ΣΧΕΔΙΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ Β Λυκ. Κατ/νση

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: § 3.1 – **Εξίσωση Ευθείας - Μέρος 2^{o}**

1) **ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ:**
   Να υπολογίζουν την γενική εξίσωση της ευθείας σαν γεωμετρικό τόπο σημείων που ικανοποιούν κάποιες συνθήκες.

2) **ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ:** Καθοδήγηση – διάλογος
3) **ΕΠΟΠΤΙΚΑ ΜΕΣΑ:** Φύλλα εργασίας.
4) **ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ:** Διάφορα θεωρήματα της γεωμετρίας. Κυρίως, θεώρημα Θαλή και ομοιότητα τριγώνων.

5) **ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΟΡΕΙΑ:**
   1. Επαναπροσδιορισμός των εξισώσεων της ευθείας.
   2. Η ευθεία σαν γεωμετρικός τόπος (μερικά παραδείγματα)

6) **ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ:** Κανονικό διάνυσμα ευθείας**,** Γεωμετρικός τόπος σημείων.

7) **ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ**

Πρόκειται να επαναπροσδιορίσουμε την εξίσωση της ευθείας ώστε να έχει μορφή

$$Ax + By + \Gamma = 0 \qquad \text{με } A^2+B^2 \neq 0 \quad (1)$$

Θα αναρωτιέστε εύλογα φυσικά, γιατί τόσος κόπος και τι αλλάζει αν πούμε την ευθεία έτσι ή αλλοιώς; Η απάντηση βρίσκεται εκεί όπου ακριβώς το ελληνικό δαιμόνιο «έκοψε» την ύλη. Στην αναλυτική έκφραση των καμπυλών 2^{ου} βαθμού. Πρόκειται για την ταξινόμηση καμπυλών, και είναι μια «τακτοποίηση» απολύτως τυπική της εξίσωσης. Αν κάτι αξίζει είναι ο αλγεβρικός φορμαλισμός με τους δημοφιλείς περιορισμούς πάνω στις μεταβλητές. Πολύ χρήσιμο για την κουλτούρα των μαθητών, ιδίως στο σύστημα των πανελληνίων εξετάσεων.
Τέλος, προτείνουμε την απόδειξη ενός πολύ ωραίου αποτελέσματος, που βρισκόταν σε όλα τα κλασσικά εγχειρίδια όπως του Ray, που λέει ότι: αν οι συντεταγμένες 3 σημείων ικανοποιούν μια εξίσωση της μορφής (1) τότε ανήκουν πάνω σε ευθεία.

Βιβλιογραφία:

1. Αδαμόπουλος Λ, Βισκαδουράκης Β. κ.αλ. Μαθηματικά Β Ταξη Γενικού Λυκείου, Θετική και Τεχνολογική κατ/νση, ΟΕΔΒ.

2. Casey, J., A treatise on the analytical geometry of the point line, circle and conic sections, Hodges F. and Co. Dublin, London, 1883.

3. Ray, J., Treatise on Analytic Geometry, Wilson, Hinkle and Co. 1869.

4. Λυγάτσικας Ζ: Σημειώσεις.

ΓΙΑ ΤΟΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗ

1η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΩΡΑ

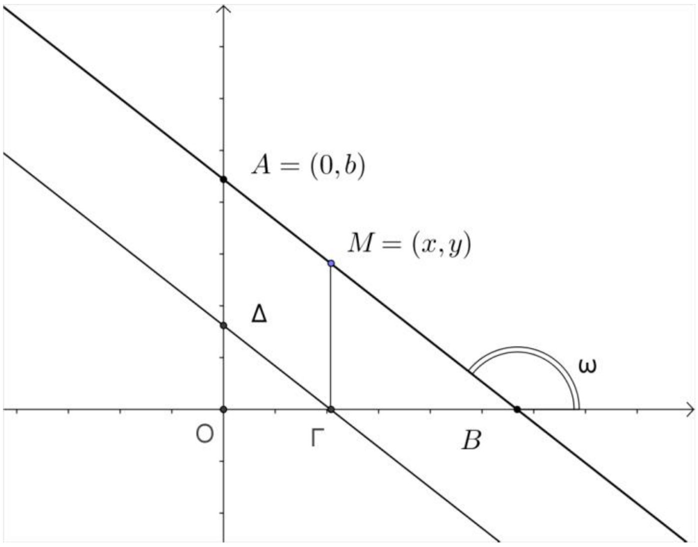
ΣΤΟΧΟΣ:

Να υπολογίζουν την εξίσωση της ευθείας σαν γεωμετρικό τόπο σημείων που ικανοποιούν κάποιες συνθήκες.

ΦΑΣΗ 1

1ο Πρόβλημα: Υποθέστε ότι γνωρίζουμε την γωνία $\omega \neq 0^o$ ή 90^o, που σχηματίζει μια ευθεία με τον άξονα x, καθώς και το σημείο της Α που αυτή η ευθεία τέμνει τον άξονα y.

Ζητάμε να βρούμε την εξίσωση της ευθείας.



Έστω M=(x,y) σημείο της ευθείας. Προβάλλω το Μ πάνω στον άξονα x, στο σημείο Γ. Από το Γ φέρω ευθεία παράλληλη στην ευθεία που τέμνει τον άξονα y στο σημείο Δ.

3) Στο τρίγωνο ΟΓΔ έχω: $\varepsilon\varphi\,(O\hat{\Gamma}\Delta) = \dfrac{O\Delta}{O\Gamma}$ (*)

4) Εκφράστε τα ΟΔ και ΟΓ συναρτήσει των b, x και y:

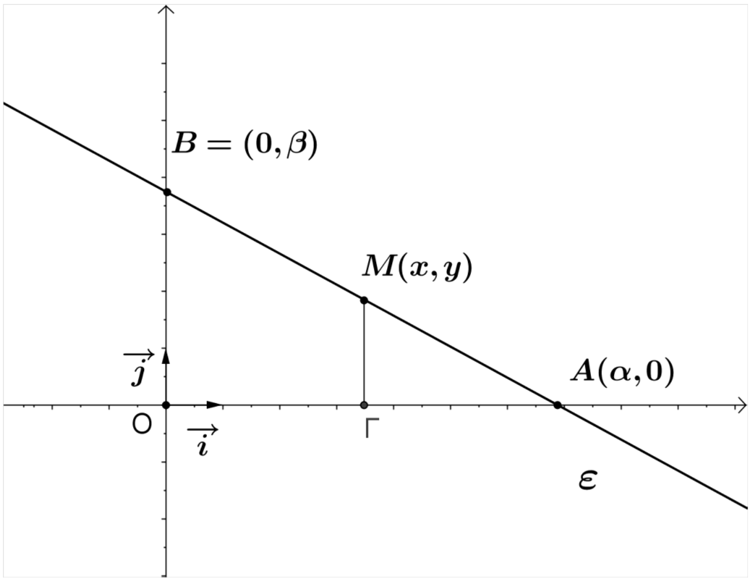
Άρα, η $\varepsilon\varphi\,(O\hat{\Gamma}\Delta) = \dfrac{O\Delta}{O\Gamma}$ γίνεται: $= \dfrac{b-y}{x}$

Παρατηρείστε ότι η γωνία ΟΔΓ και η ω είναι παραπληρωματικές. Λυστε την εξίσωση (*) ως προς y: $y = -\varepsilon\varphi(O\Gamma\Delta)\cdot x + b = \varepsilon\varphi(\omega)\cdot x + b$
η οποία είναι η καμπύλη των σημείων Μ που ικανοποιούν την συνθήκη.
Το αντίστροφο ισχύει; Διατυπώστε και αποδείξτε.

Η εξίσωση $y = \varepsilon\varphi(\omega)\cdot x + b$ παριστά ευθεία που διέρχεται από το Α (0,b) και έχει γωνία με τον άξονα x ίση με ω.
Απόδειξη: Προφανώς το Α είναι σημείο της ευθείας. Επίσης το παράλληλο διάνυσμα προς την $y = \varepsilon\varphi(\omega)\cdot x + b$ έχει κλίση ω.

<u>2^o Πρόβλημα:</u> Θέλουμε να προσδιορίσουμε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία Α=(α,0) και Β=(0,β).

Έστω σημείο Μ=(x,y) σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα Α και Β. Προβάλω το Μ πάνω στον άξονα x στο σημείο Γ.



2. Τα τρίγωνα ΑΜΓ και ΑΒΟ είναι όμοια:

$$\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΟ}} = \frac{\text{ΜΓ}}{\text{ΟΒ}} \quad (*)$$

Υπολογίστε συναρτήσει των α, β, x και y τα

ΑΓ = α - x   ΑΟ = α   ΜΓ = y   ΟΒ = β

Αντικαταστήστε στην σχέση (*) και γραψτε την εξίσωση στη μορφή της άσκησης 5 σελίδας 65 του σχολικού.

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$$

ΦΑΣΗ 2

Σύνθεση

Έχουμε δεί μέχρι στιγμής του εξής τύπους της ευθείας

- Ευθεία που είναι κάθετος στον άξονα x

$$x = \alpha$$

- Ευθείαπου είναι κάθετος στον άξονα y

$$y = \beta$$

- Ευθεία που διέρχεται από σημείο Α και είναι παράλληλη στο διάνυσμα (κ,λ)

$$y = \frac{\lambda}{\kappa}x - \frac{x_A\lambda - y_A\kappa}{\kappa}$$

- Ευθεία που διέρχεται από σημείο Α του άξονα y και σχηματίζει γωνία ω με 1 τον άξονα x.

$$y = \text{εφ}\,(\omega) \cdot x + b$$

- Ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α=(α,0) και Β=(0,β)

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$$

Γράψτε τις παραπάνω μορφές στη γενική μορφή

$$A\,x + B\,y + \Gamma = 0 \qquad \text{με } A^2+B^2 \neq 0 \quad (1)$$

Θεώρημα: Έστω ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων και ένα διάνυσμα v=(a,b) με $a^2 + b^2 \neq 0$.

1. Ευθεία κάθετη στο διάνυσμα είναι της μορφής $a\,x + b\,y + c = 0$, $c \in \mathbb{R}$
2. Έστω $a, b, c \in \mathbb{R}$ με $a^2 + b^2 \neq 0$. Το σύνολο των σημείων των οποίων οι συντεταγμένες ικανοποιούν την $a\,x + b\,y + c = 0$ είναι μια ευθεία με κανονικό διάνυσμα v=(a,b).

Απόδειξη: Δες σημειώσεις θεώρημα 2.1 ■

ΦΑΣΗ 3

Αξιολόγηση

1. Εφαρμογή 1 σχολικό σελ. 67.
2. Αν υπάρχει χρόνος, να γίνει το θεώρημα 2.2 από σημειώσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: Όλες οι ασκήσεις του βιβλίου σελ. 69/70.

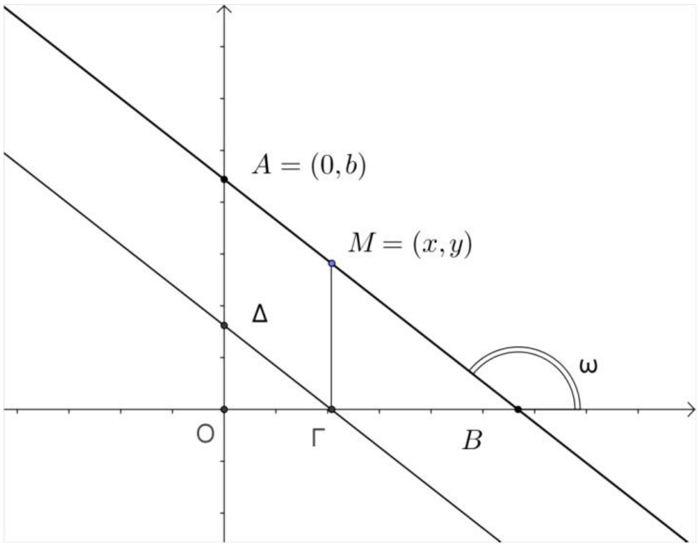
ΓΙΑ ΤΟΝ ΜΑΘΗΤΗ

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ παρ. 2.2

ΣΤΟΧΟΣ:

Να υπολογίζουν την εξίσωση της ευθείας σαν γεωμετρικό τόπο σημείων που ικανοποιούν κάποιες συνθήκες.

ΦΑΣΗ 1



1ο Πρόβλημα: Υποθέστε ότι γνωρίζουμε την γωνία ω που σχηματίζει μια ευθεία με τον άξονα x, καθώς και το σημείο της Α που αυτή η ευθεία τέμνει τον άξονα y.

Ζητάμε να βρούμε την εξίσωση της ευθείας.

Έστω M=(x,y) σημείο της ευθείας. Προβάλλω το Μ πάνω στον άξονα x, στο σημείο Γ. Από το Γ φέρω ευθεία παράλληλη στην ευθεία που τέμνει τον άξονα y στο σημείο Δ.

1) Στο τρίγωνο ΟΓΔ έχω: $\varepsilon\varphi\,(\text{Ο}\hat{\Gamma}\Delta) = \dfrac{\text{ΟΓ}}{\text{ΟΔ}}$ (*)

2) Εκφράστε τα ΟΔ και ΟΓ συναρτήσει των b, x και y:

Άρα, η $\varepsilon\varphi\,(\text{Ο}\hat{\Gamma}\Delta) = \dfrac{\text{ΟΓ}}{\text{ΟΔ}}$ γίνεται:

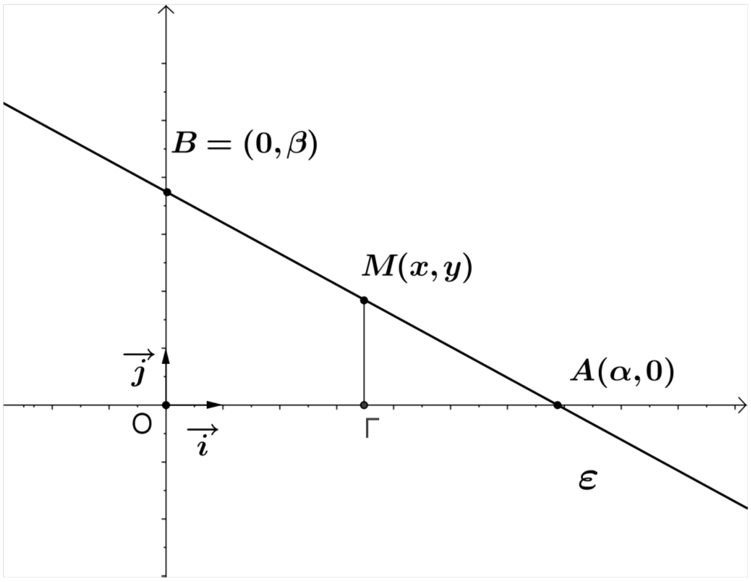
Παρατηρείστε ότι η γωνία ΟΔΓ και η ω είναι παραπληρωματικές. Λυστε την εξίσωση (*) ως προς y.

y = …….

η οποία είναι η καμπύλη των σημείων Μ που ικανοποιούν την συνθήκη.
Το αντίστροφο ισχύει; Διατυπώστε και αποδείξτε.

2ο Πρόβλημα: Θέλουμε να προσδιορίσουμε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία Α=(α,0) και Β=(0,β).

Έστω σημείο Μ=(x,y) σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα Α και Β. Προβάλω το Μ πάνω στον άξονα x στο σημείο Γ.



1. Τα τρίγωνα ΑΜΓ και ΑΒΟ είναι όμοια:

$$\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΟ}} = \frac{\text{ΜΓ}}{\text{ΟΒ}} \quad (*)$$

Υπολογίστε συναρτήσει των α, β, x και y τα

ΑΓ = ΑΟ = ΜΓ = ΟΒ =

Αντικαταστήστε στην σχέση (*) και γραψτε την εξίσωση στη μορφή της άσκησης 5 σελίδας 65 του σχολικού.

<u>ΦΑΣΗ 2</u>
Σύνθεση

Έχουμε δεί μέχρι στιγμής του εξής τύπους της ευθείας

Εξίσωση ευθείας	$A x + B y + \Gamma = 0$ με $A^2+B^2 \neq 0$
$x = \alpha$	
$y = \beta$	
$y = \frac{\lambda}{\kappa}x - \frac{x_A\lambda - y_A\kappa}{\kappa}$	
$y = \varepsilon\varphi(\omega) \cdot x + b$	
$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$	

<u>Θεώρημα</u>: Έστω ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων και ένα διάνυσμα v=(a,b) με $a^2 + b^2 \neq 0$.

1. Ευθεία κάθετη στο διάνυσμα είναι της μορφής $a x + b y + c = 0$, $c \in \mathbb{R}$
2. Έστω a, b, c $\in \mathbb{R}$ με $a^2 + b^2 \neq 0$. Το σύνολο των σημείων των οποίων οι συντεταγμένες ικανοποιούν την $a x + b y + c = 0$ είναι μια ευθεία με κανονικό διάνυσμα v = (a,b).

<u>Απόδειξη:</u>

1. Αν ε η ευθεία με κανονικό διάνυσμα το v, τότε αν $A=(x_A,y_A)$ και $M=(x,y)$, δείξτε ότι $M \in \varepsilon$ αν $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow$.... ουσιαστικά ότι ο γ.τ. του σημείου M είναι μια εξίσωση της μορφής $a x + b y + c = 0$.

2. Αν ε το σύνολο των σημείων M = (x,y) τέτοιο ώστε $a x + by + c = 0$ και $A=(x_A,y_A)$ σημείο του ε, τότε από την
$a x + b y + c = a x_A + b y_A + c \Leftrightarrow$ …… δείξτε ότι το M ανήκει σε ευθεία κάθετη στο διάνυσμα v.

ΦΑΣΗ 3

Αξιολόγηση

(Εφαρμογή 1 σχολικό σελ. 67)

Δίνεται η εξίσωση (x – 2y +5) + λ (3x + 2y + 7) = 0

Να αποδειχθεί ότι:

1. ***Για κάθε τιμή της παραμέτρου λ η εξίσωση παριστάνει ευθεία***
2. ***Όλες οι ευθείες που ορίζονται από την παραπάνω εξίσωση (δες επίσης άσκηση 9 σελ. 10 σημειώσεις) διέρχονται από ένα σημείο, το οποίο να βρεθεί.***
3. ***Ποια από τις παραπάνω ευθείες είναι κάθετη στην ευθεία y = 2x.***

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ:</u> Όλες οι ασκήσεις του βιβλίου σελ. 69/70.