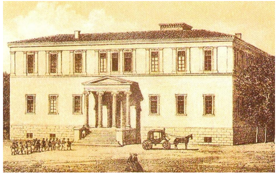
1^{ο} ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1^{ου} ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ (Διάρκεια 1 δ. ώρα)[1]

ΠΠ ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής - Λυγάτσικας Ζήνων



Α1 ΛΥΚΕΙΟΥ $\boxed{\textbf{ΟΜΑΔΑ } \mathcal{A}}$

ΟΝΟΜ/ΜΟ :

1. (α') Να δώσετε τον αλγεβρικό ορισμό της απολύτου τιμής ενός πραγματικού αριθμού α.

   (Μονάδες 6)

   (β') Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\beta \neq 0$, δείξτε ότι: $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$.

   (Μονάδες 11)

   (γ') Απαντήστε με ΣΩΣΤΟ (Σ) ή ΛΑΘΟΣ (Λ) στα παρακάτω ερωτήματα:

   i. Ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ότι $-|x| \leq x \leq |x|$.
   ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι: $-|x|^2 = |x^2|$.
   iii. Αν για τους πραγματικούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0$, ισχύει $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε $\alpha - \gamma < \beta - \delta$.
   iv. Το 0 είναι ο μόνος αριθμός που είναι ίσος με τον αντίθετό του.

   (Μονάδες 8)

2. Να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{|45 - \sqrt{2014}|} + \frac{1}{|45 + \sqrt{2014}|} = \frac{90}{11}$$

   (Μονάδες 25)

3. Δείξτε ότι για κάθε πραγματικό x ισχύει:

$$(x+2)^3 - 4(x+1)^3 + 6x^3 + (x-2)^3 = 4(x-1)^3$$

   (Μονάδες 25)

[1] $c: \backslash \ldots \backslash zenon \backslash education \backslash A\_LYC \backslash ALGEBRA \backslash ch2\_3 \backslash exam\_tetram \backslash 2013-14 \backslash exam\_A.tex$

4. Έστω $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ με $\gamma \neq 0$, έτσι ώστε: $|\delta| - |\beta| < |\alpha + \gamma|$ και $|\gamma| < |\beta| < |\delta|$. Δείξτε ότι:

(α') $\left|\dfrac{\gamma}{\beta}\right| < 1$

(Μονάδες 5)

(β') $\left|\dfrac{\gamma}{\beta}\right| < \dfrac{|\alpha| + |\gamma|}{|\delta| - |\beta|}$

(Μονάδες 10)

(γ') $\left|\dfrac{\delta}{\beta}\right| - \left|\dfrac{\alpha}{\gamma}\right| < 2$

(Μονάδες 10)

1 Ιανουαρίου 2014

Ενδεικτικές λύσεις

1. (α') $|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \text{αν} \quad \alpha > 0 \\ 0 & \text{αν} \quad \alpha = 0 \\ -\alpha & \text{αν} \quad \alpha < 0 \end{cases}$

   (β') Επειδή οι 2 όροι της ισότητας είναι θετικοί αριθμοί μπορούμε να υψώσουμε την δεδομένη ισότητα στο τετράγωνο:

$$\begin{aligned} \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{a}{b}\right|^2 = \left(\frac{|a|}{|b|}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{|a|^2}{|b|^2} \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \end{aligned}$$

   Η τελευταία ισότητα είναι αληθής, είναι ιδιότητα της απολύτου τιμής, άρα, και η αρχική.

   (γ') $i)$ Σ, $ii)$ Λ, $iii)$ Λ, $iv)$ Σ.

2. Επειδή $45^2 = 2025$ τότε $45^2 > 2014 \Leftrightarrow 45 - \sqrt{2014} > 0 \Leftrightarrow \left|45 - \sqrt{2014}\right| = 45 - \sqrt{2014}$. Επομένως:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left|45 - \sqrt{2014}\right|} + \frac{1}{\left|45 + \sqrt{2014}\right|} &= \frac{1}{45 - \sqrt{2014}} + \frac{1}{45 + \sqrt{2014}} \\ &= \frac{45 + \sqrt{2014} + 45 - \sqrt{2014}}{45^2 - 2014} \\ &= \frac{90}{11} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} (x+2)^3 - 4(x+1)^3 + 6x^3 + (x-2)^3 &= 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 \\ &= 4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \\ &= 4(x-1)^3 \end{aligned}$$

4. (α') $|\gamma| < |\beta| \overset{\beta \neq 0}{\Leftrightarrow} \dfrac{|\gamma|}{|\beta|} < 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{\gamma}{\beta}\right| < 1$

   (β') $|\delta| - |\beta| < |\alpha + \gamma| \leq |\alpha| + |\gamma|$ άρα, επειδή $|\delta| - |\beta| \neq 0$, έχουμε:

$$\frac{|\alpha| + |\gamma|}{|\delta| - |\beta|} > 1$$

   Άρα,

$$\left|\frac{\gamma}{\beta}\right| < 1 < \frac{|\alpha| + |\gamma|}{|\delta| - |\beta|}$$

(γ′) Από το δεύτερο ερώτημα:

$$\left|\frac{\gamma}{\beta}\right| < \frac{|\alpha| + |\gamma|}{|\delta| - |\beta|}$$

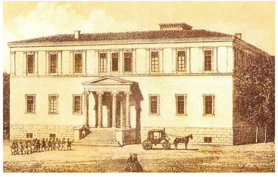
ή

$$\begin{aligned} |\gamma||\delta| - |\gamma||\beta| < |\beta||\alpha| + |\beta||\gamma| \quad &\Leftrightarrow \quad |\gamma||\delta| - |\beta||\alpha| < 2|\beta||\gamma| \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{|\gamma||\delta| - |\beta||\alpha|}{|\beta||\gamma|} < 2 \\ &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{\delta}{\beta}\right| - \left|\frac{\alpha}{\gamma}\right| < 2 \end{aligned}$$

$\beta, \gamma \neq 0$

1^{o} ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1^{ou} ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ (Διάρκεια 1 δ. ώρα)[2]

ΠΠ ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής - Λυγάτσικας Ζήνων



Α1 ΛΥΚΕΙΟΥ **ΟΜΑΔΑ $\mathcal{B}$**

ΟΝΟΜ/ΜΟ :

1. (α΄) Τι είναι η τετραγωνική ρίζα ενός πραγματικού μη-αρνητικού αριθμού α;

(Μονάδες 6)

(β΄) Δείξτε ότι αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τότε
$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$$

(Μονάδες 11)

(γ΄) Απαντήστε με ΣΩΣΤΟ (Σ) ή ΛΑΘΟΣ (Λ) στα παρακάτω ερωτήματα :

i. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\sqrt{\alpha^2} = \sqrt{\beta^2}$, τότε $\alpha = \beta$.

ii. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, με $\gamma < 0$ και $\alpha < \beta$, τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$.

iii. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αρθμούς x και θ ισχύει ότι αν $|x| < \theta$ τότε $-\theta < x < \theta$

iv. Ο αριθμός 1 είναι ο μοναδικός πραγματικός που είναι ίσος με τον αντίστροφό του.

(Μονάδες 8)

2. Να δείξετε ότι :
$$\frac{1}{|43 - \sqrt{2013}|} + \frac{1}{|43 + \sqrt{2013}|} = \frac{\sqrt{2013}}{82}$$

(Μονάδες 25)

3. Να δείξετε ότι για κάθε πραγματικούς x και y ισχύει
$$(x^2 + xy + y^2)^2 - 4xy(x^2 + y^2) = (x^2 - xy + y^2)^2$$

(Μονάδες 25)

[2] $c : \backslash \ldots \backslash zenon \backslash education \backslash A\_LYC \backslash ALGEBRA \backslash ch2\_3 \backslash exam\_tetram \backslash 2013-14 \backslash exam\_A.tex$

4. Έστω $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ με $z \neq 0$, έτσι ώστε: $|z| < |y| < |t|$ και $|t| - |y| < |x + z|$. Δείξτε ότι:

(α') $\left|\frac{z}{y}\right| < 1$

(Μονάδες 5)

(β') $\left|\frac{z}{y}\right| < \frac{|x| + |z|}{|t| - |y|}$

(Μονάδες 10)

(γ') $\left|\frac{t}{y}\right| - \left|\frac{x}{z}\right| < 2$

(Μονάδες 10)

1 Ιανουαρίου 2014