

A Test στο 4ο κεφάλαιο

ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 1 Το a είναι ΠΑΝΤΑ $\neq 0$

1. Αν $\Delta > 0$ τότε το τριώνυμο $ax^2 + bx + c$ διατηρεί σταθερό πρόσημο, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ Σ - Λ
2. Αν $\Delta < 0$ τότε το τριώνυμο $a(ax^2 + bx + c) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ Σ - Λ
3. Αν $b^2 < 4c$ τότε $\xi^2 + b\xi + c < 0$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ Σ - Λ
4. $\xi^2 - 2\xi + 1 < 0$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ Σ - Λ

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. ΛΑΘΟΣ, γιατί αν $\Delta > 0$ το πρόσημο του τριωνύμου είναι διαφορετικό εκτός και εντός των ριζών του.
2. ΣΩΣΤΟ, αν $\Delta < 0$ το πρόσημο του τριωνύμου είναι αυτό του μεγιστοβαθμίου συντελεστή. Το τριώνυμο είναι: $a^2x^2 + abx + ac > 0$, άρα ο μεγιστοβάθμιος είναι ο $a^2 > 0$.
3. ΛΑΘΟΣ, η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $b^2 - 4c < 0$, άρα το πρόσημο του τριωνύμου είναι αυτό του μεγιστοβαθμίου συντελεστή που στην περίπτωση μας είναι ο $1 > 0$.
4. ΛΑΘΟΣ, γιατί η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - 2x + 1$ είναι $2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$. Άρα, το τριώνυμο έχει διπλή ρίζα και ως εκ τούτου υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi = 1$ έτσι ώστε $\xi^2 - 2\xi + 1 = 0$.

(4 × 5 = 20 Μον.)

ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2

1. Η αλγεβρική παράσταση $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ Σ - Λ
2. Ο πίνακας προσήμων του $p(x) = 5x^2 - 2x - 3$ είναι:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{5}$	1	$+\infty$ Σ - Λ
$p(x)$	+	0	-	0	+

3. Η αλγεβρική παράσταση $x^2 - xy + y^2$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, είναι πάντα ≥ 0 Σ - Λ

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. ΣΩΣΤΟ. Για να ορίζεται η αλγεβρική παράσταση, πρέπει η υπόριζη ποσότητα να είναι ≥ 0 . Πράγματι, $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
2. ΣΩΣΤΟ. Οι δύο ρίζες του τριωνύμου είναι $-\frac{3}{5}$ και 1 , και ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής (ή ο συντελεστής του x^2) είναι $5 > 0$. Επομένως το τριώνυμο είναι θετικό εκτός και αρνητικό εντός των ριζών.
3. ΣΩΣΤΟ. Το τριώνυμο $x^2 - xy + y^2$ με μεταβλητή το x , έχει διακρίνουσα $(-y)^2 - 4 \cdot 1 \cdot y^2 = y^2 - 4y^2 = -3y^2 \leq 0$. Επομένως είναι ομόσημο του μεγιστοβάθμιου συντελεστή που είναι ο 1 ή είναι 0 αν $x = y = 0$.

(3 × 10 = 30 Μον.)

ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 3 Το a είναι ΠΑΝΤΑ $\neq 0$

1. Το τριώνυμο $x^2 - (\lambda - 1)x - \lambda - 1$ έχει:
 - A: Δύο ρίζες θετικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - B: Καμμία πραγματική ρίζα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γ: Δύο πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δ: Δύο πραγματικές και άνισες ρίζες για $-\frac{5}{2} < \lambda < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ε: Δύο ρίζες αρνητικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δικαιολογείστε την επιλογή σας.

2. Έστω $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, αν $p(-2) = p(3) = 0$ τότε

Α: $p(-1) \cdot p(1) < 0$.

Β: $p(-1) \cdot p(1) \geq 0$

Γ: $p(-1) \cdot p(4) < 0$

Δ: $p(1) \cdot p(2) < 0$

Ε: Τίποτα απο τα προηγούμενα.

Δικαιολογείστε την επιλογή σας.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- ΣΩΣΤΟ ΤΟ Γ. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\eta (\lambda - 1)^2 + 4(\lambda + 1) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$. Εξετάζω αν η διακρίνουσα αλλάζει πρόσημο ή όχι για τις τιμές του λ , ή διαφορετικά θα βρώ το πρόσημο της διακρίνουσας $\lambda^2 + 2\lambda + 5$. Για να το κάνω αυτό, αρκεί να δώ την διακρίνουσα σαν ένα νέο τριώνυμο με μεταβλητή το λ , στο οποίο φυσικά και θα ισχύουν όλα τα αποτελέσματα σχετικά με το πρόσημο τριωνύμου. Η διακρίνουσα της διακρίνουσας του $\lambda^2 + 2\lambda + 5$ είναι $2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16 < 0$, επομένως το πρόσημο του $\lambda^2 + 2\lambda + 5$ είναι θετικό για κάθε λ . Άρα, η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - (\lambda - 1)x - \lambda - 1$ είναι θετική, ΠΟΤΕ = 0, και συνεπώς το τριώνυμο έχει πάντα 2 ρίζες πραγματικές και άνισες.
- ΣΩΣΤΟ ΤΟ Β και Γ. Αφού $p(-2) = p(3) = 0$ οι -2 και 3 είναι οι ρίζες του τριωνύμου. Άρα, **γίνεται ομόσημο του a όταν η μεταβλητή x παίρνει τιμές από το διάστημα $(-\infty, -2)$ και $(3, +\infty)$ και ετερόσημο του a όταν η μεταβλητή x παίρνει τιμές από το διάστημα $(-2, 3)$.**

$$\text{Επειδή: } \begin{cases} -1 \in (-2, 3) & \text{τότε } p(-1) \text{ ετερόσημο του } a \\ 1 \in (-2, 3) & \text{τότε } p(1) \text{ ετερόσημο του } a \\ 4 \in (3, +\infty) & \text{τότε } p(4) \text{ ομόσημο του } a \end{cases}$$

Άρα, τα $p(-1)$ και $p(4)$ είναι ετερόσημα, ή $p(-1) \cdot p(4) < 0$.

Επίσης, τα $p(-1)$ και $p(1)$ είναι ομόσημα, ή $p(-1) \cdot p(1) > 0$, αλλά ΠΟΤΕ ίσα με 0.

Άρα, είναι αληθή το Γ, αφού $p(-1) \cdot p(4) < 0$ και το Β, αφού $p(-1) \cdot p(1) \geq 0$, το ≥ 0 είναι διαζευκτικό.

Όλα τα υπόλοιπα: $p(-1)$, $p(1)$, $p(2)$ είναι ομόσημα μεταξύ τους και ΠΟΤΕ ίσα με 0.

(2 × 25 = 50 Μον.)

B Test στο 4ο κεφάλαιο

ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 1 Το a είναι ΠΑΝΤΑ $\neq 0$

1. $\rho^2 - \rho + 1 < 0$ για κάθε $\rho \in \mathbb{R}$ Σ - Λ
2. Αν $\Delta < 0$ τότε το τριώνυμο $ax^2 + bx + c$ διατηρεί σταθερό πρόσημο, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ Σ - Λ
3. Αν $c^2 < 4b$ τότε $\xi^2 + c\xi + b > 0$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ Σ - Λ
4. Αν $\Delta < 0$ τότε το τριώνυμο $-a(ax^2 + bx + c) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ Σ - Λ

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. ΛΑΘΟΣ, γιατί η διακρίνουσα του τριωνύμου $\rho^2 - \rho + 1$ είναι $(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$. Άρα, το τριώνυμο είναι ομόσημο του μεγιστοβαθμίου συντελεστή $1 > 0$.
2. ΣΩΣΤΟ, αν $\Delta < 0$ το πρόσημο του τριωνύμου είναι αυτό του μεγιστοβαθμίου συντελεστή, που παραμένει σταθερό.
3. ΣΩΣΤΟ, η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $b^2 - 4c < 0$, άρα το πρόσημο του τριωνύμου είναι αυτό του μεγιστοβαθμίου συντελεστή που στην περίπτωση μας είναι ο $1 > 0$.
4. ΛΑΘΟΣ, γιατί αν $\Delta < 0$ το πρόσημο του τριωνύμου $-a^2x^2 + (-a)bx + (-a)c$ είναι αυτό του μεγιστοβαθμίου συντελεστή που είναι στην περίπτωση μας είναι $-a^2 < 0$.

(4 × 5 = 20 Μον.)

ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2 Το a είναι ΠΑΝΤΑ $\neq 0$

1. Έστω $p(x) = ax^2 + bx + \gamma$, αν $p(-2) = p(3) = 0$ τότε

A: $p(-1) \cdot p(1) < 0$.

B: $p(-1) \cdot p(1) \geq 0$

Γ: $p(-1) \cdot p(4) < 0$

Δ: $p(1) \cdot p(2) < 0$

E: Τίποτα απο τα προηγούμενα.

Δικαιολογείστε την επιλογή σας.

2. Το τριώνυμο $x^2 - (\lambda - 1)x - \lambda - 1$ έχει:

A: Δύο ρίζες θετικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.B: Καμμία πραγματική ρίζα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.Γ: Δύο πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.Δ: Δύο πραγματικές και άνισες ρίζες για $-\frac{5}{2} < \lambda < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.E: Δύο ρίζες αρνητικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δικαιολογείστε την επιλογή σας.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. ΣΩΣΤΟ ΤΟ Β και Γ. Αφού $p(-2) = p(3) = 0$ οι -2 και 3 είναι οι ρίζες του τριωνύμου. Άρα, **γίνεται ομόσημο του a όταν η μεταβλητή x παίρνει τιμές από το διάστημα $(-\infty, -2)$ και $(3, +\infty)$ και ετερόσημο του a όταν η μεταβλητή x παίρνει τιμές από το διάστημα $(-2, 3)$.**

Επειδή: $\begin{cases} -1 \in (-2, 3) & \text{τότε } p(-1) \text{ ετερόσημο του } a \\ 1 \in (-2, 3) & \text{τότε } p(1) \text{ ετερόσημο του } a \\ 4 \in (3, +\infty) & \text{τότε } p(4) \text{ ομόσημο του } a \end{cases}$

Άρα, τα $p(-1)$ και $p(4)$ είναι ετερόσημα, ή $p(-1) \cdot p(4) < 0$.

Επίσης, τα $p(-1)$ και $p(1)$ είναι ομόσημα, ή $p(-1) \cdot p(1) > 0$, αλλά ΠΟΤΕ ίσα με 0.

Άρα, είναι αληθή το Γ, αφού $p(-1) \cdot p(4) < 0$ και το Β, αφού $p(-1) \cdot p(1) \geq 0$, το ≥ 0 είναι διαζευκτικό.

Όλα τα υπόλοιπα: $p(-1), p(1), p(2)$ είναι ομόσημα μεταξύ τους και ΠΟΤΕ ίσα με 0.

2. ΣΩΣΤΟ ΤΟ Γ. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι η $(\lambda - 1)^2 + 4(\lambda + 1) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$. Εξετάζω αν η διακρίνουσα αλλάζει πρόσημο ή όχι για τις τιμές του λ , ή διαφορετικά θα βρώ το πρόσημο της διακρίνουσας $\lambda^2 + 2\lambda + 5$. Για να το κάνω αυτό, αρκεί να δώ την διακρίνουσα σαν ένα νέο τριώνυμο με μεταβλητή το λ , στο οποίο φυσικά και θα ισχύουν όλα τα αποτελέσματα σχετικά με το πρόσημο τριωνύμου. Η διακρίνουσα της διακρίνουσας του $\lambda^2 + 2\lambda + 5$ είναι $2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16 < 0$, επομένως το πρόσημο του $\lambda^2 + 2\lambda + 5$ είναι θετικό για κάθε λ . Άρα, η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - (\lambda - 1)x - \lambda - 1$ είναι θετική, ΠΟΤΕ = 0, και συνεπώς το τριώνυμο έχει πάντα 2 ρίζες πραγματικές και άνισες.

(2 × 25 = 50 Μον.)

ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 3

1. Ο πίνακας προσήμων του $p(x) = 5x^2 - 2x - 3$ είναι:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{5}$	1	$+\infty$ Σ - Λ
$p(x)$	+	0	-	0	+

2. Η αλγεβρική παράσταση $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ Σ - Λ
3. Η αλγεβρική παράσταση $x^2 - xy + y^2$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, είναι πάντα ≥ 0 Σ - Λ

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. ΣΩΣΤΟ. Οι δύο ρίζες του τριωνύμου είναι $-\frac{3}{5}$ και 1, και ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής (ή ο συντελεστής του x^2) είναι $5 > 0$. Επομένως το τριώνυμο είναι θετικό εκτός και αρνητικό εντός των ριζών.
2. ΣΩΣΤΟ. Για να ορίζεται η αλγεβρική παράσταση, πρέπει η υπόριζη ποσότητα να είναι ≥ 0 . Πράγματι, $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
3. ΣΩΣΤΟ. Το τριώνυμο $x^2 - xy + y^2$ με μεταβλητή το x , έχει διακρίνουσα $(-y)^2 - 4 \cdot 1 \cdot y^2 = y^2 - 4y^2 = -3y^2 \leq 0$. Επομένως είναι ομόσημο του μεγιστοβάθμιου συντελεστή που είναι ο 1 ή ίση με 0 αν $x = y = 0$.

(3 × 10 = 30 Μον.)