ΣΧΕΔΙΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ Β Λυκ. Κατ/νση

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: § 2.1 – **Εξίσωση Ευθείας - Μέρος 1ο**

1) **ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ:**
Να μπορούν να χρησιμοποιούν το διάνυσμα στην αλγεβρική αναπαράσταση της εξίσωσης.
Να μπορούν να αναπαριστάνουν γεωμετρικά στοιχεία της ευθείας που εμπεριέχονται μέσα στην απλή αλγεβρική της εξίσωση.

2) **ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ:** Καθοδήγηση – διάλογος
3) **ΕΠΟΠΤΙΚΑ ΜΕΣΑ:** Φύλλα εργασίας, Συστήματα δυναμικής γεωμετρίας Geogebra.
4) **ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ:** Το κεφάλαιο 6 της Άλγεβρας Α Λυκείου που αφορά τις συναρτήσεις και ειδικότερα την μελέτη της συνάρτησης f(x)=ax+b.
5) **ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΟΡΕΙΑ:**
   1. Ανάκλιση γνώσεων από την Α Λυκείου
   2. Σύνδεση με το κεφάλαιο των διανυσμάτων
   3. Η ευθεία σαν γεωμετρικός τόπος (μερικά παραδείγματα)

6) **ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ:** Γωνία ευθείας με τον άξονα x, διάνυσμα παράλληλο με ευθεία, συντελεστής διεύθυνσης ευθείας, ευθεία διερχομένη από 2 σημεία.

7) **ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ**

Η πρώτη παράγραφος του κεφαλαίου, που αφορά την εξίσωση ευθείας, περιέχει ακριβώς όλα όσα έχουμε διδαχθεί στο κεφάλαιο 6.3 του βιβλίου της Άλγεβρας της Α Λυκείου. Επομένως, είναι μάταιη μια επανάληψη αν αυτή δεν συνοδεύεται από κάποια νέα προσέγγιση. Η προσέγγιση αυτή που προτείνουμε είναι:

1. Η εισαγωγή της ευθείας σαν γεωμετρικός τόπος σημείων.
2. Η εισαγωγή των διανυσμάτων, σαν ένα βοηθητικό εργαλείο στην μετατροπή των γεωμετρικών ιδιοτήτων σε αλγεβρικές.
3. Η συστηματική εισαγωγή του λογισμικού στην επεξεργασία προβλημάτων και στην επαλήθευση αποτελεσμάτων.

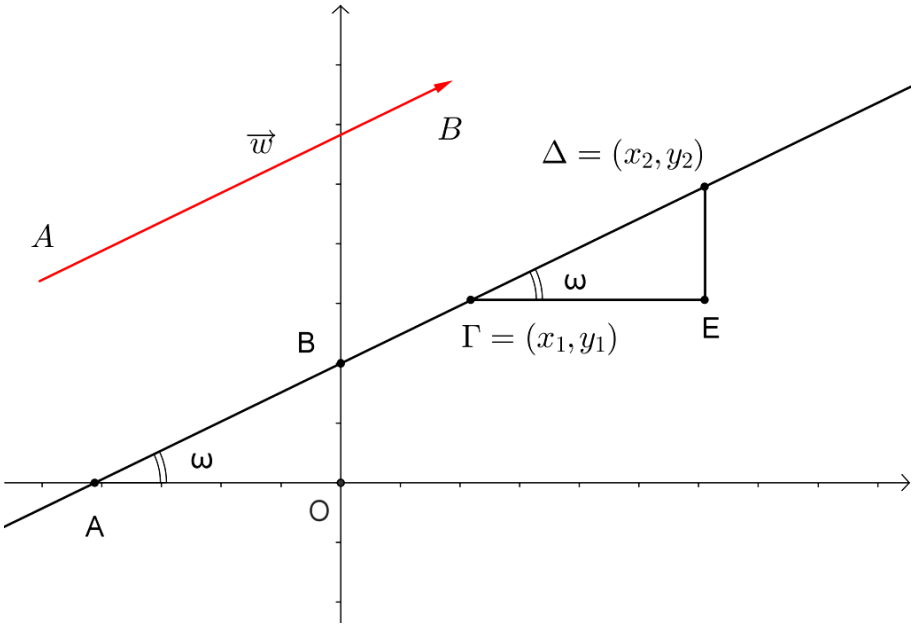
Απαραίτητη προυπόθεση είναι η διάθεση του Geogebra.

René Descartes (1596-1650) Ανακάλυψε την Αναλυτική Γεωμετρία. Έβαλε τα Μαθηματικά σε μια νέα τροχιά, πραγματοποιώντας για πρώτη φορά τον παραλληλισμό μεταξύ της γεωμετρικής γλώσσας, η οποία ήταν σχεδόν εμπειρική, και της γλώσσας της άλγεβρας.

ΓΙΑ ΤΟΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗ

Οι απαιτούμενες γνώσεις είναι:

Στην Α Λυκείου (και στο Γυμνάσιο) γνωρίζουμε ότι:



Η γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x λέγεται κλίση της ευθείας και είναι ένας αριθμός μεταξύ **0° και 180°**.
Η ευθεία έχει εξίσωση την **y= α x + β** όπου ο συντελεστής α λέγεται συντελεστής διεύθυνσης και είναι ίσος με την **εφ ω**.
Ο συντελεστής της ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία Γ(x_1, y_1) και Δ(x_2, y_2) είναι ίσος με: $\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Ο κλασσικός ορισμός της εφαπτομένης γωνίας ορθογωνίου τριγώνου.
Αν η ευθεία έχει β = 0, τότε διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
Κάθε ευθεία που είναι κάθετη στον άξονα x δεν ορίχει συντελεστή διεύθυνσης, η δε εξίσωσή της έχει μορφή **x = a**.
Μια ευθεία κάθετη στον άξονα y έχει εξίσωση **y = b**.
Επίσης, αν δύο ευθείες είναι μεταξύ τους παράλληλες, τότε έχουν τον ίδιο συντελεστή, δηλαδή οι γωνίες που σχηματίζουν με τον άξονα x είναι ίσες.
Αν A=(a,b) και B=(c,d) δύο σημεία του επιπέδου, τότε η απόσταση AB είναι ίση:

$$AB = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

Βιβλιογραφία:

1. Αδαμόπουλος Λ, Βισκαδουράκης Β. κ.αλ. Μαθηματικά Β Ταξη Γενικού Λυκείου, Θετική και Τεχνολογική κατ/νση, ΟΕΔΒ.

2. Casey, J., A treatise on the analytical geometry of the point line, circle and conic sections, Hodges F. and Co. Dublin, London, 1883.

3. Curriculum, Maths Seconde - 2e, France, Hachette, et Alli

4. Κείσογλου Σ., Μαθηματικά με το Geogebra, Β' Λυκείου, Βιβλίο Καθηγητή και Τετράδιο Μαθητή.

5. Ray, J., Treatise on Analytic Geometry, Wilson, Hinkle and Co. 1869.

1η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΩΡΑ

ΣΤΟΧΟΣ:

Να μελετούν τις ιδιότητες της ευθείας χρησιμοποιώντας την εξίσωσή της.

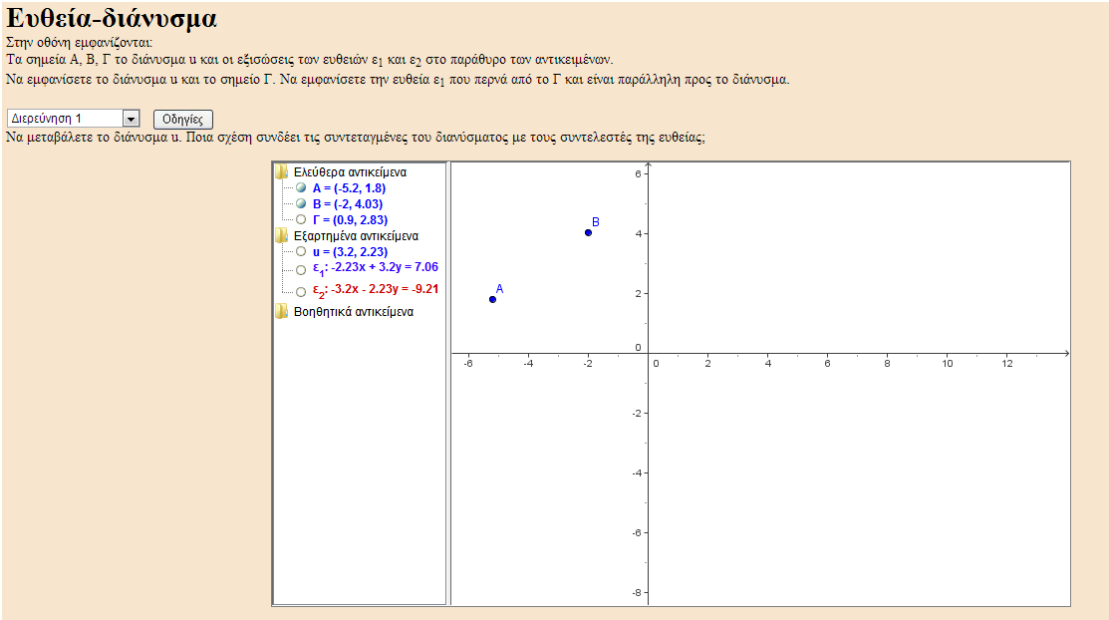
ΦΑΣΗ 1

Ανάκληση γνώσεων όπως περιγράφονται στην εισαγωγή

ΦΑΣΗ 2

Διάνυσμα παράλληλο και κάθετο σε ευθεία.

Ανοίξτε το σενάριο 1 από το Κεφάλαιο 9. Θα εμφανισθεί το παράθυρο



1) Να εμφανίσετε το διάνυσμα u. Αν αρχίσετε να μεταβάλλετε το διάνυσμα u, ποια σχέση συνδέει τις συντεταγμένες του διανύσματος με τους συντελεστές της ευθείας ε_1. (Το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ **ονομάζεται το διευθύνον διάνυσμα** της ευθείας).

> Ο μαθητής πρέπει να βρεί την σχέση $\lambda_\varepsilon = \frac{y_u}{x_u}$ αφού πρώτα δημιουργήσει στην επιφάνεια εργασίας το πηλίκο που δίνει τον συντελεστή του διανύσματος.

2) Πως μπορούμε να διακιολογήσουμε την σχέση αυτή με αυστηρώς μαθηματικά εργαλεία;

Η ερώτηση είναι ανοικτή.

Πρέπει να παρατρήσει ότι ο συντελεστής του διανύσματος έχει πάντα τον ίδιο συνελεστή με τον φορέα του. Επειδή η ευθεία είναι παράλληλη στον φορέα του διανύσματος θα έχουν την γωνία με τον άξονα x'x, και συνεπώς και την ίδια κλίση.

Διαφορετικά θα μπορούσε να δείξει υπολογιστικά ότι ο συντελεστής της ευθείας είναι ίσος με τον συντελεστή του διανύσματος. Αυτό προυποθέτει την ανακατασκευή της ευθείας ξεκινώντας από το διάνυσμα.

Στην Φάση 3 θα δώσουμε την αυστηρή απόδειξη.

3) Να εμφανίσετε την ευθεία ε_2 που είναι κάθετη στο διάνυσμα υ και διέρχεται από το Γ. Να μεταβάλετε το διάνυσμα. Ποια σχέση φαίνεται να συνδέει τις συντεταγμένες του διανύσματος με τους συντελεστές της ευθείας; (το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ λέγεται **<u>το κανονικό διάνυσμα της ευθείας.)</u>**

Ο μαθητής πρέπει να βρεί την σχέση $\lambda_\varepsilon \cdot \frac{y_u}{x_u} = -1$ αφού πρώτα δημιουργήσει στην επιφάνεια εργασίας το πηλίκο που δίνει τον συντελεστή του διανύσματος.

4) Πως μπορούμε να διακιολογήσουμε την σχέση αυτή με αυστηρώς μαθηματικά εργαλεία;

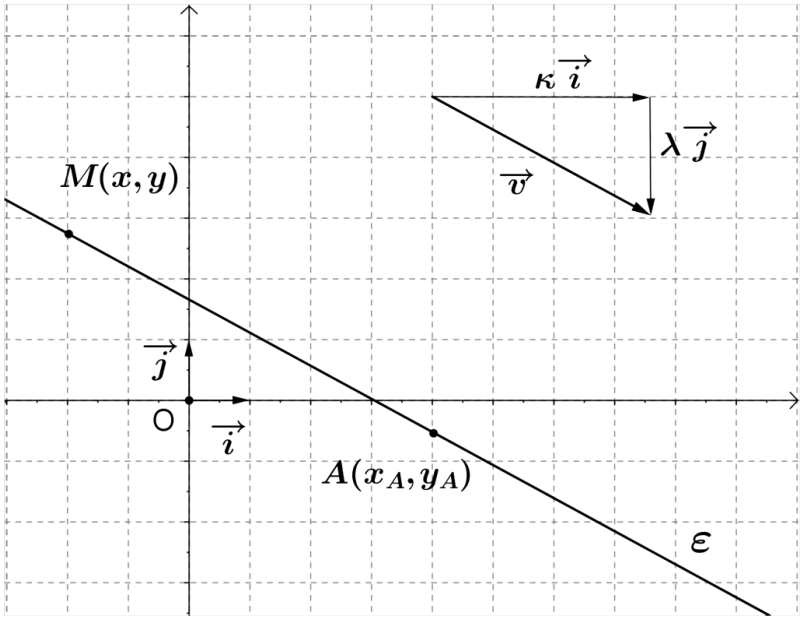
Η ερώτηση είναι ανοικτή.

Πρέπει να παρατρήσει ότι ο συντελεστής του διανύσματος έχει πάντα τον ίδιο συνελεστή με τον φορέα του. Επειδή η ευθεία είναι κάθετη στον φορέα του διανύσματος θα έχουν γινόμενο κλίσεων ίσο με -1.

Διαφορετικά θα μπορούσε να δείξει υπολογιστικά ότι ο συντελεστής της ευθείας και συντελεστής του διανύσματος έχουν γινόμενο -1 Αυτό προυποθέτει την ανακατασκευή της ευθείας ξεκινώντας από το διάνυσμα.

ΦΑΣΗ 3

Πρόβλημα: Υποθέστε ότι γνωρίζουμε ένα διάνυσμα $\vec{v}$ και ένα σημείο του επιπέδου Α = (α,β). Θέλουμε να βρούμε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη προς τον φορέα του διανύσματος.



1. Έστω Μ=(x,y) σημείο της ζητούμενης ευθείας (ε).
2. Τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ είναι παράλληλο στο $\vec{v}$ =(κ,λ), με κ≠0.
3. Γράψτε τις συντεταγμένες του $\overrightarrow{AM}$ = ……..
4. Γράψτε τις συντεταγμένες του $\vec{v}$ = …..
5. Γνωρίζουμε ότι (σελ. 37 βιβλίο) $\overrightarrow{AM} // \vec{v} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{v}) = 0$

   Υπολογίστε την ορίζουσα των δύο διανυσμάτων και επιλύστε την προκύπτουσα εξίσωση ως προς y.

   Άρα, η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{v}$, δίνεται από την εξίσωση:

$$y = \frac{\lambda}{\kappa}x - \frac{x_A\lambda - y_A\kappa}{\kappa}$$

ΦΑΣΗ 4

Αξιολόγηση

1) Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της Φάσης 2, μπορείτε να βρείτε και να αιτιολογήσετε την συνθήκη που εκφράζει την παραλληλία και την καθετότητα δύο ευθειών που δίνονται από τις εξισώσεις:

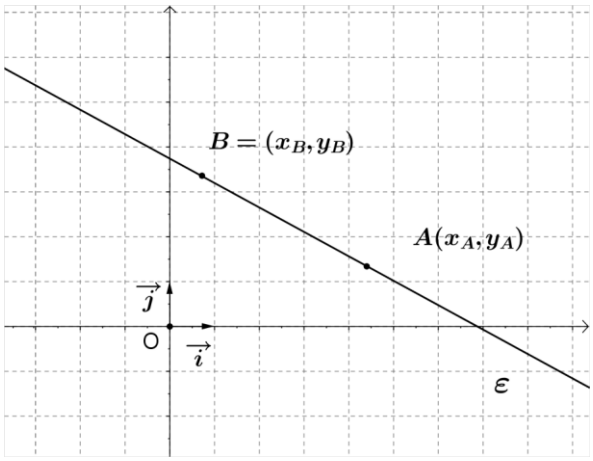
$$y = \lambda_1 x + \beta_1 \text{ και } y = \lambda_2 x + \beta_2$$

- ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ

- ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑ

2) Δίδονται δύο σημεία $A = (x_A, y_A)$ και $B = (x_B, y_B)$. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα δύο αυτά σημεία.

Ουσιαστικά ζητάμε να βρεί την εξίσωση της παραγράφου 1.2 των σημειώσεων.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ: Προτείνουμε να λυθούν όλες οι ασκήσεις του βιβλίου Ομάδα Α και Β σελ. 64/5.

ΓΙΑ ΤΟΝ ΜΑΘΗΤΗ

1η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΩΡΑ
ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΣΤΟΧΟΣ:

Να μελετούν τις ιδιότητες της ευθείας χρησιμοποιώντας την εξίσωσή της.

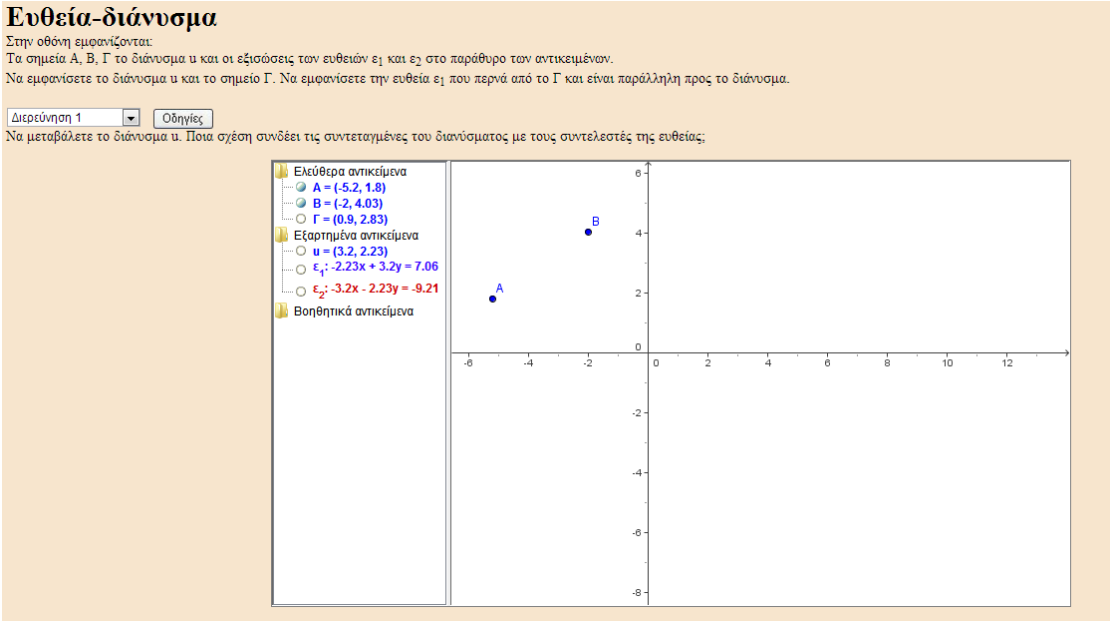
ΦΑΣΗ 1

Ανάκληση γνώσεων όπως περιγράφονται στην εισαγωγή

ΦΑΣΗ 2

Διάνυσμα παράλληλο και κάθετο σε ευθεία.

Ανοίξτε το σενάριο 1 από το Κεφάλαιο 9. Θα εμφανισθεί το παράθυρο



5) Να εμφανίσετε το διάνυσμα u. Αν αρχίσετε να μεταβάλλετε το διάνυσμα u, ποια σχέση συνδέει τις συντεταγμένες του διανύσματος με τους συντελεστές της ευθείας ε_1. (Το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ **ονομάζεται το διευθύνον διάνυσμα** της ευθείας).

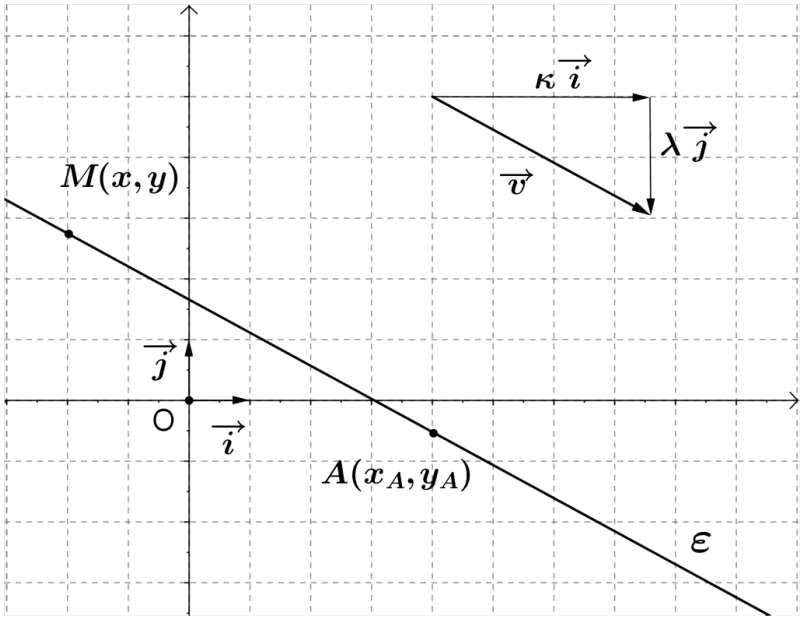
6) Πως μπορούμε να διακιολογήσουμε την σχέση αυτή με αυστηρώς μαθηματικά εργαλεία;

7) Να εμφανίσετε την ευθεία ε_2 που είναι κάθετη στο διάνυσμα υ και διέρχεται από το Γ. Να μεταβάλετε το διάνυσμα. Ποια σχέση φαίνεται να συνδέει τις συντεταγμένες του διανύσματος με τους συντελεστές της ευθείας; (το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ λέγεται **<u>το κανονικό διάνυσμα της ευθείας.)</u>**

8) Πως μπορούμε να διακιολογήσουμε την σχέση αυτή με αυστηρώς μαθηματικά εργαλεία;

ΦΑΣΗ 3

Πρόβλημα: Υποθέστε ότι γνωρίζουμε ένα διάνυσμα $\vec{v}$ και ένα σημείο του επιπέδου Α = (α,β). Θέλουμε να βρούμε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη προς τον φορέα του διανύσματος.



6. Έστω Μ=(x,y) σημείο της ζητούμενης ευθείας (ε).
7. Τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ είναι παράλληλο στο $\vec{v}$ =(κ,λ), με κ≠0.
8. Γράψτε τις συντεταγμένες του $\overrightarrow{AM}$ = ……..
9. Γράψτε τις συντεταγμένες του $\vec{v}$ = …..
10. Γνωρίζουμε ότι (σελ. 37 βιβλίο) $\overrightarrow{AM} // \vec{v} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{v}) = 0$

    Υπολογίστε την ορίζουσα των δύο διανυσμάτων και επιλύστε την προκύπτουσα εξίσωση ως προς y.

Άρα, η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{v}$, δίνεται από την εξίσωση:

ΦΑΣΗ 4

Αξιολόγηση

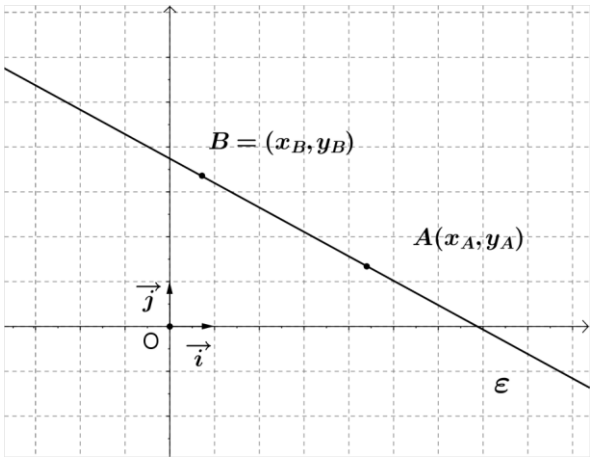
3) Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της Φάσης 2, μπορείτε να βρείτε και να αιτιολογήσετε την συνθήκη που εκφράζει την παραλληλία και την καθετότητα δύο ευθειών που δίνονται από τις εξισώσεις:

$$y = \lambda_1 x + \beta_1 \text{ και } y = \lambda_2 x + \beta_2$$

- ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ

- ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑ

4) Δίδονται δύο σημεία $A = (x_A, y_A)$ και $B = (x_B, y_B)$. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα δύο αυτά σημεία.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ: Προτείνουμε να λυθούν όλες οι ασκήσεις του βιβλίου Ομάδα Α και Β σελ. 64/5.

ΟΤΑΝ ΔΕΝ ΕΧΟΥΜΕ ΣΤΗ ΔΙΑΘΕΣΗ ΜΑΣ GeoGebra

ΣΧΕΔΙΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ Β Λυκ. Κατ/νση

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: § 3.1 – **Εξίσωση Ευθείας- Μέρος 1ο**

1) **ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ:**
   Να μελετούν τις ιδιότητες της ευθείας χρησιμοποιώντας την εξίσωσή της.

2) **ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ:** Καθοδήγηση – διάλογος
3) **ΕΠΟΠΤΙΚΑ ΜΕΣΑ:** Φύλλα εργασίας.
4) **ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ:** Το κεφάλαιο 6 της Άλγεβρας Α Λυκείου που αφορά τις συναρτήσεις και ειδικότερα την μελέτη της συνάρτησης f(x)=ax+b.
5) **ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΟΡΕΙΑ:**
   1. Ανάκλιση γνώσεων από την Α Λυκείου
   2. Σύνδεση με το κεφάλαιο των διανυσμάτων
   3. Η ευθεία σαν γεωμετρικός τόπος (μερικά παραδείγματα)

6) **ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ:** Γωνία ευθείας με τον άξονα x, διάνυσμα παράλληλο με ευθεία, συντελεστής διεύθυνσης ευθείας, ευθεία διερχομένη από 2 σημεία.

7) **ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ**

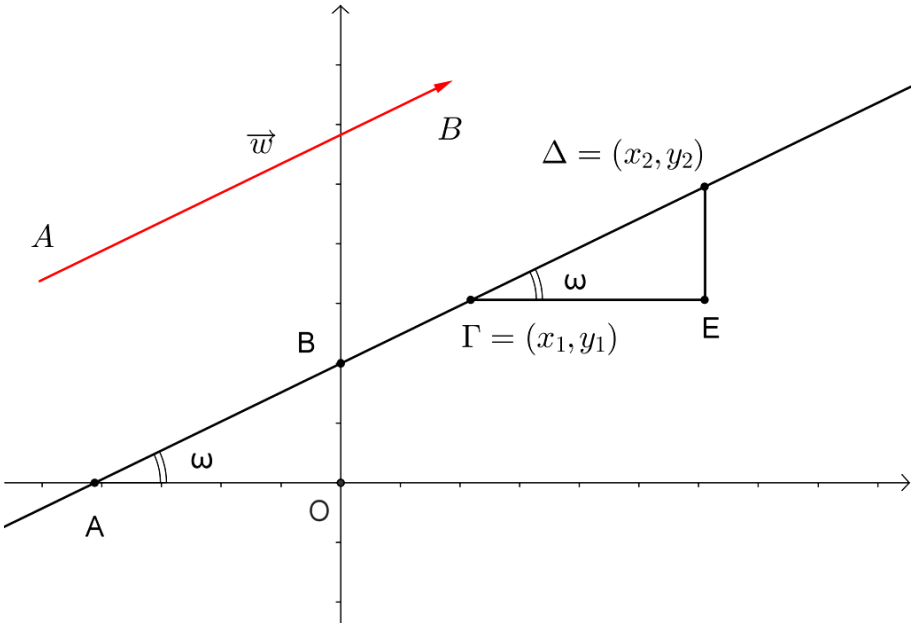
   Η πρώτη παράγραφος του κεφαλαίου, που αφορά την εξίσωση ευθείας, περιέχει ακριβώς όλα όσα έχουμε διδαχθεί στο κεφάλαιο 6.3 του βιβλίου της Άλγεβρας της Α Λυκείου. Επομένως, είναι μάταιη μια επανάληψη αν αυτή δεν συνοδεύεται από κάποια νέα προσέγγιση. Η προσέγγιση αυτή που προτείνουμε είναι:
   1. Η εισαγωγή της ευθείας σαν γεωμετρικός τόπος σημείων.
   2. Η εισαγωγή των διανυσμάτων, σαν ένα βοηθητικό εργαλείο στην μετατροπή των γεωμετρικών ιδιοτήτων σε αλγεβρικές.

René Descartes (1596-1650) Ανακάλυψε την Αναλυτική Γεωμετρία. Έβαλε τα Μαθηματικά σε μια νέα τροχιά, πραγματοποιώντας για πρώτη φορά τον παραλληλισμό μεταξύ της γεωμετρικής γλώσσας, η οποία ήταν σχεδόν εμπειρική, και της γλώσσας της άλγεβρας.

ΓΙΑ ΤΟΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗ

Οι απαιτούμενες γνώσεις είναι:

Στην Α Λυκείου (και στο Γυμνάσιο) γνωρίζουμε ότι:



Η γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x λέγεται κλίση της ευθείας και είναι ένας αριθμός μεταξύ **0° και 180°**.
Η ευθεία έχει εξίσωση την **y= α x + β** όπου ο συντελεστής α λέγεται συντελεστής διεύθυνσης και είναι ίσος με την **εφ ω**.
Ο συντελεστής της ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία Γ(x_1, y_1) και Δ(x_2, y_2) είναι ίσος με: $\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Ο κλασσικός ορισμός της εφαπτομένης γωνίας ορθογωνίου τριγώνου.
Αν η ευθεία έχει β = 0, τότε διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
Κάθε ευθεία που είναι κάθετη στον άξονα x δεν ορίχει συντελεστή διεύθυνσης, η δε εξίσωσή της έχει μορφή **x = a**.
Μια ευθεία κάθετη στον άξονα y έχει εξίσωση **y = b**.
Επίσης, αν δύο ευθείες είναι μεταξύ τους παράλληλες, τότε έχουν τον ίδιο συντελεστή, δηλαδή οι γωνίες που σχηματίζουν με τον άξονα x είναι ίσες.
Αν A=(a,b) και B=(c,d) δύο σημεία του επιπέδου, τότε η απόσταση AB είναι ίση:

$$AB = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

Βιβλιογραφία:

1. Αδαμόπουλος Λ, Βισκαδουράκης Β. κ.αλ. Μαθηματικά Β Ταξη Γενικού Λυκείου, Θετική και Τεχνολογική κατ/νση, ΟΕΔΒ.

2. Casey, J., A treatise on the analytical geometry of the point line, circle and conic sections, Hodges F. and Co. Dublin, London, 1883.

3. Curriculum, Maths Seconde - 2e, France, Hachette, et Alli

4. Ray, J., Treatise on Analytic Geometry, Wilson, Hinkle and Co. 1869.

ΓΙΑ ΤΟΝ ΜΑΘΗΤΗ

1η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΩΡΑ

ΣΤΟΧΟΣ:

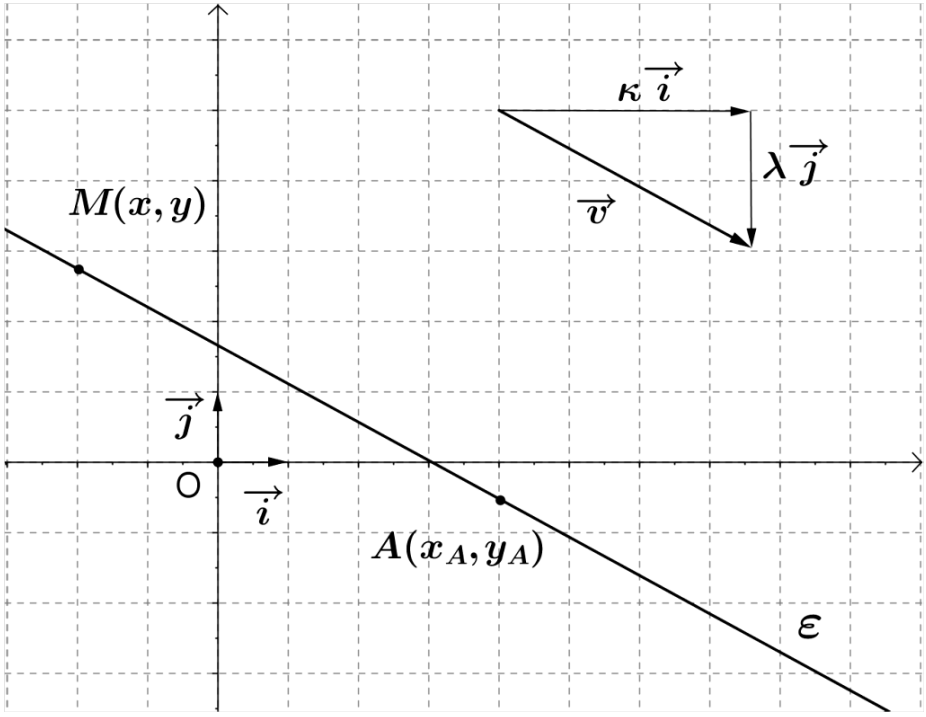
Να μελετούν τις ιδιότητες της ευθείας χρησιμοποιώντας την εξίσωσή της.

ΦΑΣΗ 1

Ανάκληση γνώσεων

ΦΑΣΗ 2

Πρόβλημα: Υποθέστε ότι γνωρίζουμε ένα διάνυσμα $\vec{v}$ και ένα σημείο του επιπέδου Α = (α,β). Θέλουμε να βρούμε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη προς τον φορέα του διανύσματος.



11. Έστω Μ=(x,y) σημείο της ζητούμενης ευθείας (ε).
12. Τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ είναι παράλληλο στο $\vec{v}$ =(κ,λ), με κ≠0.
13. Γράψτε τις συντεταγμένες του $\overrightarrow{AM}$ = ……..
14. Γράψτε τις συντεταγμένες του $\vec{v}$ = …..
15. Γνωρίζουμε ότι (σελ. 37 βιβλίο) $\overrightarrow{AM} // \vec{v} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{v}) = 0$

    Υπολογίστε την ορίζουσα των δύο διανυσμάτων και επιλύστε την προκύπτουσα εξίσωση ως προς y.

    Άρα, η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{v}$, δίνεται από την εξίσωση:

ΦΑΣΗ 3

Αξιολόγηση

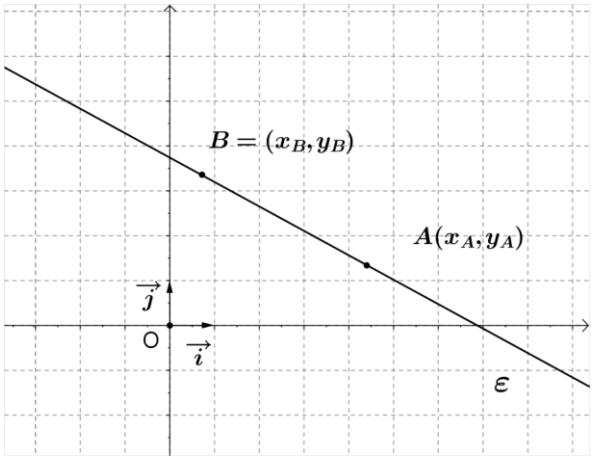
1) Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της Φάσης 2, μπορείτε να βρείτε και να αιτιολογήσετε την συνθήκη που εκφράζει την παραλληλία και την καθετότητα δύο ευθειών που δίνονται από τις εξισώσεις:

$$y = \lambda_1 x + \beta_1 \text{ και } y = \lambda_2 x + \beta_2$$

- ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ

- ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑ

2) Δίδονται δύο σημεία Α = (x_A,y_A) και Β = (x_B ,y_B). Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα δύο αυτά σημεία.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ: Προτείνουμε να λυθούν όλες οι ασκήσεις του βιβλίου Ομάδα Α και Β σελ. 64/5.