# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ Β ΛΥΚ. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ


Λυγάτσικας Ζήνων *

**Πειραματικό Γενικό Λύκειο Βαρβακείου Σχολής**


6 Ιανουαρίου 2013

## 1 Ασκήσεις

### 1.1 Ασκήσεις Επανάληψης

1. Δείξτε ότι: $|2\text{ημ}\, x + 3\text{συν}\, y| \leq 5$.

2. Να αποδείξτε ότι ημ $\theta \cdot$ συν $\theta \leq \dfrac{1}{2}$.

3. Να δείξετε ότι $|\text{εφ}\ \theta| + |\text{σφ}\ \theta| = |\text{εφ}\ \theta + \text{σφ}\ \theta|$.

4. Αν $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ να δείξετε ότι: συν $|x| = |\text{συν}\ (-2k\pi + x)|$, $k \in \mathbb{N}$.

5. Να δείξτε ότι: $\text{ημ}\ ^2 26^o + \text{ημ}\ ^2 34^o + \text{ημ}\ ^2 64^o + \text{ημ}\ ^2 56^o = 2$.

6. Να απλοποιηθεί η παράσταση

$$B = \frac{\text{ημ}\ \left(\dfrac{3\pi}{2} - \theta\right) \cdot \text{συν}\ \left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) \cdot \text{εφ}\ (2\pi - \theta)}{\text{συν}\ \left(\dfrac{5\pi}{2} + \theta\right) \cdot \text{σφ}\ (-\theta) \cdot \text{σφ}\ \left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right)}$$

7. Να αποδείξετε ότι: $\text{ημ}\ ^4 x - \text{συν}\ ^4 x = 1 - 2\text{συν}\ ^2 x$.

8. Να δείξτε ότι: $\text{σφ}\ 1^o + \text{σφ}\ 2^o + \text{σφ}\ 3^o + \ldots + \text{σφ}\ 179^o = 0$.

* LaTeXc:\...\education\ B_LYC\ geniki\algebra\trigonometrie\ exercises\ch3\trig_equation\ Exercise_Repetition.tex

## 1.2 Τριγωνομετρική συνάρτηση

9. Απο το σχολικό βιβλίο λύνω: (σελ. 81, ασκ:2,3,4,5), (σελ. 82, ασκ:7,8,9).

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda - 3\text{συν}\,(4x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ της οποίας η ελαχίστη τιμή είναι $-5$.

    (α') Να βρείτε το $\lambda$.

    (β') Για τη τιμή του $\lambda$ που βρήκατε παραπάνω, να βρείτε τον τύπο και στη συνέχεια την περίοδο της συνάρτησης $g(x) = f\Big(\dfrac{3x}{8}\Big)$.

    (γ') Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $h(x) = f\Big(\dfrac{3\pi}{4} - x\Big)$ στο διάστημα $\Big[-\dfrac{\pi}{2}, \pi\Big]$.

11. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \alpha\frac{1 + \text{συν}\,(2\beta x)}{2} - 2, \qquad x \in [0, 2\pi], \qquad \alpha > 0$$

Αν η περίοδος της είναι $T = \pi$ και έχει μέγιστο στο 3, τότε:

    (α') Να βρείτε τους αριθμούς $\alpha$ και $\beta$.

    (β') Να βρείτε το ελάχιστο της $f$ καθώς και τις τιμές του $x$ για τις οποίες η $f$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της.

    (γ') Για τις παραπάνω τιμές των $\alpha$ και $\beta$ να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της $f$ με τον άξονα $y'y$.

## 1.3 Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

12. (Άσκηση 1 (ιιι), σελ. 88 σχ. βιβλίο) Να λυθεί η εξίσωση:

$$\text{συν}\,x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

13. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\text{ημ}\,x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

14. (Άσκηση 5 (ι), σελ. 88 σχ. βιβλίο) Να λυθεί η εξίσωση:

$$(1 - \text{ημ}\,x)(2\text{ημ}\,x - \sqrt{3}) = 0$$

15. Να λυθεί η εξίσωση:

$$(1 - \text{ημ}\,x)(2\text{ημ}\,x - \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{4}) = 0$$

16. (Άσκηση 11 (ι), σελ. 88 σχ. βιβλίο)

    (α') Να λυθεί η εξίσωση: $2y^2 + y - 1 = 0$

    (β') Να λυθεί η εξίσωση: $2\eta\mu^2 x + \eta\mu\, x - 1 = 0$.

17. (α') Έστω $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Υποθέστε ότι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$. Τότε δείξτε ότι η εξίσωση $p(x) = 0$:

    i. έχει μόνο μια ρίζα στο διάστημα $[-1, 1]$, αν $p(-1)p(1) < 0$.

    ii. έχει ρίζα το $-1$ και η άλλη είναι μέσα στο $(-1, 1]$, η οποία φυσικά είναι ίση με $-\dfrac{\gamma}{\alpha}$, αν $\alpha - \beta + \gamma = 0$ και $\gamma^2 < \alpha^2$.

    iii. έχει ρίζα το $-1$ και η άλλη είναι εκτός του διαστήματος $(-1, 1]$, αν $\alpha - \beta + \gamma = 0$ και $\gamma^2 > \alpha^2$.

    iv. αν έχει δύο ρίζες $\rho_1 < \rho_2$ μέσα στο $[-1, 1]$ ή $[-1, 1] \cap (\rho_1, \rho_2) = \emptyset$, αν $\alpha \cdot p(1) > 0$ και $\alpha \cdot p(-1) > 0$.

    (β') Να διερευνηθεί η εξίσωση:

$$\mu \eta\mu^2 x - 2(\mu - 2)\eta\mu\, x + \mu + 2 = 0$$

18. Να λυθεί η ομογενής εξίσωση:

$$2\eta\mu^2 x + 2\sqrt{3}\Big(\eta\mu\, x \cdot \sigma\upsilon\nu\, x\Big) = 3$$

19. Να λυθούν οι ασκήσεις 6(Α), 10Α, 3(Β) σελίδα 24/5, του σχολικού βιβλίου.

20. Να δειχθεί ότι το σύστημα των δύο εξισώσεων:

$$b(b^2 - a^2 - 1)\sigma\upsilon\nu\,(x) + a(2b^2 - 1)\eta\mu\,(x) = ab \quad (1)$$
$$b(2a^2 - 1)\sigma\upsilon\nu\,(x) + a(a^2 - b^2 - 1)\eta\mu\,(x) = ab \quad (2)$$

έχει λύση όταν $a$ και $b$ είναι τα ημ και συν της ίδιας γωνίας $\omega$ αντίστοιχα. Να ορισθούν οι λύσεις αυτές.

21. Να διερευνηθεί ως προς $\mu$ η εξίσωση:

$$\sqrt{1 + \eta\mu^2 x} + \sqrt{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x} = \sqrt{\mu} \qquad (1)$$

22. Αν το τόξο $\alpha$ περιέχεται μεταξύ $0$ και $\dfrac{\pi}{2}$ να διερευνηθεί ως προς τον αριθμό των λύσεων η εξίσωση:

$$\varepsilon\varphi^2(x) - 2\varepsilon\varphi\,(\alpha)\varepsilon\varphi\,(x) + \sigma\upsilon\nu^2(\alpha) = 0.$$

23. (♣♣♣) Δείξτε ότι δεν υπάρχει τόξο $x$ έτσι ώστε:

$$\sigma\upsilon\nu\,\Big(\eta\mu\,(x)\Big) = \eta\mu\,\Big(\sigma\upsilon\nu\,(x)\Big).$$

## 2 Λύσεις

1. $|2\text{ημ}\, x + 3\text{συν}\, y| \leq |2\text{ημ}\, x| + |3\text{συν}\, y| \leq 2 + 3 = 5.$

2. $\left(\text{ημ}\,\theta + \text{συν}\,\theta\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \text{ημ}\,^2\theta + \text{συν}\,^2\theta \geq 2\text{ημ}\,\theta \cdot \text{συν}\,\theta \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \text{ημ}\,\theta \cdot \text{συν}\,\theta$

3. Επειδή εφ $\theta \cdot$ σφ $\theta = 1 > 0$ το συμπέρασμα έπεται απο την $|a+b| = |a| + |b|$ ανν $a \cdot b > 0$.

4. συν $(-2k\pi + x) =$ συν $(2k\pi - x) =$ συν $(x)$.

5. ημ $26^o =$ ημ $(90^o - 64^o) =$ συν $64^o$ και ημ $34^o =$ ημ $(90^o - 34^o) =$ συν $56^o$. Άρα, συν $^2 64^0 +$ ημ $^2 64^o +$ συν $^2 56^o +$ ημ $^2 56^o = 2$.

6. Είναι:

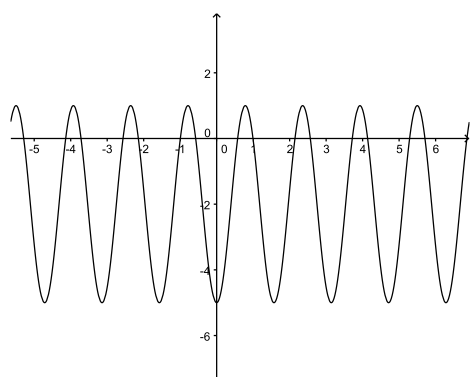
$$\begin{cases} \text{ημ}\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\text{συν}\,\theta, & \text{συν}\left(\frac{\pi}{2+\theta}\right) = -\text{ημ}\,\theta \\ \text{συν}\left(\frac{\pi}{2} + \left(2\pi + \theta\right)\right) = -\text{ημ}\,\theta, & \text{σφ}\,(-\theta) = -\text{σφ}\,(\theta) \\ \text{σφ}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\text{εφ}\,\theta \end{cases}$$

7. Εύκολο.

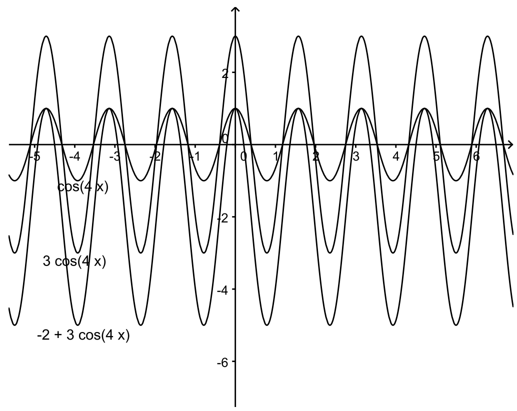
8. Παρατηρείστε ότι σφ $1^o +$ σφ $179^o =$ σφ $2^o +$ σφ $178^o = \ldots = 0$ και ότι το άθροισμα των προσθετέων είναι άρτιο, άρα, είναι ίσο με $0$.

9. Εύκολο.

10. (α') $\lambda - 3 = -5 \Leftrightarrow \lambda = -2$, δες σχήμα 6.



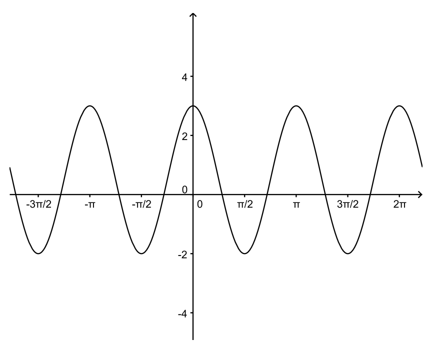

Σχήμα 1: Άσκηση 10α'.




Σχήμα 2: Άσκηση 10γ'.

(β') $f\left(\frac{3x}{8}\right) = -2 - 3\text{συν}\left(\frac{3x}{2}\right)$ με περίοδο $T = \frac{4\pi}{3}$.

(γ') $f\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = -2 + 3\text{συν}\,(4x)$ με διάγραμμα, σχήμα 2:



Σχήμα 3: Άσκηση 11.

11. (α') Πρέπει $\frac{2\pi}{2\beta} = \pi \Leftrightarrow \beta = 1$ και $\frac{\alpha}{2} - 2 + \frac{\alpha}{2} = 3 \Leftrightarrow \alpha = 5$.

    (β') $0 \leq 1 + \text{συν}\,(2x) \Leftrightarrow -2 \leq \frac{5(1+\text{συν}\,(2x))}{2} - 2$. Άρα, το ελάχιστο είναι ίσο με $-2$ και οι τιμές του $x$ με για τις οποίες η τιμή της συνάρτησης είναι η ελαχίστη, είναι έτσι ώστε $-1 = \text{συν}\,(2x)$. Δηλαδή, $x = \pm k\frac{\pi}{2}$ με $k$ περιττός, δες σχήμα 3.

    (γ') Για $x = 0$ η συνάρτηση γίνεται $\frac{5(1+\text{συν}\,(2\cdot 0))}{2} - 2 = 3$. Άρα, το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο $(0, 3)$, δες σχήμα 3.

12. $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$.

13. Αδύνατη, αφού $-\dfrac{\sqrt{6}}{2} = -1.224744872 < -1$.

14. $\eta\mu\, x = 1$ ή $\eta\mu\, x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu\, \dfrac{\pi}{3}$.

15. Ομοίως: $\eta\mu\, x = 1 = \eta\mu\, \dfrac{\pi}{2}$ ή $\eta\mu\, x = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4} \Leftrightarrow \eta\mu\, x = \eta\mu\, 0.480181$ ή $\eta\mu \left(\dfrac{86.4326}{\pi}\right)^{o}$. Για το τελευταίο ήταν απαραίτητος ο Η/Υ.

16. (α′) $y = -1, \dfrac{1}{2}$.

    (β′) Οπότε, $\eta\mu\, x = -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6}$

17. (α′)
    i. Είναι προφανές ότι αν $\rho_1 < \rho_2$ οι δύο ρίζες τότε αν $-1 < \rho_1 < 1 < \rho_2$ ή $\rho_1 < -1 < \rho_2 < 1$, το $p(-1)$ και $p(1)$ έχουν αντίθετα πρόσημα, $p(-1)p(1) < 0$.
    ii. Αν $p(-1) = 0$, τότε $\alpha - \beta + \gamma = 0$. Για την άλλη ρίζα $\rho$ ισχύει ότι $\rho = \dfrac{\gamma}{\alpha}$ και $-1 < \dfrac{\gamma}{\alpha} < 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{\gamma}{\alpha}\right| < 1 \Leftrightarrow \gamma^2 < \alpha^2$.
    iii. Όπως και η προηγούμενη ερώτηση.
    iv. Αν έχει δύο ρίζες $\rho_1 < \rho_2$ μέσα στο $[-1,1]$ ή $[-1,1] \cap (\rho_1, \rho_2) = \emptyset$ τότε $p(1)$ και $p(-1)$ είναι ομόσημα του $\alpha$.

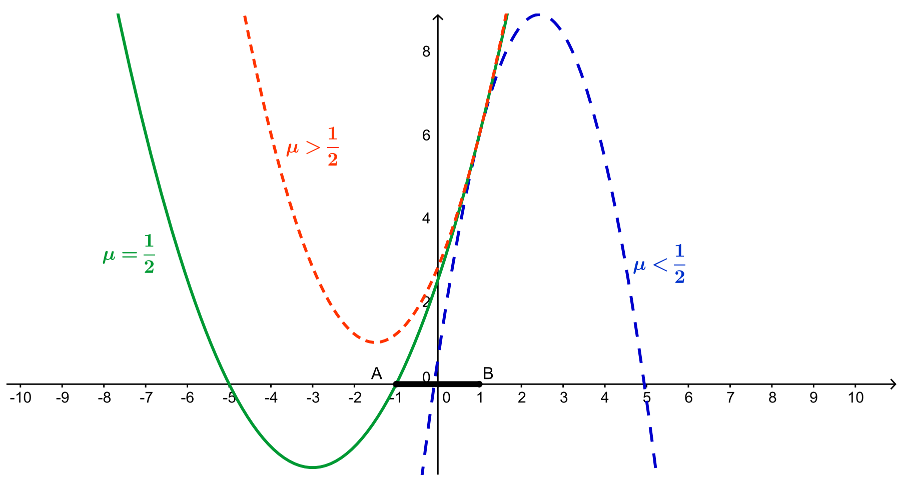
| $\mu$ | $-1$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $1$ | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Διακρίνουσα | + | + | + | + | 0 − | − | − |
| $\alpha = \mu$ | − | − | + | + | + | + | + |
| p(1) | + | + | + | + | + | + | + |
| p(-1) | − | − | − | 0 + | + | + | + |
| $\gamma^2 - \alpha^2$ | − | + | + | + | + | + | + |
| $\alpha p(1)$ | − | − | + | + | + | + | + |
| $\alpha p(-1)$ | + | + | − | + | + | + | + |
| $p(1)p(-1)$ | − | − | − | + | + | + | + |

Σχήμα 4: Άσκηση 17β′.

(β') Έστω $p(x) = \mu x^2 - 2(\mu-2)x + \mu + 2$

- Η διακρίνουσα είναι $-3\mu+2$ με $-3\mu+2>0$ για $\mu \in \Big(-\infty, \frac{2}{3}\Big)$.
- $p(1) = 6 > 0$, $p(-1) = 4\mu - 2 > 0$ για $\mu \in \Big(\frac{1}{2}, \infty\Big)$. Επίσης, $p(-1) = 4\mu - 2 = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{2}$.
- $\alpha p(1) > 0$ αν $\mu \in (0, \infty)$.
- $\alpha p(-1) > 0$ αν $(-\infty, 0) \bigcup \Big(\frac{1}{2}, \infty\Big)$
- $p(1)p(-1) > 0$ αν $\mu \in \Big(\frac{1}{2}, \infty\Big)$.

Άρα, η αρχική εξίσωση έχει μια ρίζα ημ $x = -1$ αν $\mu = \frac{1}{2}$ με την άλλη του ρίζα εκτός, αφού η άλλη ρίζα του $p(x) = 0$ για $\mu = \frac{1}{2}$ ικανοποιεί την $\gamma^2 - \alpha^2 > 0$.
Για $\mu < \frac{1}{2}$ το $p(x) = 0$ έχει μια ρίζα στο $[-1, 1]$ αφού $p(1)p(-1) < 0$. Και συνεπώς και η αρχική εξίσωση.
Για $\frac{1}{2} < \mu < \frac{2}{3}$ το $p(x) = 0$ πιθανόν να έχει δύο ρίζες στο $(-1, 1)$ ή καμμία, αφού $\alpha p(1) > 0$ και $\alpha p(-1) > 0$. Για να το δούμε ας υπολογίσουμε τη διαφορά του μέσου του διαστήματος των δύο πραγματικών ριζών με το $-1$, που είναι το $(\rho_1 + \rho_2) - (-1) = \dfrac{\mu - 2 + \mu}{\mu} = \dfrac{2(\mu-1)}{\mu}$, το οποίο είναι αρνητικό για $\frac{1}{2} < \mu < \frac{2}{3}$. Άρα, η αρχική εξίσωση δεν έχει ρίζες στο διάστημα αυτό.




Σχήμα 5: Άσκηση 17β'.

Συμπέρασμα, η αρχική εξίσωση έχει μια ρίζα για $\mu \leq \dfrac{1}{2}$.

18. $2\text{ημ}^2 x + 2\sqrt{3}\Big(\text{ημ}\, x \cdot \text{συν}\, x\Big) = 3 \Leftrightarrow \text{ημ}^2 x + 2\sqrt{3}\Big(\text{ημ}\, x \cdot \text{συν}\, x\Big) = 3(\text{ημ}^2 x +$

συν $^2x$). Άρα, $\left(\text{ημ } x - \sqrt{3}\text{συν } x\right)^2 = 0$.

19. Εύκολο.

20. Αν είναι ισοδύναμες πρέπει οι λύσεις της μιας να είναι λύσεις και της άλλης. Λύνοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων λοιπόν θα πάρουμε:

$$\begin{cases} \text{συν } x & = & \dfrac{a(a^2-3b^2)}{(a^2+b^2)(2-a^2-b^2)} \\ \text{ημ } x & = & \dfrac{b(b^2-3a^2)}{(a^2+b^2)(2-a^2-b^2)} \end{cases} \tag{2}$$

Αλλά, ημ $^2x$+συν $^2x = 1 \Leftrightarrow \dfrac{a(a^2-3b^2)^2+b^2(b^2-3a^2)^2}{(a^2+b^2)^2(2-a^2-b^2)^2} = 1$ ή ισοδύναμα μετά απο πράξεις: $(a^2+b^2-1)(a^2+b^2-4) = 0$. Αν λοιπόν είναι $a^2+b^2 = 1$ τότε οι δύο εξισώσεις είναι ισοδύναμες. Άρα, τα $a$ και $b$ μπορεί να είναι τα ημ και συν μιας γωνίας $\omega$. Τότε οι λύσεις στο σύστημα 2 είναι:

$$\begin{cases} \text{συν } x & = & \dfrac{a(a^2-3(1-a^2))}{1(2-1)} & = & a(4a^2-3) \\ \text{ημ } x & = & \dfrac{b(b^2-3(1-b^2))}{1(2-1)} & = & b(4b^2-3) \end{cases}$$

21. Υψώνοντας διαδοχικά στο τετράγωνο την εξίσωση 1 σελίδα 3, έχω:

$$-\text{ημ }^4x + \text{ημ }^2x + 2 - \frac{(\mu-3)^2}{4} = 0 \tag{3}$$

αντικαθιστώ το ημ $^2x = y$ με $y \in [0,1]$ και η εξίσωση 3 γίνεται:

$$p(y) = y^2 - y - 2 + \frac{(\mu-3)^2}{4} = 0 \tag{4}$$

Άρα, η εξίσωση 1 έχει ρίζες αν υπάρχουν ρίζες της εξίσωσης 4 στο διάστημα $[0,1]$. Υπολογίζω λοιπόν τις χαρακτηριστικές αλγεβρικές ανισότητες του προβλήματος:

(α') $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0 \Longrightarrow \mu(6-\mu) \geq 0 \Longleftrightarrow \mu \in [0,6]$

(β') $p(0) = 0^2 - 0 - 2 + \dfrac{(\mu-3)^2}{4} > 0 \Longleftrightarrow \mu \in (-\infty, 3-2\sqrt{2}) \cup (3+2\sqrt{2}, +\infty)$

(γ') $p(1) = 1^2 - 1 - 2 + \dfrac{(\mu-3)^2}{4} > 0 \Longleftrightarrow \mu \in (-\infty, 3-2\sqrt{2}) \cup (3+2\sqrt{2}, +\infty)$

Ας δούμε κάποιες οριακές τιμές πρώτα:

(α') Αν $\mu = 0$ τότε η εξίσωση 1 δεν έχει λύση.

(β′) Αν $\mu = 6$ τότε ημ $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(γ′) Αν $\mu = 3 - \sqrt{2}$ τότε ημ $x = 0$ ή ημ $x = \pm 1$.

(δ′) Αν $\mu = 3 + \sqrt{2}$ τότε ημ $x = 0$ ή ημ $x = \pm 1$.

| μ | 0    3-2$\sqrt{2}$    3+2$\sqrt{2}$    6 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Δ | - | + | + | + | - |
| p(0) | + | + | - | + | + |
| p(1) | + | + | - | + | + |
| | 0 ρίζες | 2 ρίζες | 0 ρίζες | 2 ρίζες | 0 ρίζες |

Σχήμα 6: *Πίνακας προσήμων*

Κατασκευάζουμε λοιπόν τον πίνακα 6 που δίνει τον αριθμό των λύσεων της αρχικής εξίσωσης 1.

Βλέπουμε ότι η αρχική εξίσωση έχει λύση στα διαστήματα που $\mu \in (0, 3 - 2\sqrt{2})$ και $\mu \in (3 + 2\sqrt{2}, 6)$. Αυτό συμβαίνει για τον εξής απλό λόγο:

Αν $y_1, y_2$ οι δύο ρίζες της εξίσωσης 3, τότε το γεγονός ότι τα $p(1)$ και $p(0)$ είναι θετικά, οφείλετε σε δύο σχετικές θέσεις του διαστήματος $[y_1, y_2]$ με το $[0, 1]$:

(α′) ή $[0, 1] \bigcap [y_1, y_2] = \emptyset$, δηλαδή οι ρίζες δεν είναι τριγωνομετρικά αποδεκτές

(β′) ή $[y_1, y_2] \subset [0, 1]$, που είναι η επιθυμητή θέση για την ύπαρξη ριζών της αρχικής.

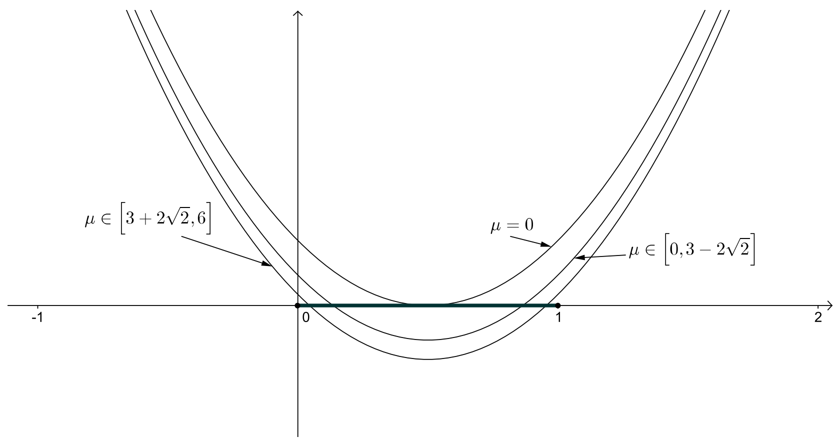
Άλλά $\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1}{2}$. Άρα, επειδή $\frac{1}{2} \in [0, 1]$ η εξίσωση 4 έχει δύο ριζές στο διάστημα $(0, 3 - 2\sqrt{2})$. Ομοίως και για τη περίπτωση $\mu \in (3 + 2\sqrt{2}, 6)$.

Τελικά, μπορούμε να βρούμε δύο ριζές της εξίσωσης 1 μόνο στα δύο αυτά διαστήματα.

22. Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta = 4\dfrac{\text{εφ}^{\,4}\alpha + \text{εφ}^{\,2}\alpha - 1}{1 + \text{εφ}^{\,2}\alpha}$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow \text{εφ}^{\,2}\alpha \in \Big( -\infty, -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big) \cup \Big(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \infty\Big)$. Αλλά, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, άρα:

$$\text{εφ}\ \alpha \in \left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}, \infty\right)$$




Σχήμα 7: Εξίσωση 4.

Άρα,

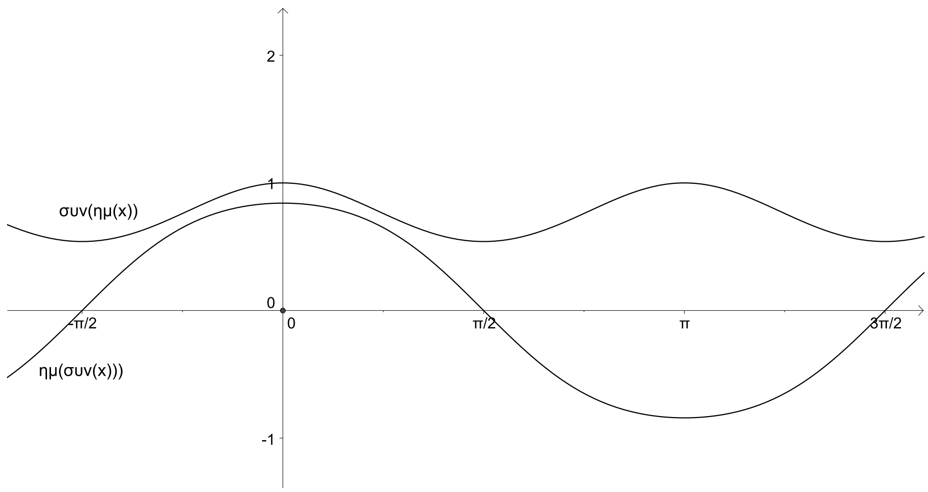
- Η εξίσωση δεν έχει ρίζες αν $0 < \text{εφ}\ \alpha < \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$.
- Η εξίσωση έχει 2 ρίζες αν $\text{εφ}\ \alpha > \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$.
- Η εξίσωση έχει 1 ρίζα διπλά αν $\text{εφ}\ \alpha = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ η οποία, λαμβάνοντας υπ'οψιν ότι: $\text{συν}^{\,2}\theta = \dfrac{1}{1+\text{εφ}^{\,2}\theta}$, είναι ίση με

$$\text{εφ}\ x = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

23. Επειδή $-\frac{\pi}{2} < -1 \leq \text{ημ}\ x \leq 1 < \frac{\pi}{2}$, και $\text{συν}\ x > 0$ στο $\big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$, μπορούμε να περιορίσουμε την έρευνά μας στο $\big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$.

Επίσης, οι συναρτήσεις ημ (συν $x$) και συν (ημ $x$) είναι άρτιες, άρα έχουν άξονα συμμετρίας τον $y'y$, μπορούμε ακόμα να περιορισθούμε στο $\big(0, \frac{\pi}{2}\big)$.

Αλλά, $\text{ημ}\ (\text{συν}\ x) = \text{συν}\ (\text{ημ}\ x) \Leftrightarrow \text{ημ}\ (\text{συν}\ x) = \text{ημ}\ \big(\frac{\pi}{2} - \text{ημ}\ x\big) \Leftrightarrow \text{συν}\ x + \text{ημ}\ x = \frac{\pi}{2}$ στο $\big(0, \frac{\pi}{2}\big)$.




Σχήμα 8: Η εξίσωση ημ (συν $x$) = συν (ημ $x$).

Τότε συν $x \cdot$ημ $x = -\frac{1}{2}+\frac{\pi^2}{8}$. Επειδή συν $x+$ημ $x$ είναι σταθερό, το γινόμενο συν $x \cdot$ ημ $x$ παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή του όταν συν $x =$ ημ $x =$ ημ $45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και είναι ίση με $\frac{1}{2}$. Τότε όμως:

$$\text{συν } x \cdot \text{ημ } x < -\frac{1}{2}+\frac{\pi^2}{8}$$

Άρα, δεν υπάρχει τόξο $x$ έτσι ώστε: ημ (συν $x$) = συν (ημ $x$).

Μια άλλη απόδειξη της άσκησης έδωσε ο καθ. Απόστολος Δέμης στο βιβλίο του *Μαθηματικοί Μέθοδοι Γ' Λυκείου*, σελ. 6.

Όπως και προηγουμένως μπορούμε να περιοριστούμε στο $I = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Εικάζουμε ότι

$$\text{ημ (συν } x) < \text{συν (ημ } x)$$

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι $\forall x \in I \quad |\text{ημ } x| < |x|$ το οποίο είναι προφανές αφού το ημ $x$ είναι μικρότερο, σαν το κάθετο τμήμα, απο το το τόξο μήκους $x$. Άρα,

$$\text{ημ } x < x, \ \forall x \in I \tag{5}$$

Επίσης ημ $x$, συν $x \in (0,1) \subseteq I$. Αλλά η συνάρτηση συν $x$ είναι φθίνουσα στο $I$, άρα:

$$\text{ημ } x < x \Rightarrow \text{συν (ημ } x) > \text{συν } x \tag{6}$$

Επίσης, τοποθετώντας στη θέση του $x$ το συν $x$ στην εξίσωση 5, θα πάρουμε

$$\text{ημ (συν } x) < \text{συν } x \tag{7}$$

Έτσι, απο 6 και 7, συμπεραίνουμε ότι: ημ (συν $x$) < συν $x$ < συν (ημ $x$).

Επομένως η εξίσωση δεν έχει λύση.