + 2f(-2) + f(0) + 3f(1)}{7} \leq M$$

Η συνάρτηση f δεν είναι σταθερή συνάρτηση, άρα $m \neq M$. Άρα, από ΘΕΤ υπάρχει $\xi \in (-6,2)$ έτσι ώστε:

$$f(\xi) = \frac{f(-3) + 2f(-2) + f(0) + 3f(1)}{7}$$

(ε') $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{h(x) - h(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{(x-1)f(x)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} f(x) = f(1) = 2$. ■

4. (α') i. Η g είναι συνεχής στο $(0,1)$. Επίσης, $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = \lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = f(\alpha) = g(0)$. Άρα, g είναι συνεχής στο 0.

ii. $g(0) = g(1) = f(\alpha)$ και g παραγωγίσιμη, από Rolle στο $(0,1)$ $\exists \xi \in (0,1)$ με $g'(\xi) = -\dfrac{1}{\xi^2}f'\left(\alpha - 1 + \dfrac{1}{\xi}\right) = 0$ ή $f'\left(\alpha - 1 + \dfrac{1}{\xi}\right) = 0$. Θέτω $c = \alpha - 1 + \dfrac{1}{\xi} \in (\alpha, +\infty)$ αφού $0 < \xi < 1$ και $c > \alpha$.

(β') i. $\boxed{\text{Αν } f(a) \neq f(b)}$

Θέτω $g(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$.

Τότε: $g(a) = g(b) = 0$ και $g'(a) = g'(b) = -\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

Αν $f(b) - f(a) > 0$ τότε $g'(a) < 0$. Άρα, υπάρχει x σε μια περιοχή του a με $x > a$ έτσι ώστε $\dfrac{g(x) - g(a)}{x-a} < 0 \Rightarrow$

$g(x) < g(a) = 0$.
Ομοίως, $g'(b) > 0$. Άρα, υπάρχει x σε μια περιοχή του b με $x < b$ έτσι ώστε $\dfrac{g(x) - g(b)}{x - b} < 0 \Rightarrow \underline{g(x) > g(b) = 0}$.
Επομένως, η g δεν έχει σταθερό πρόσημο στο (a, b), άρα, $\exists d \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $g(d) = 0$.
Αν $f(b) - f(a) < 0$ τό ίδιο αποτέλεσμα.
Θέτω $h(x) = \dfrac{g(x)}{x - a} = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
Για $x \in [d, b]$ έχω: $h(d) = h(b) = 0 \Rightarrow \exists c \in (d, b) : \ h'(c) = 0$, ή $\dfrac{f'(c)}{c - a} - \dfrac{f(c) - f(a)}{(c - a)^2} = 0$. Άρα, $f'(c) = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}$.
$\boxed{\text{Αν } f(a) = f(b)}$ υπάρχει $d \in (a, b)$ με $f'(d) = 0$.
Αν $f(a) = f(b) = f(d)$ τότε $f'(d) = 0 = \dfrac{f(d) - f(a)}{d - a}$.
Αν $f(a) \neq f(d)$ τότε $f'(d) = f'(a) = 0$ και μελετάμε την περίπτωση στο διάστημα $[a, d]$ όπως προηγουμένως.

ii. Η ισότητα $f'(c) = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}$ δείχνει ότι στο σημείο με τετμημένη c η εφαπτομένη είναι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(a, f(a))$ και $(c, f(c))$. Άρα, από το σημείο $(a, f(a))$ μπορούμε να φέρουμε μια εφαπτομένη στο διάγραμμα της συνάρτησης f.

■

5. Θέτω $f(x) = x^3 + px + q$, τότε $f'(x) = 3x^2 + p$.
$\boxed{\text{Αν } p < 0}$ Τότε η $f'(x) = 0$ έχει δύο ρίζες $r_1 = -\sqrt{\dfrac{-p}{3}}$ και $r_2 = \sqrt{\dfrac{-p}{3}}$. Η $f(x)$ είναι αυστηρώς θετική στο $(-\infty, r_1)$ και $(r_2, +\infty)$, αυστηρώς αρνητική στο $(r_1, r-2)$. Άρα, στα r_1 και r_2 η $f(x)$ παρουσιάζει ακρότατα. Επομένως ο αριθμός των ριζών εξαρτάται από το πρόσημο του $f(r_1) \cdot f(r_2)$. Άλλά, $f(r_1) = \dfrac{2}{q}\sqrt{3}\,(-p)^{\frac{3}{2}} + q$ και $f(r_2) = -\dfrac{2}{q}\sqrt{3}\,(-p)^{\frac{3}{2}} + q$. Τότε:

$$f(r_1) \cdot f(r_2) = \frac{4}{27}p^3 + q^2$$

Επίσης, $f(r_1) - f(r_2) = \frac{4}{3}\sqrt{3}\,(-p)^{\frac{3}{2}} > 0 \Rightarrow f(r_1) > f(r_2)$.
Άρα:

(α') **Αν** $4p^3 + 27q^2 < 0$. Τότε $f(r_1) > 0 > f(r_2)$.
Άρα, στο $(-\infty, r_1)$, $f \uparrow$, η f μεταβάλεται από $-\infty$ στο $f(r_1) > 0$. Επομένως ... έχει 1 ρίζα πραγματική.
Στο (r_1, r_2), $f \downarrow$ και από το $f(r_1) > 0$ πάει στο $f(r_2) < 0$. Επομένως ... έχει 1 ρίζα πραγματική.
Στο $(r_2, +\infty)$, $f \uparrow$ και από $f(r_1) < 0$ πάει στο $+\infty$. Επομένως ... έχει 1 ρίζα πραγματική.

(β') **Αν** $4p^3 + 27q^2 > 0$. Τότε $f(r_1) > f(r_2) > 0$.
Άρα, η $f(x) = 0$ έχει μία ρίζα πραγματική στο $(-\infty, r_1)$.

(γ') **Αν** $4p^3 + 27q^2 = 0$. Τότε, ή $f(r_1) = 0 > f(r_2)$ και η $f(x) = 0$ έχει 1 ρίζα διπλή, την r_1, και 1 ρίζα στο $(r_2, +\infty)$, ή $f(r_1) > 0 = f(r_2)$ και η $f(x) = 0$ έχει 1 ρίζα διπλή, την r_2, και 1 ρίζα στο $(-\infty, r_1)$.

$\boxed{\text{Αν } p > 0}$ ή $\boxed{p = 0}$. Και στις 2 περιπτώσεις η $f'(x) > 0 + f \uparrow$ και $f(x)$ μεταβάλεται από $-\infty$ στο $+\infty$, άρα ... έχει μια απλή ρίζα και $4p^3 + 27q^2 > 0$.
$\boxed{\text{Αν } p = q = 0}$ το 0 είναι τριπλή ρίζα και $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Συμπέρασμα

- $4p^3 + 27q^2 < 0$. $f(x) = 0$ 3 απλές ρίζες.
- $4p^3 + 27q^2 > 0$. $f(x) = 0$ 1 απλή ρίζα.
- $4p^3 + 27q^2 = 0$. $f(x) = 0$ πολλαπλές ρίζες. Είτε 1 απλή και 1 διπλή, είτε 1 τριπλή.

■