$\boxed{\text{A}}$ Test στο 4ο κεφάλαιο

ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 1 **Το a είναι ΠΑΝΤΑ** $\neq 0$

1. Αν $\Delta > 0$ τότε το τριώνυμο $ax^2 + bx + c$ διατηρεί σταθερό πρόσημο, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ .... Σ - Λ
2. Αν $\Delta < 0$ τότε το τριώνυμο $a(ax^2 + bx + c) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ .... Σ - Λ
3. Αν $b^2 < 4c$ τότε $\xi^2 + b\xi + c < 0$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ .... Σ - Λ
4. $\xi^2 - 2\xi + 1 < 0$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ .... Σ - Λ

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. ΛΑΘΟΣ, γιατί αν $\Delta > 0$ το πρόσημο του τριωνύμου είναι διαφορετικό εκτός και εντός των ριζών του.
2. ΣΩΣΤΟ, αν $\Delta < 0$ το πρόσημο του τριωνύμου είναι αυτό του μεγιστοβαθμίου συντελεστή. Το τριώνυμο είναι: $a^2x^2 + abx + ac > 0$, άρα ο μεγιστοβάθμιος είναι ο $a^2 > 0$.
3. ΛΑΘΟΣ, η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $b^2 - 4c < 0$, άρα το πρόσημο του τριωνύμου είναι αυτό του μεγιστοβαθμίου συντελεστή που στην περίπτωσή μας είναι ο $1 > 0$.
4. ΛΑΘΟΣ, γιατί η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - 2x + 1$ είναι $2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$. Άρα, το τριώνυμο έχει διπλή ρίζα και ως εκ τούτου υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi = 1$ έτσι ώστε $\xi^2 - 2\xi + 1 = 0$.

($4 \times 5 = 20$ Μον.)

ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2

1. Η αλγεβρική παράσταση $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ .... Σ - Λ
2. Ο πίνακας προσήμων του $p(x) = 5x^2 - 2x - 3$ είναι:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{5}$		1	$+\infty$
$p(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

.... Σ - Λ

3. Η αλγεβρική παράσταση $x^2 - xy + y^2$ για κάθε $x,\ y \in \mathbb{R}$, είναι πάντα ≥ 0 .... Σ - Λ

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. ΣΩΣΤΟ. Για να ορίζεται η αλγεβρική παράσταση, πρέπει η υπόριζη ποσότητα να είναι ≥ 0. Πράγματι, $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
2. ΣΩΣΤΟ. Οι δύο ρίζες του τριωνύμου είναι $-\frac{3}{5}$ και 1, και ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής (ή ο συντελεστής του x^2) είναι $5 > 0$. Επομένως το τριώνυμο είναι θετικό εκτός και αρνητικό εντός των ριζών.
3. ΣΩΣΤΟ. Το τριώνυμο $x^2 - xy + y^2$ με μεταβλητή το x, έχει διακρίνουσα $(-y)^2 - 4 \cdot 1 \cdot y^2 = y^2 - 4y^2 = -3y^2 \leq 0$. Επομένως είναι ομόσημο του μεγιστοβάθμιου συντελεστή που είναι ο 1 ή είναι 0 αν $x = y = 0$.

($3 \times 10 = 30$ Μον.)

ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 3 **Το a είναι ΠΑΝΤΑ** $\neq 0$

1. Το τριώνυμο $x^2 - (\lambda - 1)x - \lambda - 1$ έχει:

   Α: Δύο ρίζες θετικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Β: Καμμία πραγματική ρίζα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γ: Δύο πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δ: Δύο πραγματικές και άνισες ρίζες για $-\frac{5}{2} < \lambda < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ε : Δύο ρίζες αρνητικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δικαιολογείστε την επιλογή σας.

2. Έστω $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, αν $p(-2) = p(3) = 0$ τότε

   Α : $p(-1) \cdot p(1) < 0$.

   Β: $p(-1) \cdot p(1) \geq 0$

   Γ: $p(-1) \cdot p(4) < 0$

   Δ: $p(1) \cdot p(2) < 0$

   Ε : Τίποτα απο τα προηγούμενα.

   Δικαιολογείστε την επιλογή σας.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. ΣΩΣΤΟ ΤΟ Γ. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι η $(\lambda - 1)^2 + 4(\lambda + 1) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$. Εξετάζω αν η διακρίνουσα αλλάζει πρόσημο ή όχι για τις τιμές του λ, ή διαφορετικά θα βρώ το πρόσημο της διακρίνουσας $\lambda^2 + 2\lambda + 5$. Για να το κάνω αυτό, αρκεί να δώ την διακρίνουσα σαν ένα νέο τριώνυμο με μεταβλητή το λ, στο οποίο φυσικά και θα ισχύουν όλα τα αποτελέσματα σχετικά με το πρόσημο τριωνύμου. Η διακρίνουσα της διακρίνουσας του $\lambda^2 + 2\lambda + 5$ είναι $2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16 < 0$, επομένως το πρόσημο του $\lambda^2 + 2\lambda + 5$ είναι θετικό για κάθε λ. Άρα, η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - (\lambda - 1)x - \lambda - 1$ είναι θετική, ΠΟΤΕ $= 0$, και συνεπώς το τριώνυμο έχει πάντα 2 ρίζες πραγματικές και άνισες.

2. ΣΩΣΤΟ ΤΟ Β και Γ. Αφού $p(-2) = p(3) = 0$ οι -2 και 3 είναι οι ρίζες του τριωνύμου. Άρα, **γίνεται ομόσημο του a όταν η μεταβλητή x παίρνει τιμές από το διάστημα $(-\infty, -2)$ και $(3, +\infty)$ και ετερόσημο του a όταν η μεταβλητή x παίρνει τιμές από το διάστημα $(-2, 3)$.**

   $$\text{Επειδή}: \begin{cases} -1 \in (-2,3) & \text{τότε} \quad p(-1) \text{ ετερόσημο του } a \\ 1 \in (-2,3) & \text{τότε} \quad p(1) \text{ ετερόσημο του } a \\ 4 \in (3,+\infty) & \text{τότε} \quad p(4) \text{ ομόσημο του } a \end{cases}$$

   Άρα, τα $p(-1)$ και $p(4)$ είναι ετερόσημα, ή $p(-1) \cdot p(4) < 0$.
   Επίσης, τα $p(-1)$ και $p(1)$ είναι ομόσημα, ή $p(-1) \cdot p(1) > 0$, αλλά ΠΟΤΕ ίσα με 0.
   Άρα, είναι αληθή το Γ, αφού $p(-1) \cdot p(4) < 0$ και το Β, αφού $p(-1) \cdot p(1) \geq 0$, το ≥ 0 είναι διαζευκτικό.

   Όλα τα υπόλοιπα: $p(-1),\ p(1),\ p(2)$ είναι ομόσημα μεταξύ τους και ΠΟΤΕ ίσα με 0.

$(2 \times 25 = 50$ Μον.)

$\boxed{\text{B}}$ Test στο 4ο κεφάλαιο

ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 1 **Το a είναι ΠΑΝΤΑ** $\neq 0$

1. $\rho^2 - \rho + 1 < 0$ για κάθε $\rho \in \mathbb{R}$ .... Σ - Λ
2. Αν $\Delta < 0$ τότε το τριώνυμο $ax^2 + bx + c$ διατηρεί σταθερό πρόσημο, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ .... Σ - Λ
3. Αν $c^2 < 4b$ τότε $\xi^2 + c\xi + b > 0$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ .... Σ - Λ
4. Αν $\Delta < 0$ τότε το τριώνυμο $-a(ax^2 + bx + c) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ .... Σ - Λ

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. ΛΑΘΟΣ, γιατί η διακρίνουσα του τριωνύμου $\rho^2 - \rho + 1$ είναι $(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$. Άρα, το τριώνυμο είναι ομόσημο του μεγιστοβαθμίου συντελεστή $1 > 0$.
2. ΣΩΣΤΟ, αν $\Delta < 0$ το πρόσημο του τριωνύμου είναι αυτό του μεγιστοβαθμίου συντελεστή, που παραμένει σταθερό.
3. ΣΩΣΤΟ, η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $b^2 - 4c < 0$, άρα το πρόσημο του τριωνύμου είναι αυτό του μεγιστοβαθμίου συντελεστή που στην περίπτωσή μας είναι ο $1 > 0$.
4. ΛΑΘΟΣ, γιατί αν $\Delta < 0$ το πρόσημο του τριωνύμου $-a^2x^2 + (-a)bx + (-a)c$ είναι αυτό του μεγιστοβαθμίου συντελεστή που είναι στην περίπτωσή μας είναι $-a^2 < 0$.

($4 \times 5 = 20$ Μον.)

ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2 **Το a είναι ΠΑΝΤΑ** $\neq 0$

1. Έστω $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, αν $p(-2) = p(3) = 0$ τότε

   A: $p(-1) \cdot p(1) < 0$.
   B: $p(-1) \cdot p(1) \geq 0$
   Γ: $p(-1) \cdot p(4) < 0$
   Δ: $p(1) \cdot p(2) < 0$
   E: Τίποτα απο τα προηγούμενα.

   Δικαιολογείστε την επιλογή σας.

2. Το τριώνυμο $x^2 - (\lambda - 1)x - \lambda - 1$ έχει:

   A: Δύο ρίζες θετικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
   B: Καμμία πραγματική ρίζα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
   Γ: Δύο πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
   Δ: Δύο πραγματικές και άνισες ρίζες για $-\frac{5}{2} < \lambda < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   E: Δύο ρίζες αρνητικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Δικαιολογείστε την επιλογή σας.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. ΣΩΣΤΟ ΤΟ B και Γ. Αφού $p(-2) = p(3) = 0$ οι -2 και 3 είναι οι ρίζες του τριωνύμου. Άρα, **γίνεται ομόσημο του a όταν η μεταβλητή x παίρνει τιμές από το διάστημα $(-\infty, -2)$ και $(3, +\infty)$ και ετερόσημο του a όταν η μεταβλητή x παίρνει τιμές από το διάστημα $(-2, 3)$.**

$$\text{Επειδή}: \begin{cases} -1 \in (-2,3) & \text{τότε} \quad p(-1) \text{ ετερόσημο του } a \\ 1 \in (-2,3) & \text{τότε} \quad p(1) \text{ ετερόσημο του } a \\ 4 \in (3,+\infty) & \text{τότε} \quad p(4) \text{ ομόσημο του } a \end{cases}$$

Άρα, τα $p(-1)$ και $p(4)$ είναι ετερόσημα, ή $p(-1) \cdot p(4) < 0$.
Επίσης, τα $p(-1)$ και $p(1)$ είναι ομόσημα, ή $p(-1) \cdot p(1) > 0$, αλλά ΠΟΤΕ ίσα με 0.
Άρα, είναι αληθή το Γ, αφού $p(-1) \cdot p(4) < 0$ και το Β, αφού $p(-1) \cdot p(1) \geq 0$, το ≥ 0 είναι διαζευκτικό.

Όλα τα υπόλοιπα: $p(-1),\ p(1),\ p(2)$ είναι ομόσημα μεταξύ τους και ΠΟΤΕ ίσα με 0.

2. ΣΩΣΤΟ ΤΟ Γ. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι η $(\lambda-1)^2 + 4(\lambda+1) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$. Εξετάζω αν η διακρίνουσα αλλάζει πρόσημο ή όχι για τις τιμές του λ, ή διαφορετικά θα βρώ το πρόσημο της διακρίνουσας $\lambda^2 + 2\lambda + 5$. Για να το κάνω αυτό, αρκεί να δώ την διακρίνουσα σαν ένα νέο τριώνυμο με μεταβλητή το λ, στο οποίο φυσικά και θα ισχύουν όλα τα αποτελέσματα σχετικά με το πρόσημο τριωνύμου. Η διακρίνουσα της διακρίνουσας του $\lambda^2 + 2\lambda + 5$ είναι $2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16 < 0$, επομένως το πρόσημο του $\lambda^2 + 2\lambda + 5$ είναι θετικό για κάθε λ. Άρα, η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - (\lambda-1)x - \lambda - 1$ είναι θετική, ΠΟΤΕ $= 0$, και συνεπώς το τριώνυμο έχει πάντα **2** ρίζες πραγματικές και άνισες.

(2 × 25 = 50 Μον.)

ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 3

1. Ο πίνακας προσήμων του $p(x) = 5x^2 - 2x - 3$ είναι:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{5}$		1		$+\infty$
$p(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

.... Σ - Λ

2. Η αλγεβρική παράσταση $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ .... Σ - Λ

3. Η αλγεβρική παράσταση $x^2 - xy + y^2$ για κάθε $x,\ y \in \mathbb{R}$, είναι πάντα ≥ 0 .... Σ - Λ

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. ΣΩΣΤΟ. Οι δύο ρίζες του τριωνύμου είναι $-\frac{3}{5}$ και 1, και ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής (ή ο συντελεστής του x^2) είναι $5 > 0$. Επομένως το τριώνυμο είναι θετικό εκτός και αρνητικό εντός των ριζών.

2. ΣΩΣΤΟ. Για να ορίζεται η αλγεβρική παράσταση, πρέπει η υπόριζη ποσότητα να είναι ≥ 0. Πράγματι, $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

3. ΣΩΣΤΟ. Το τριώνυμο $x^2 - xy + y^2$ με μεταβλητή το x, έχει διακρίνουσα $(-y)^2 - 4 \cdot 1 \cdot y^2 = y^2 - 4y^2 = -3y^2 \leq 0$. Επομένως είναι ομόσημο του μεγιστοβάθμιου συντελεστή που είναι ο 1 ή ίση με 0 αν $x = y = 0$.

(3 × 10 = 30 Μον.)