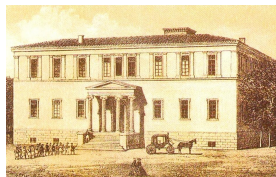


1^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1^{ου} ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ (Διάρκεια 1 δ. ώρα)¹
ΠΠ ΓΕΛ Βαρβακειού Σχολής - Λυγάτσικας Ζήνων



A1 ΛΥΚΕΙΟΥ ΟΜΑΔΑ Α

ΟΝΟΜ/ΜΟ :

1. (α) Να δώσετε τον αλγεβρικό ορισμό της απολύτου τιμής ενός πραγματικού αριθμού α .

(Μονάδες 6)

(β) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\beta \neq 0$, δείξτε ότι: $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$.

(Μονάδες 11)

(γ) Απαντήστε με ΣΩΣΤΟ (Σ) ή ΛΑΘΟΣ (Λ) στα παρακάτω ερωτήματα :

- Ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ότι $-|x| \leq x \leq |x|$.
- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι: $-|x|^2 = |x^2|$.
- Αν για τους πραγματικούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0$, ισχύει $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε $\alpha - \gamma < \beta - \delta$.
- Το 0 είναι ο μόνος αριθμός που είναι ίσος με τον αντίθετό του.

(Μονάδες 8)

2. Να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{|45 - \sqrt{2014}|} + \frac{1}{|45 + \sqrt{2014}|} = \frac{90}{11}$$

(Μονάδες 25)

3. Δείξτε ότι για κάθε πραγματικό x ισχύει:

$$(x + 2)^3 - 4(x + 1)^3 + 6x^3 + (x - 2)^3 = 4(x - 1)^3$$

(Μονάδες 25)

¹c : \dots\zenon\education\A_LYC\ALGEBRA\ch2_3\exam_tetram\2013 - 14\exam_A.tex

4. Έστω $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ με $\gamma \neq 0$, έτσι ώστε: $|\delta| - |\beta| < |\alpha + \gamma|$ και $|\gamma| < |\beta| < |\delta|$. Δείξτε ότι:

(α) $\left| \frac{\gamma}{\beta} \right| < 1$

(Μονάδες 5)

(β) $\left| \frac{\gamma}{\beta} \right| < \frac{|\alpha| + |\gamma|}{|\delta| - |\beta|}$

(Μονάδες 10)

(γ) $\left| \frac{\delta}{\beta} \right| - \left| \frac{\alpha}{\gamma} \right| < 2$

(Μονάδες 10)

1 Ιανουαρίου 2014

Ενδεικτικές λύσεις

$$1. \quad (\alpha) \quad |\alpha| = \begin{cases} \alpha & \text{αν } \alpha > 0 \\ 0 & \text{αν } \alpha = 0 \\ -\alpha & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

(β) Επειδή οι 2 όροι της ισότητας είναι θετικοί αριθμοί μπορούμε να υψώσουμε την δεδομένη ισότητα στο τετράγωνο:

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \Leftrightarrow \left| \frac{a}{b} \right|^2 = \left(\frac{|a|}{|b|} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} \right)^2 = \frac{|a|^2}{|b|^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} \right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

Η τελευταία ισότητα είναι αληθής, είναι ιδιότητα της απολύτου τιμής, άρα, και η αρχική.

(γ) *i)* Σ, *ii)* Λ, *iii)* Λ, *iv)* Σ.

2. Επειδή $45^2 = 2025$ τότε $45^2 > 2014 \Leftrightarrow 45 - \sqrt{2014} > 0 \Leftrightarrow |45 - \sqrt{2014}| = 45 - \sqrt{2014}$.
Επομένως:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|45 - \sqrt{2014}|} + \frac{1}{|45 + \sqrt{2014}|} &= \frac{1}{45 - \sqrt{2014}} + \frac{1}{45 + \sqrt{2014}} \\ &= \frac{45 + \sqrt{2014} + 45 - \sqrt{2014}}{45^2 - 2014} \\ &= \frac{90}{11} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} (x+2)^3 - 4(x+1)^3 + 6x^3 + (x-2)^3 &= 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 \\ &= 4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \\ &= 4(x-1)^3 \end{aligned}$$

$$4. \quad (\alpha) \quad |\gamma| < |\beta| \stackrel{\beta \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{|\gamma|}{|\beta|} < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{\gamma}{\beta} \right| < 1$$

(β) $|\delta| - |\beta| < |\alpha + \gamma| \leq |\alpha| + |\gamma|$ άρα, επειδή $|\delta| - |\beta| \neq 0$, έχουμε:

$$\frac{|\alpha| + |\gamma|}{|\delta| - |\beta|} > 1$$

Άρα,

$$\left| \frac{\gamma}{\beta} \right| < 1 < \frac{|\alpha| + |\gamma|}{|\delta| - |\beta|}$$

(γ) Από το δεύτερο ερώτημα :

$$\left| \frac{\gamma}{\beta} \right| < \frac{|\alpha| + |\gamma|}{|\delta| - |\beta|}$$

ή

$$|\gamma||\delta| - |\gamma||\beta| < |\beta||\alpha| + |\beta||\gamma| \Leftrightarrow |\gamma||\delta| - |\beta||\alpha| < 2|\beta||\gamma|$$

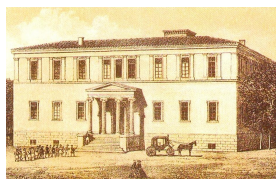
$$\Leftrightarrow \frac{|\gamma||\delta| - |\beta||\alpha|}{|\beta||\gamma|} < 2$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{\delta}{\beta} \right| - \left| \frac{\alpha}{\gamma} \right| < 2$$

$$\beta, \gamma \neq 0$$

1^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1^{ου} ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ (Διάρκεια 1 δ. ώρα)²

ΠΠ ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής - Λυγάτσικας Ζήνων



Α1 ΛΥΚΕΙΟΥ ΟΜΑΔΑ Β

ΟΝΟΜ/ΜΟ :

1. (α) Τι είναι η τετραγωνική ρίζα ενός πραγματικού μη-αρνητικού αριθμού a ;

(Μονάδες 6)

(β) Δείξτε ότι αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τότε

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$$

(Μονάδες 11)

(γ) Απαντήστε με ΣΩΣΤΟ (Σ) ή ΛΑΘΟΣ (Λ) στα παρακάτω ερωτήματα :

- i. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\sqrt{\alpha^2} = \sqrt{\beta^2}$, τότε $\alpha = \beta$.
- ii. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, με $\gamma < 0$ και $\alpha < \beta$, τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$.
- iii. Για οποιοσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x και θ ισχύει ότι αν $|x| < \theta$ τότε $-\theta < x < \theta$
- iv. Ο αριθμός 1 είναι ο μοναδικός πραγματικός που είναι ίσος με τον αντίστροφό του.

(Μονάδες 8)

2. Να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{|43 - \sqrt{2013}|} + \frac{1}{|43 + \sqrt{2013}|} = \frac{\sqrt{2013}}{82}$$

(Μονάδες 25)

3. Να δείξετε ότι για κάθε πραγματικούς x και y ισχύει

$$(x^2 + xy + y^2)^2 - 4xy(x^2 + y^2) = (x^2 - xy + y^2)^2$$

(Μονάδες 25)

²c : \dots\zenon\education\A_LYC\ALGEBRA\ch2_3\exam_tetram\2013 - 14\exam_A.tex

4. Έστω $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ με $z \neq 0$, έτσι ώστε: $|z| < |y| < |t|$ και $|t| - |y| < |x + z|$. Δείξτε ότι:

(α) $\left| \frac{z}{y} \right| < 1$

(Μονάδες 5)

(β) $\left| \frac{z}{y} \right| < \frac{|x| + |z|}{|t| - |y|}$

(Μονάδες 10)

(γ) $\left| \frac{t}{y} \right| - \left| \frac{x}{z} \right| < 2$

(Μονάδες 10)

1 Ιανουαρίου 2014