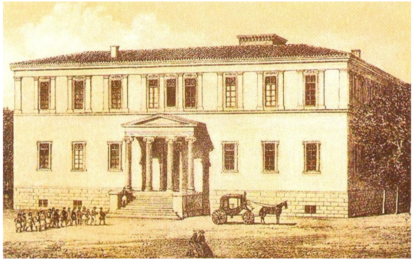

Π.Π. ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ 1[1]

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΚΑΤ/ΝΣΗΣ (Μιγαδικοί Αριθμ.)

9 Ὀκτωβρίου 2014

Τμήματα Τεχνολογικής: Ζ4

Διάρκεια: 2 ώρες

[1] Χωρίς γεωμετρικούς τόπους κωνικών.

1. (α') Δείξτε ότι η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών $\alpha + i\beta$ και $\gamma + i\delta$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

Μονάδες 15

(β') Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό - Λάθος:

i. Έστω $\alpha + i\beta$ μιγαδικός αριθμός με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\alpha + i\beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

ii. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$, $z^0 = 1$.

iii. Ισχύει $i^\nu = -1 \Leftrightarrow \nu = 4k + 2$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

iv. Αν $z \in \mathbb{C}$ τότε $\overline{(z^\nu)} = (\overline{z})^\nu$.

v. Αν $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$, ισχύει $\Re e(z_1 \cdot z_2) = \Re e(z_1) \cdot \Re e(z_2)$.

Μονάδες $5 \times 2 = 10$

2. Δίδεται συνάρτηση $f(z) = \dfrac{(z-1)(\overline{z}+1)}{z + \overline{z}}$, με $z \in \mathbb{C}$ και $\Re e(z) \neq 0$.

(α') Να δείξετε ότι $f\left(-\dfrac{1}{\overline{z}}\right) = f(z)$

(β') Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία οι μιγαδικοί $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, ικανοποιούν την σχέση $\Im m\left(f(z)\right) = 0$, έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

Μονάδες $10 + 15 = 25$

3. Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση $z + \alpha\left|z+1\right| + i = 0$, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ όταν $\alpha \geq 1$.

Μονάδες 25

4. Αν $z, w \in \mathbb{C}$ και

$$|z - i \cdot w| = |z| + |w| \tag{1}$$

(α') Δείξτε ότι ο μιγαδικός $z\overline{w}$ έχει $\Re e\left(z\overline{w}\right) = 0$ και $\Im m\left(z\overline{w}\right) = y$ με $y \leq 0$.

(β') Να προσδιορίσετε τις τιμές $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$|2z + w|^2 = \lambda \cdot |z|^2 + \mu \cdot |w|^2 \tag{2}$$

Μονάδες $15 + 10 = 25$