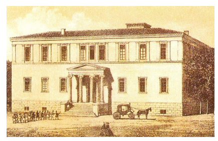
Ασκήσεις στα Διανύσματα



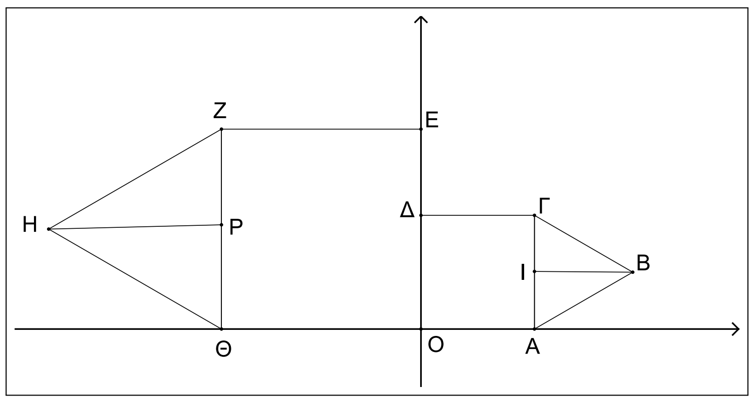
Λυγάτσικας Ζήνων *
zenon7@otenet.gr
http://blogs.sch.gr/zenonlig/
Πρότυπο Πειραματικό Γ.Ε.Λ. Βαρβακείου Σχολής

15 Νοεμβρίου 2014

*c:\education\ B_lycee \module\ module\revision_vec.tex

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{b} = (\mu, 1)$ και $\vec{c} = (1, \mu)$. Να γραφεί το $\vec{a}$ σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{b}$ και $\vec{c}$ για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$.

2. Σ'ενα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων (O, x, y), θεωρούμε δύο τετράγωνα $OA\Gamma\Delta$ στο 1^o τεταρτημόριο με πλευρά a και $OEZ\Theta$ στο 2^o τεταρτημόριο με πλευρά b. Στο εξωτερικό των δύο τετραγώνων σχηματίζουμε ισόπλευρα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΘZH. Να προσδιοριστούν όλα τα σημεία του σχήματος συναρτήσει των a και b. Δείξτε επίσης ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{HZ}$ και $\overrightarrow{AB}$ είναι συγγραμμικά, δες σχήμα 1.



Σχῆμα 1: Άσκηση 2

3. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ τα $M(1, 3)$, $N(-3, 9)$ και $K(8, -16)$ αντίστοιχα. Να προσδιορίσετε τις κορυφές του τριγώνου και να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\overrightarrow{A\Gamma}$.

4. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha} = (1, 1)$ και $\overrightarrow{\beta} = (5, 10)$. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\beta}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες απο τις οποίες η μια να είναι παράλληλη προς το $\overrightarrow{\alpha}$.

5. Να αποδειχθεί με τη βοήθεια του εσωτερικού γινομένου ότι:

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

Πότε ισχύει το ίσον;

6. Δίδονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Αν ισχύει $\Big||\vec{a}| - |\vec{b}|\Big| = \Big|\vec{a} + \vec{b}\Big|$. Τι συμπέρασμα βγάζετε για τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

7. Αν $\overrightarrow{x} + (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{\alpha}) \cdot \overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\gamma}$ με $1 + \overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} \neq 0$ να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{\alpha} = \dfrac{\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\gamma}}{1 + \overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta}}$.

8. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$ τέτοια ώστε:

$$(\lambda\overrightarrow{\alpha} + \kappa\overrightarrow{\beta}) \perp (\kappa\overrightarrow{\alpha} - 2\lambda\overrightarrow{\beta}),\ \forall \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$$

   (α΄) Δείξτε ότι $\overrightarrow{\alpha} \perp \overrightarrow{\beta}$.

   (β΄) Να βρεθεί το $|\overrightarrow{\beta}|$ στην περίπτωση που είναι $|\overrightarrow{\alpha}| = 2$.

   <u>Υπόδειξη</u>: Για το πρώτο βάλτε στην σχέση 8, $\lambda = 0$ και $\kappa = 1$. Για την δεύτερη βρείτε $|\overrightarrow{\beta}| = \sqrt{2}$.

9. Να βρείτε για ποιά τιμή του x τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha} = \left(\dfrac{x}{x^2 - 1}, 13\right)$, $\overrightarrow{\beta} = \left(\dfrac{2}{3}, x^2 + 4x + 1\right)$ είναι ίσα.*(Απάντηση: $x = 2$)*

10. Να αποδειχθεί: $\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} = \dfrac{|\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}|^2 - \overrightarrow{\alpha}^2 - \overrightarrow{\beta}^2}{2}$.

11. Αν $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma}$ ανα δύο μη συγγραμμικά και $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} \parallel \overrightarrow{\gamma}$ και $\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma} \parallel \overrightarrow{\alpha}$, να βρείτε το $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma}$.

12. Το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{\alpha} = (\lambda - 1, \lambda + 1)$ είναι 3. Ποιό είναι το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{\beta} = (\lambda - 3, \lambda + 3)$; *Απάντηση:* $\sqrt{25}$.

13. Αν τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$ δεν είναι παράλληλα, να λύσετε ως προς x την εξίσωση: $(x^2 - 2)\overrightarrow{\alpha} + (x^2 + 2x\sqrt{2} - 6)\overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{0}$. (Βρείτε $x = \sqrt{2}$)

14. Μπορεί κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $\overrightarrow{\alpha}$ να πάρει τη μορφή $\overrightarrow{\alpha} = (\text{συν}\,\theta, \text{ημ}\,\theta)$, όπου θ ένας κατάλληλος αριθμός του διαστήματος $[0, 2\pi)$;

15. Έστω τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\beta}$, $\overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{\gamma}$.

   (α΄) Να αποδείξετε ότι αν $15\overrightarrow{\alpha} - 26\overrightarrow{\beta} + 11\overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{0}$ τότε τα A, B, Γ είναι συνευθειακά.

(βʹ) Γενικότερα: Να αποδείξετε ότι αν υπάρχουν αριθμοί κ, λ, μ τέτοιοι ώστε:

i. Κάποιος μεταξύ των κ, λ, μ είναι $\neq 0$.

ii. $\kappa + \lambda + \mu = 0$

iii. $\kappa\overrightarrow{\alpha} + \lambda\overrightarrow{\beta} + \mu\overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{0}$

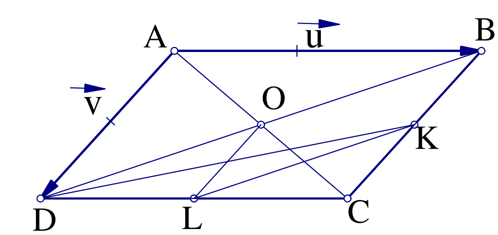
τότε τα A, B, Γ είναι συνευθειακά.

16. (αʹ) Αποδείξτε ότι $\forall \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}\ :\ |\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta}| \leq |\overrightarrow{\alpha}||\overrightarrow{\beta}|$.

(βʹ) Με τη βοήθεια του 16αʹ ερωτήματος να βρείτε την ελαχίστη και τη μεγίστη τιμή της παράστασης $A = 3x - 4y$, αν $x^2 + y^2 = 2008$.

(γʹ) Με τη βοήθεια του 16αʹ ερωτήματος αποδείξτε ότι: $|4\text{ημ}\, x + 3\text{συν}\, x| \leq 5$.

17. Έστω παραλληλόγραμμο $ABCD$, K και L τα μέσα των πλευρών DC και CB, δές σχήμα 2. Να γράψετε τα διανύσματα $\overrightarrow{OL}$, $\overrightarrow{KD}$, $\overrightarrow{OK}$ και $\overrightarrow{KL}$ σαν γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ και $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{v}$.



Σχῆμα 2: Άσκηση 63.

<u>*Υπόδειξη:*</u> $\overrightarrow{OL} = 0\overrightarrow{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{KD} = (-1)\overrightarrow{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{u} + 0\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{KL} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{v}$.

18. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων K του επιπέδου του για τα οποία ισχύει:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{A\Gamma} \cdot \overrightarrow{AK} = 0$$

19. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$ και $\vec{c}$ με $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$ και $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$ και $|\vec{c}| = 4$.

(α΄) Να βρεθούν τα συνημίτονα των γωνιών που σχηματίζουν τα διανύσματα ανά δύο μεταξύ τους.

(β΄) Να υπολογισθεί το άθροισμα $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$.

20. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a},\ \vec{b}$ με $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 7$ $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = 5$ τότε να υπολογίσετε το $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

21. Σε κάθε μια απο τις παρακάτω περιπτώσεις, να εξετάσετε αν τα διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους.

(α΄) $\overrightarrow{\beta} - \dfrac{(\overrightarrow{\alpha}\overrightarrow{\beta})\overrightarrow{\alpha}}{\overrightarrow{\beta}^2}$ και $\overrightarrow{\beta}$.

(β΄) $(\overrightarrow{\beta}\cdot\overrightarrow{\alpha})\cdot\overrightarrow{\gamma} - (\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta})\cdot\overrightarrow{\gamma}$ και $\overrightarrow{\alpha}$.

(γ΄) $\overrightarrow{\beta} - \dfrac{(a\overrightarrow{\beta})\overrightarrow{\alpha}}{\overrightarrow{\alpha}^2}$ και $\overrightarrow{\alpha}$.

22. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$: $\lambda\vec{a}+\kappa\vec{b} \perp \kappa\vec{a}+2\lambda\vec{b}$ για όλα τα $\kappa,\ \lambda\in\mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι:

(α΄) $\vec{a}\perp\vec{b}$

(β΄) Με τη βοήθεια του παραπάνω να δείξετε ότι $\vec{a}=\vec{b}=\vec{0}$.

23. Αν $\overrightarrow{\alpha}$ είναι ένα διάνυσμα του Oxy, δείξτε ότι:

$$\overrightarrow{\alpha} = \left(\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{i}\right)\cdot\overrightarrow{i} + \left(\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{j}\right)\cdot\overrightarrow{j}$$

24. Δείξτε ότι, για οποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{x}$, το διάνυσμα $\dfrac{\overrightarrow{\beta}\,\overrightarrow{x}}{\overrightarrow{\beta}^2}\overrightarrow{\beta} - \overrightarrow{x}$ είναι κάθετο στο $\overrightarrow{\beta}$.

25. Να αποδειχθεί ότι οι διαγώνιοι κάθε παραλληλογράμμου διχοτομούνται. Στη συνέχεια αν οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες τότε δείξτε ότι το παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο. Τέλος αν οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου είναι κάθετες τι συμπέρασμα μπορείτε να βγάλετε για το παραλληλόγραμμο.

26. Δίδεται το τρίγωνο ΑΒΓ, $(\beta<\gamma)$ το μέσο Μ της ΒΓ και το ύψος ΑΔ. Να αποδειχθεί ότι: $\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{A\Gamma}^2 = 2\overrightarrow{\Delta M}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$.

27. Αν $\overrightarrow{\beta} \neq \overrightarrow{0}$ και $\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}$ με $\overrightarrow{p} \parallel \overrightarrow{\beta}$ και $\overrightarrow{q} \perp \overrightarrow{\beta}$ να αποδειχθεί ότι:

   (α') $\overrightarrow{p} = \dfrac{\overrightarrow{\alpha}\overrightarrow{\beta}}{\overrightarrow{\beta}^2} \cdot \overrightarrow{\beta}$

   (β') $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{\alpha} - \dfrac{\overrightarrow{\alpha}\overrightarrow{\beta}}{\overrightarrow{\beta}^2} \cdot \overrightarrow{\beta}$

28. Έστω $\overrightarrow{\alpha} = (1, 2)$ και $\overrightarrow{\beta} = (3, 4)$ να βρεθούν τα διανύσματα $\overrightarrow{p}$ και $\overrightarrow{q}$ ώστε να ισχύουν συγχρόνως:

   (α') $\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}$

   (β') $\overrightarrow{p} \parallel \overrightarrow{\beta}$

   (γ') $\overrightarrow{q} \perp \overrightarrow{\beta}$

29. Να αποδειχθεί με την βοήθεια του εσωτερικού γινομένου ότι τα ύψη κάθε τριγώνου διέρχονται απο το ίδιο σημείο.

30. Δίνεται $\overrightarrow{\alpha} = (-3, 4)$, να βρεθεί διάνυσμα $\overrightarrow{\beta}$ με $|\overrightarrow{\beta}| = 2$ και $\overrightarrow{\beta} \perp \overrightarrow{\alpha}$.

31. Αν για τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ ισχύει ότι $2 \cdot |\vec{a}| = |\vec{b}|$ και $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}|$, τότε να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι αντίρροπα.

32. Δίδονται τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$ και $\vec{c}$ με $\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} + \dfrac{\vec{c} \cdot \vec{b}}{|\vec{c}| \cdot |\vec{b}|} + \dfrac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{|\vec{c}| \cdot |\vec{a}|} = -1$. Να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον απο αυτά είναι αντίρροπα.

33. Δίδεται τρίγωνο με κορυφές $A(-1, 0)$, $B(5, 2)$ και $\Gamma(1, 2)$. Αν για δύο σημεία K και Λ ισχύει $\overrightarrow{AK} = -4\overrightarrow{K\Gamma}$ και $\overrightarrow{B\Lambda} = -4\overrightarrow{\Lambda\Gamma}$, να εξετασθεί:

   (α') αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο,

   (β') το είδος του τετραπλεύρου $ABK\Lambda$,

   (γ') $\overrightarrow{A\Lambda} = \overrightarrow{AK} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

34. Σε ορθογώνιο τρίγωνο να αποδειχθεί ότι η πλευρά που βρίσκεται απέναντι απο την γωνία των 30^o είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.
   Υπόδειξη: $\widehat{A} = 90^o$, $\widehat{B} = 30^o$,$\widehat{\Gamma} = 60^o$.

   $\overrightarrow{\Gamma A} \cdot \overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{\Gamma B} \cdot$ προβ $_{\Gamma A}\overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{\Gamma A}^2 \Leftrightarrow |\overrightarrow{\Gamma A}| \cdot |\overrightarrow{\Gamma B}|$συν $60^o = |\overrightarrow{\Gamma A}^2| \Leftrightarrow |\overrightarrow{\Gamma B}| = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\Gamma A}|$

35. Δίδονται τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$ και $\vec{c}$ με $\vec{a}\cdot\vec{b}\neq -1$. Να προσδιορισθεί το $\vec{x}$ για το οποίο ισχύει: $(\vec{a}\cdot\vec{x})\cdot\vec{b}=\vec{c}+\vec{x}$.

36. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ με $|\overrightarrow{\alpha}|=6$ και $|\overrightarrow{\beta}|=3$. Να βρεθεί ο πραγματικός λ έτσι ώστε τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}+\lambda\cdot\overrightarrow{\beta}$ και $-\overrightarrow{\alpha}+\lambda\cdot\overrightarrow{\beta}$:

    (α′) να είναι κάθετα,

    (β′) να σχηματίζουν γωνία αμβλεία.

37. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου ενός τριγώνου $AB\Gamma$ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$.

38. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία το διάνυσμα $\vec{a}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}$ είναι παράλληλο προς το διάνσμα $\overrightarrow{B\Gamma}$.

39. Αν για τα διανύσματα $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ ισχύουν οι σχέσεις $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=\vec{0}$ και $|\vec{a}|=\dfrac{|\vec{b}|}{3}=\dfrac{|\vec{c}|}{4}$, να αποδειχθεί ότι τα $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ είναι συγγραμμικά.

40. (α′) Δίδονται τα μη-μηδενικά διανύσματα $\vec{a},\ \vec{b}$. Να αποδειχθεί ότι το διάνυσμα $\vec{c}=\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}+\dfrac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}$ έχει διεύθυνση παράλληλη στη διχοτόμο της γωνίας $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$.

    (β′) Αν $\vec{a}=(-3,4)$ και $\vec{b}=(4,3)$, να βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα που ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$.
    Υπόδειξη:

    i. Δείξτε ότι το διάνυσμα $\vec{c}$ σχηματίζει ίσες γωνίες με τα δινύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Υπολογίστε τα εωτερικά γινόμενα $\vec{a}\cdot\vec{c}$ και $\vec{b}\cdot\vec{c}$.

    ii. Χρησιμοποιήστε το πρώτο ερώτημα.

41. *3ο θέμα των πανελληνίων εξετάσεων του 2006*[1]

    Τρία διανύσματα έχουν κοινή αρχή, μέτρο 1 (το καθε ένα) και άθροισμα $\overrightarrow{0}$. Δείξτε ότι τα πέρατά τους είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου. Υπολογίστε στη συνέχεια το μήκος της πλευράς του ισοπλεύρου τριγώνου.

[1]Το πρόβλημα βρίσκετε επίσης σαν άσκηση στους μιγαδικούς αριθμούς στο βιβλίο του Larson L.C.: *Problem-Solving, Through Problems*, Springer "Problems Books in Mathematics", 1983.

Ή:
Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}|$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ να βρεθούν οι γωνίες $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right)$, $\left(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}}\right)$, $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\gamma}}\right)$.

<u>*Υπόδειξη:*</u> *Μπορείτε να το αποδείξετε με δύο τρόπους: με την βοήθεια συντεταγμένων των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ και δεύτερον με την βοήθεια εύρεσης των εσωτερικών γινομένων $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$, $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$. Δοκιμάστε και με τους δύο.*

42. Έστω τρίγωνο $\overset{\triangle}{}AB\Gamma$ με $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{BA} = \vec{\beta}$. Αν φέρουμε το ύψος $A\Delta$ να δειχθεί ότι: $\overrightarrow{A\Delta} = \dfrac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2|} \cdot \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

43. (Θεώρημα Μενελάου) Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία K, Λ και M των AB, $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα έτσι ώστε να ισχύει:

$$\overrightarrow{AK} = \kappa \cdot \overrightarrow{KB}, \quad \overrightarrow{\Gamma\Lambda} = \lambda \cdot \overrightarrow{\Lambda A}, \quad \overrightarrow{BM} = \mu \cdot \overrightarrow{M\Gamma}$$

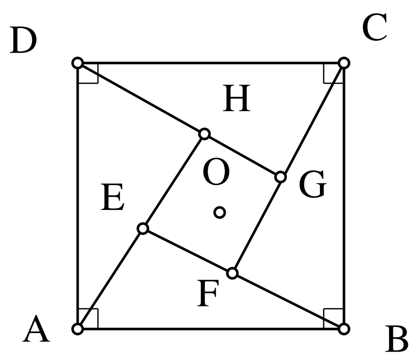
Να αποδείξτε ότι τα σημεία K, Λ και M είναι συνευθειακά αν και μόνο αν $\kappa \cdot \lambda \cdot \mu = -1$

44. $(*)$ Αποδείξτε ότι είναι δυνατό να κατασκευάσουμε τρίγωνο με πλευρές ίσες και παράλληλες με τις διαμέσους δοθέντος τριγώνου.

45. $(**)$ Δίδεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $\left(\widehat{A} = 90^o\right)$, το ύψος του $A\Delta$ και τα μέσα M, N των $\Delta\Gamma$ και $A\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι $BN \perp AM$.

46. $(***)$ Έστω $ABCD$ ένα τετράγωνο. Στο εσωτερικό του να κατασκευασθούν σημεία E, F, G, H έτσι ώστε: E μέσο AH,F μέσο BE, G μέσο CF και H μέσο του DG, δες σχήμα 3. Να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου $EFGH$.

<u>*Υπόδειξη:*</u> *Υποθέστε ότι το $EFGH$ ικανοποιεί την υπόθεση. Δείξτε πρώτα ότι $\overrightarrow{OE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$. Άρα το σημείο E μπορεί να κατασκευασθεί στο επίπεδο. Το H είναι το συμμετρικό του A ως προς E, το G συμμετρικό του D ως προς H κ.ο.κ. Δείξτε στη συνέχεια ότι το F είναι το μέσο του BE. Για να δείξτε ότι το $EFGH$ είναι τετράγωνο, δείξτε ότι: είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι διαγώνιοι διχοτομούνται, είναι ορθογώνιο γιατί $EG = FH$ και τέλος είναι τετράγωνο, γιατί $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{FH} = 0$. Η άσκηση μπορεί να αποδειχθεί και με αναλυτική γεωμετρία, όπως θα δούμε στη συνέχεια.*



Σχῆμα 3: Άσκηση 46.

47. Έστω (x_1, y_1) λύση του συστήματος $\begin{cases} \lambda x + y &= \lambda \\ x + \lambda y &= \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, και το ζεύγος (x_2, y_2) μια απο τις λύσεις της εξίσωσης $x + y = 0$. Αν $\overrightarrow{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\overrightarrow{\beta}(x_2, y_2)$ δύο διανύσματα, τότε:

   (α') Να βρεθούν οι γωνίες $\left(\widehat{\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{i}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{j}}\right)$,

   (β') Για ποιές τιμές του $\lambda : |\overrightarrow{\alpha}| = 1$;

48. (Άσκηση 6 σελ. 49, σχολικό βιβλίο.)

   (α') i. (Ανισότητα Andreescu) Για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς x, y και αυθαίρετους αριθμούς α, β ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

$$\frac{\alpha^2}{x} + \frac{\beta^2}{y} \geq \frac{(\alpha + \beta)^2}{x + y} \tag{1}$$

   ii. Χρησιμοποιώντας την ανίσωση 1, αποδείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwartz για οποιουσδήποτε αριθμούς $\alpha_{1,2}$ και $\beta_{1,2}$:

$$\left(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2\right)^2 \leq \left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right)\left(\beta_1^2 + \beta_2^2\right) \tag{2}$$

   (β') Να αποδείξετε, χρησιμοποιώντας κατάλληλα το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων, ότι: $-1 \leq \dfrac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}} \leq 1$.

49. Δίνεται το διάνυσμα $\overrightarrow{\alpha} = (-6, 8)$. Να βρεθεί:

(α') το μέτρο του $\overrightarrow{\alpha}$,

(β') ένα διάνυσμα $\overrightarrow{\beta}$ αντίρροπο του $\overrightarrow{\alpha}$ με μέτρο τριπλάσιο απο το $\overrightarrow{\beta}$.

Υπόδειξη: Το μέτρο είναι 10 και το διάνυσμα $\overrightarrow{\beta} = (18, -24)$.

50. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha} = (x+y, y^2-y-x+1)$ και $\overrightarrow{\beta} = (-2, x-y)$. Να βρεθούν τα $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε τα $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$ να είναι συγγραμμικά. Ελέξτε γεωμετρικά το αποτέλεσμα.
Υπόδειξη: θα βρείτε $x = 1$, $y = 1$

51. Έστω τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha} = (1, 4)$, $\overrightarrow{\beta} = (2, 3)$ και $\overrightarrow{\gamma} = (-2, 2)$. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\alpha}$ σε δύο συνιστώσες απο τις οποίες η μια να είναι παράλληλη στο $\overrightarrow{\beta}$ και η άλλη στο $\overrightarrow{\gamma}$. Ελέξτε γεωμετρικά το αποτέλεσμα.
Υπόδειξη: $\overrightarrow{\alpha} = \lambda\overrightarrow{\beta} + \mu\overrightarrow{\gamma}$. Θα βρείτε $\lambda = 1$, $\mu = \frac{1}{2}$.

52. Δίνεται ότι οι συντεταγμένες ενός σημείου A είναι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - (\lambda^2 - 3\lambda + 9)x + \lambda + 2 = 0$$

και οι συντεταγμένες ενός σημείο B ρίζες της

$$x^2 - (\lambda + 2)x + 3 - 2\lambda = 0$$

με $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1\}$. Αν για το $P = (x_P, y_P)$ ισχύει $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{PB}$ και $x_P + y_P = 5$, να προσδιορίσεται την τιμή του λ.
Υπόδειξη: Απο την $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{PB}$ εύκολα μπορείτε να φτάσετε στην $-4 + 6\lambda - 2\lambda^2 = 0$, απο την οποία $\lambda = 1$ ή 2.

53. Δίνεται το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $A = (0, -2)$, $B = (7, -3)$ και $\Gamma = (8, -2)$. Να βρείτε το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{A B\Gamma}$. Ελέξτε γεωμετρικά το αποτέλεσμα.
Υπόδειξη: Αν $K = (x, y)$ το κέντρο του κύκλου τότε: $KA = KB$ και $KB = K\Gamma$. Θα προκύψουν δύο εξισώσεις ως προς x και y. Τότε λύνοντας το σύστημα θα βρείτε $x = 4$ και $y = 1$.

54. Δίνονται τα σημεία $A = (-2, 5)$ και $B = (-10, -3)$. Να βρείτε

(α') σημείο του άξονα $x'x$ που να ισαπέχει απο τα A και B.

(β') σημείο της ευθείας $y = -1$ που να ισαπέχει απο τα A και B.

Επαληθεύστε γεωμετρικά το αποτέλεσμα.
Υπόδειξη: Είναι το σημείο $\Gamma = (-5, 0)$ και το σημείο $\Delta = (-4, -1)$.

55. Αν H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$ να βρεθεί σημείο M του επιπέδου του, ώστε να ισχύει $\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{H\Gamma}$.

56. Για κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$, να δειχθεί ότι υπάρχει ένα και μόνο ένα σημείο P που επαληθεύει την ισότητα:

$$5\overrightarrow{PA} - \left(3\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma}\right) = \overrightarrow{0}$$

57. Δίδεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ, E και Z των ευθειών $B\Gamma$, ΓA, AB αντίστοιχα. Να δείξετε ότι

$$\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{\Gamma Z} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{B\Delta}}{\overrightarrow{B\Gamma}} = \frac{\overrightarrow{\Gamma E}}{\overrightarrow{\Gamma A}} = \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{AB}}$$

58. Αν $|\overrightarrow{\alpha}| = \left|\overrightarrow{\beta}\right| = |\overrightarrow{\gamma}| = 2$ και $\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} = 1$, $\overrightarrow{\beta} \cdot \overrightarrow{\gamma} = 3$ να βρείτε ποιά τιμή μπορεί να πάρει το $\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\gamma}$.

59. Να αποδείξετε ότι αν $|\overrightarrow{\alpha}| \leq 2$, $\left|\overrightarrow{\beta}\right| \leq 5$ τότε $\left|4\overrightarrow{\alpha} + 3\overrightarrow{\beta}\right| \leq 23$.

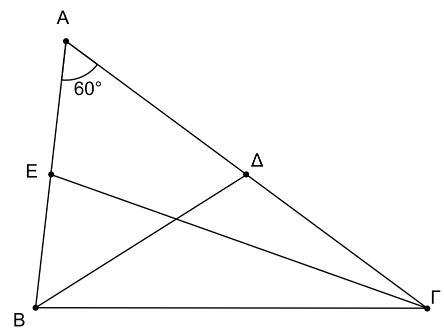
60. Να αποδείξετε ότι αν $\left|4\overrightarrow{\alpha}+3\overrightarrow{\beta}\right| \leq 1$ και $\left|3\overrightarrow{\alpha}+4\overrightarrow{\beta}\right| \leq 1$ τότε $\left|\overrightarrow{\alpha}+\overrightarrow{\beta}\right| \leq \frac{2}{7}$.

61. Να αποδείξετε ότι αν τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$ δεν είναι παράλληλα τότε και τα διανύσματα $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{\alpha} + 3\overrightarrow{\beta}$, $\overrightarrow{v} = 4\overrightarrow{\alpha} - 3\overrightarrow{\beta}$ δεν είναι παράλληλα.

62. Στο τρίγωνο $\stackrel{\triangle}{AB\Gamma}$, σχήμα 4, τα μήκη των πλευρών AB και $A\Gamma$ είναι 5 και 7 μονάδες αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{B\Delta} \cdot \overrightarrow{\Gamma E}$, όπου Δ και E τα μέσα των πλευρών $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα.

63. Θεωρούμε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ και τον περιγεγραμμένο σε αυτό κύκλο με κέντρο O και ακτίνα ϱ, δες σχήμα 63. Θεωρούμε ακόμα στο επίπεδο του τριγώνου ένα σημείο H, που ορίζεται απο την ισότητα:

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}.$$

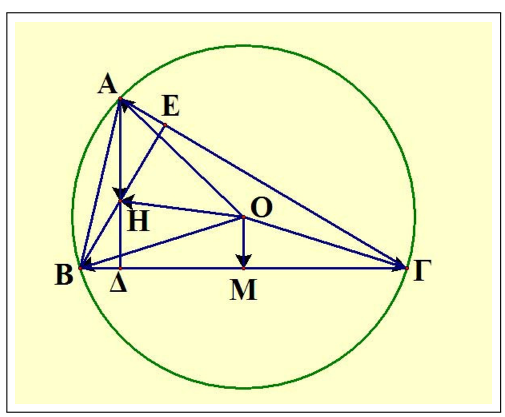


Σχῆμα 4: Άσκηση 62.

(αʹ) Να δειχθεί ότι το σημείο H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$[2]
.

(βʹ) Να δείξετε ότι $0 \leq |\overrightarrow{OH}| \leq 3\varrho$. Τι είδος τριγώνου είναι το $AB\Gamma$ αν $|\overrightarrow{OH}| = 0$;

Υπόδειξη: Αν M το μέσο του $B\Gamma$, αποδείξτε ότι $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$. Για το 2. χρησιμοποιήστε την αρχική ισότητα σε συνδυασμό με την τριγωνική ανίσωση.



Σχῆμα 5: Άσκηση 63.

[2]Ο παραπάνω τύπος ονομάζεται τύπος του Sylvester.

64. (4ο θέμα προαγωγικές 2012) Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{a}$ και $\overrightarrow{b}$ με τις ιδιότητες $|\overrightarrow{b}| = 1$, $|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}| = 2$ και $\left(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}}\right) = 150^o$.

(α΄) Να αποδείξετε ότι είναι $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{3}$

(β΄) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$.

(γ΄) Να υπολογίσετε την $\left(\widehat{\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}}\right)$.