ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ − ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

1 Τι ονομάζεται αλγεβρική παράσταση και ποιοι είναι οι όροι αυτής; Δώστε ένα παράδειγμα.

Αλγεβρική παράσταση ονομάζεται κάθε παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές. Οι προσθετέοι σε μία αλγεβρική παράσταση λέγονται **όροι**. Ένα παράδειγμα αλγεβρικής παράστασης είναι η $2x - 8 + 5xy^2$ με όρους τους $2x$, 8 , $5xy^2$.

2 Τι λέγεται αναγωγή ομοίων όρων σε μία αλγεβρική παράσταση; Δώστε ένα παράδειγμα.

Αναγωγή ομοίων όρων ονομάζεται η διαδικασία με την οποία γράφουμε μία αλγεβρική παράσταση σε απλούστερη μορφή χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα. Για παράδειγμα:

$$3x + 2x - x = (3 + 2 - 1)x = 4x$$

Προσοχή! Προσθέτουμε μόνο ίδια γράμματα. Έτσι στη παράσταση $5\alpha + 3\beta$ δεν προσθέτουμε τίποτα.

3 Ποιές είναι οι ιδιότητες των ισοτήτων;

Σε κάθε ισότητα μπορούμε:

1. να προσθέσουμε ή και να αφαιρέσουμε και από τα δύο μέλη τον ίδιο αριθμό.
Δηλαδή αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ και $\alpha - \gamma = \beta - \gamma$

2. να πολλαπλασιάσουμε ή και να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με τον ίδιο αριθμό.
Δηλαδή αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$ $(\gamma \neq 0)$

4 Τι λέγεται εξίσωση και τι λύση αυτής; Δώστε ένα παράδειγμα.

Εξίσωση λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει έναν άγνωστο αριθμό. Λύση της εξίσωσης ονομάζεται κάθε αριθμός που την επαληθεύει. Για παράδειγμα η λύση της εξίσωσης $2x - 1 = x + 2$ είναι ο αριθμός 3. Πράγματι την επαληθεύει γιατί αν βάλουμε όπου $x = 3$ προκύπτει κάτι σωστό:

$$2 \cdot 3 - 1 = 3 + 2 \quad ή \quad 5 = 5.$$

5 Ποιά είναι τα βήματα επίλυσης μιας εξίσωσης;

Βήμα 1. Κάνουμε απαλοιφή παρανομαστών (πολλαπλασιάζοντας όλους τους όρους με το Ε.Κ.Π. των παρανομαστών).

Βήμα 2. Κάνουμε απαλοιφή παρενθέσεων (με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας).

Βήμα 3. Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.

Βήμα 4. Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

Βήμα 5. Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου.

6 Ποιά εξίσωση λέγεται αδύνατη και ποιά ταυτότητα (αόριστη) ; Δώστε παραδείγματα.

Αδύνατη λέγεται κάθε εξίσωση που δεν έχει καμμία λύση.

Για παράδειγμα οι: $0x = 5$ ή $0x = -12$ ή $x - 1 = x + 2$

Ταυτότητα ή **αόριστη** λέγεται κάθε εξίσωση που έχει λύση οποιονδήποτε αριθμό (άπειρες λύσεις).

Για παράδειγμα οι: $0x = 0$ ή $x = x$ ή $2x + 1 = 2x + 1$

7 Ποιές είναι οι ιδιότητες των ανισοτήτων;

Σε κάθε ανισότητα μπορούμε:

1. να προσθέσουμε ή και να αφαιρέσουμε και από τα δύο μέλη τον ίδιο αριθμό.
Δηλαδή αν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$ και $\alpha - \gamma < \beta - \gamma$

2. να πολλαπλασιάσουμε ή και να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με τον ίδιο αριθμό.

- αν ο αριθμός είναι θετικός η φορά μένει η ίδια.

  Δηλαδή αν $\alpha < \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$ και $\dfrac{\alpha}{\gamma} < \dfrac{\beta}{\gamma}$

- αν ο αριθμός είναι αρνητικός η φορά αλλάζει.

  Δηλαδή αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ και $\dfrac{\alpha}{\gamma} > \dfrac{\beta}{\gamma}$

8 Τι λέγεται ανίσωση και τι λύση αυτής; Δώστε ένα παράδειγμα.

Ανίσωση λέγεται κάθε ανισότητα που περιέχει έναν άγνωστο. Λύση της ανίσωσης ονομάζεται κάθε αριθμός που την επαληθεύει. Για παράδειγμα ο αριθμός 4 είναι λύση της ανίσωσης $2x - 1 > x + 2$.
Πράγματι την επαληθεύει γιατί αν βάλουμε όπου $x = 4$ προκύπτει κάτι σωστό:

$$2 \cdot 4 - 1 > 4 + 2 \quad \text{ή} \quad 7 > 6.$$

9 Ποιά είναι τα βήματα επίλυσης μιας ανίσωσης;

Τα βήματα επίλυσης μιας ανίσωσης είναι ίδια με αυτά της εξίσωσης που περιγράψαμε παραπάνω. Προσοχή όμως στο τελευταίο βήμα που διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου, γιατί αν αυτός είναι αρνητικός θα αλλάξει η φορά. Επίσης, αν ζητηθεί, αναπαριστούμε τις λύσεις της ανίσωσης στην ευθεία των αριθμών.

10 Ποιά ανίσωση λέγεται αδύνατη και ποια αληθεύει για κάθε τιμή του αγνώστου; Δώστε παραδείγματα.

Αδύνατη λέγεται κάθε ανίσωση που δεν έχει καμμία λύση.
Για παράδειγμα οι: $0x > 5$ ή $0x \leq -12$ ή $x < x$
Λέμε ότι μία ανίσωση **αληθεύει για κάθε τιμή του αγνώστου** όταν έχει λύση οποιονδήποτε αριθμό.
Για παράδειγμα οι: $0x < 5$ ή $0x \geq -12$ ή $x \leq x$

11 Τι ονομάζεται τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού; Ορίζεται τετραγωνική ρίζα του μηδενός και τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού; Δώστε παραδείγματα.

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α, συμβολίζεται $\sqrt{\alpha}$ και είναι ο θετικός αριθμός ο οποίος όταν υψωθεί στο τετράγωνο δίνει τον αριθμό α.

Για παράδειγμα ισχύει $\sqrt{9} \overset{2}{=} 3$ αφού $3^2 = 9$ ή ακόμα $\sqrt{64} \overset{2}{=} 8$ αφού $8^2 = 64$

Επίσης ορίζουμε $\sqrt{0} \overset{2}{=} 0$ αφού $0^2 = 0$.

Όμως τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού δεν ορίζεται (δεν έχει νόημα) γιατί δεν υπάρχει αριθμός που όταν υψωθεί στο τετράγωνο να δίνει αρνητικό αριθμό. Για παράδειγμα στην $\sqrt{-16}$, δεν υπάρχει αριθμός που όταν υψωθεί στο τετράγωνο να δίνει -16. $(\sqrt{-16} \overset{2}{=} ?)$

12 **Διατυπώστε με μαθηματικό (συμβολικό) τρόπο τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας ενός θετικού αριθμού.**

Αν $\sqrt{\alpha} = x$, όπου $\alpha \geq 0$, τότε $x \geq 0$ και $x^2 = \alpha$

13 **Ποιές ιδιότητες προκύπτουν από τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας;**

Αν $\alpha \geq 0$ ισχύουν: ► $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 = \alpha$ ► $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$

14 **Ποιοί αριθμοί ονομάζονται ρητοί και ποιοί άρρητοι; Δώστε παραδείγματα.**

Ρητοί ονομάζονται οι αριθμοί που μπορούν να γραφτούν σε κλασματική μορφή με όρους ακέραιους αριθμούς.

Για παράδειγμα οι: $\frac{2}{9}$, $-4 = \frac{-4}{1}$, $0{,}25 = \frac{25}{100}$, $1{,}63636363... = \frac{162}{99}$ (περιοδικός δεκαδικός)

Άρρητοι ονομάζονται οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί, δηλαδή αυτοί που δεν μπορούν να γραφτούν σε κλασματική μορφή με όρους ακέραιους αριθμούς (είναι δεκαδικοί αριθμοί, με άπειρα δεκαδικά ψηφία που δεν επαναλαμβάνονται κατά περιοδικό τρόπο όπως στους περιοδικούς δεκαδικούς).

Για παράδειγμα οι: $\pi = 3{,}14159...$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{18}$ (προσοχή! δεν είναι όλες οι ρίζες άρρητοι αριθμοί αφού $\sqrt{16} = 4$ κλπ.)

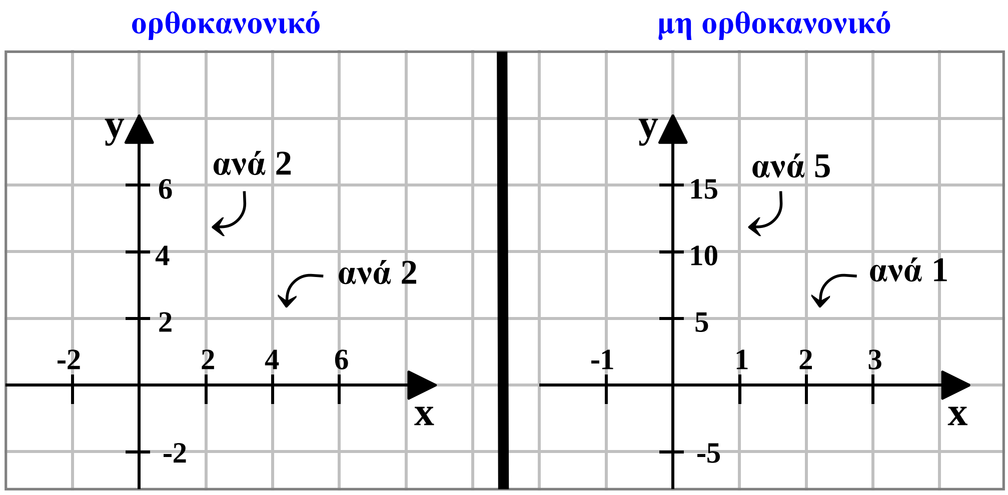
15 **Ποιοί ονομάζονται πραγματικοί αριθμοί; Δώστε παραδείγματα.**

Πραγματικοί αριθμοί είναι οι ρητοί μαζί με τους άρρητους (είναι όλοι οι αριθμοί που έχουμε μάθει έως τώρα).

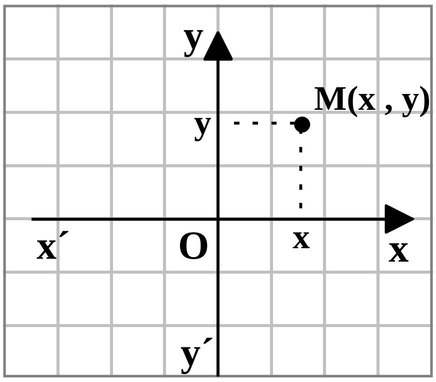
Για παράδειγμα οι: 7 , $\frac{5}{3}$, $-1{,}82$, $\sqrt{4}$, $-\sqrt{11}$, $\pi = 3{,}14159...$

16 **Πότε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων λέγεται ορθοκανονικό. Δώστε από ένα παράδειγμα ορθοκανονικού και μη ορθοκανονικού συστήματος αξόνων.**

Ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων λέγεται **ορθοκανονικό** όταν οι μονάδες μέτρησης που χρησιμοποιούμε στους δύο άξονες έχουν το ίδιο μήκος.



17 **Να εξηγήσετε με ποιον τρόπο προσδιορίζουμε τη θέση ενός σημείου στο επίπεδο με τη βοήθεια ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων.**



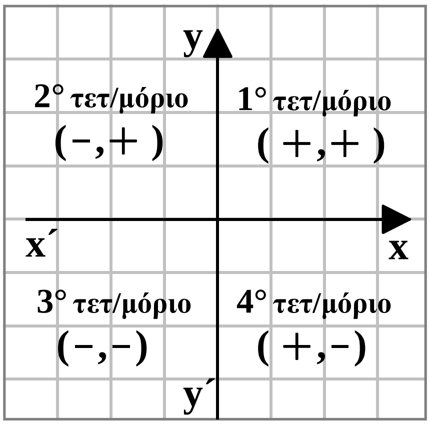
Με τη βοήθεια ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων αντιστοιχίζουμε σε κάθε σημείο του επιπέδου ένα μοναδικό ζεύγος αριθμών (x , y). Το x είναι η **τετμημένη** του σημείου και είναι ο αριθμός που αντιστοιχεί στον άξονα x΄x. Το y είναι η **τεταγμένη** του σημείου και είναι ο αριθμός που αντιστοιχεί στον άξονα y΄y. Η τετμημένη και η τεταγμένη μαζί, δηλαδή το ζεύγος (x , y) λέγονται **συντεταγμένες** του σημείου.

18 **Ποιό χαρακτηριστικό έχουν όλα τα σημεία του άξονα x΄x και ποιό τα σημεία του άξονα y΄y ;**

Κάθε σημείο του άξονα x΄x έχει τεταγμένη 0, δηλαδή είναι της μορφής (x , 0).
Κάθε σημείο του άξονα y΄y έχει τετμημένη 0, δηλαδή είναι της μορφής (0 , y).
Η αρχή O των αξόνων έχει συντεταγμένες (0 , 0).

19 **Τι ονομάζουμε τεταρτημόρια και ποιά είναι τα πρόσημα της τετμημένης και τεταγμένης σε καθένα από αυτά;**

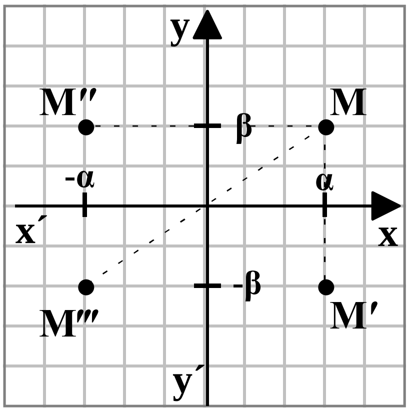
Το σύστημα αξόνων χωρίζει το επίπεδο σε τέσσερα μέρη που λέγονται **τεταρτημόρια.** Τα τεταρτημόρια καθώς και τα πρόσημα της τετμημένης και τεταγμένης σε καθένα από αυτά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



20 **Να γράψετε το συμμετρικά του σημείου M(α , β) ως προς τους άξονες x΄x , y΄y και την αρχή των αξόνων. Να κάνετε το ίδιο και για το σημείο A(2 , -5).**

	M(α , β)	**A(2 , -5)**
Συμμετρικό ως προς τον x΄x	M′(α , -β)	A′(2 , 5)
Συμμετρικό ως προς τον y΄y	M″(-α , β)	A″(-2 , -5)
Συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων	M‴(-α , -β)	A‴(-2 , 5)

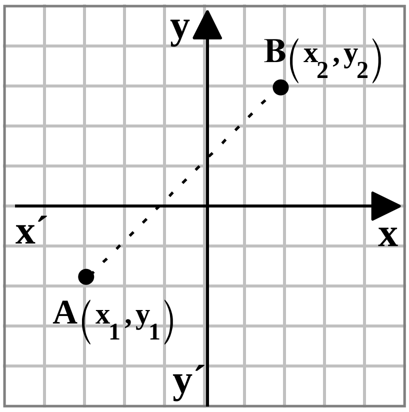
Σχηματικά:



21 **Να γράψετε τον τύπο με τον οποίο υπολογίζουμε την απόσταση δύο σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ σε ένα σύστημα αξόνων.**

Η απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Σχηματικά:



22 **Τι ονομάζεται συνάρτηση; Γράψτε μερικά παραδείγματα συναρτήσεων.**

Μία σχέση που συνδεέι δύο μεταβλητές x και y λέγεται **συνάρτηση** όταν κάθε τιμή της μεταβλητής x αντιστοιχίζεται σε μία μόνο τιμή της μεταβλητής y.

Παραδείγματα συναρτήσεων: $y = -3x$, $y = 4x - 1$, $y = \frac{6}{x}$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x+2}$

23 **Τι ονομάζεται πίνακας τιμών μίας συνάρτησης; Δώστε ένα παράδειγμα.**

Πίνακας τιμών μίας συνάρτησης είναι ο πίνακας που συμπληρώνουμε με τις αντίστοιχες τιμές των x και y όπως προκύπτουν από τη συγκεκριμένη συνάρτηση.
Παρακάτω φαίνεται ο πίνακας κάποιων τιμών της συνάρτησης $y = 4x - 1$:

x	0	1	4	-1	0,5
y	-1	3	15	-5	1

Πώς όμως θα τον συμπληρώναμε αν μας έκρυβαν κάποια στοιχεία; Δηλαδή κάπως έτσι:

x	0	1			0,5
y			15	-5	1

Ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξής:

- Για $x = 0$ έχουμε $y = 4\cdot 0 - 1 = 0 - 1 = -1$ δηλαδή βάλαμε στον τύπο $y = 4x - 1$ όπου $x = 0$.
- Όμοια για $x = 1$ έχουμε $y = 4\cdot 1 - 1 = 4 - 1 = 3$.
- Για $y = 15$ έχουμε $15 = 4x - 1$ και λύνουμε την εξίσωση βρίσκοντας $x = 4$.
- Όμοια για $y = -5$ έχουμε $-5 = 4x - 1$ και λύνουμε την εξίσωση βρίσκοντας $x = -1$.

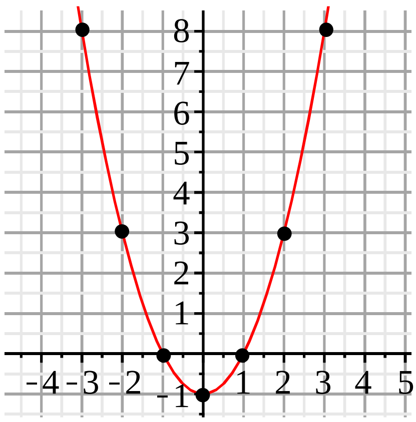
24 Τι ονομάζεται γραφική παράσταση συνάρτησης;

Έστω μία συνάρτηση με την οποία ένα μέγεθος y εκφράζεται ως συνάρτηση ενός άλλου μεγέθους x. Ονομάζουμε **γραφική παράσταση** της συνάρτησης αυτής το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες (x, y).

Για παράδειγμα έστω η συνάρτηση $y = x^2 - 1$. Ποιά είναι η γραφική της παράσταση και πως την σχεδιάζουμε; Αρχικά κατασκευάζουμε τον πίνακα τιμών της. (όσο πιο περίπλοκη είναι η γραφική παράσταση, τόσα πιο πολλά ζεύγη (x, y) χρειαζόμαστε για να την σχεδιάσουμε ακριβέστερα)

x	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**
y	**8**	**3**	**0**	**-1**	**0**	**3**	**8**

Από τον πίνακα αυτόν παίρνουμε τα ζεύγη (x, y) : $(\mathbf{-3}, \mathbf{8})$, $(\mathbf{-2}, \mathbf{3})$, $(\mathbf{-1}, \mathbf{0})$, $(\mathbf{0}, \mathbf{-1})$, $(\mathbf{1}, \mathbf{0})$, $(\mathbf{2}, \mathbf{3})$, $(\mathbf{3}, \mathbf{8})$ που όπως γνωρίζουμε παριστάνουν σημεία στο επίπεδο. Αν τα παραστήσουμε σε ένα σύστημα αξόνων και τα ενώσουμε με μία συνεχή γραμμή θα πάρουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 - 1$ που φαίνεται παρακάτω:



25 Πότε δύο ποσά x , y λέγονται ανάλογα; Τι χαρακτηριστικό έχουν οι αντίστοιχες τιμές x , y ; Τι μορφή έχει η συνάρτηση που συνδέει ανάλογα ποσά;

Δύο ποσά x , y λέγονται **ανάλογα** όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό, τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό.

Χαρακτηριστικό αποτέλεσμα αυτού είναι **ο λόγος** των αντίστοιχων τιμών $\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}$ να παραμένει **σταθερός**, δηλαδή $\frac{y}{x} = \alpha$. Με χιαστί γινόμενο στη τελευταία σχέση προκύπτει ότι $\mathbf{y = \alpha x}$, που είναι και η συνάρτηση που συνδέει τα ανάλογα ποσά x , y.

Για παράδειγμα έστω τα ποσά x , y με τιμές που φαίνονται στον πίνακα:

x	-3	-2	0	1	5
y	-6	-4	0	2	10

Παρατηρούμε ότι $\frac{-6}{-3} = \frac{-4}{-2} = \frac{2}{1} = \frac{10}{5} = 2$ που σημαίνει ότι ο λόγος $\frac{y}{x}$ παραμένει σταθερός ($=2$) και συνεπώς τα ποσά x , y είναι ανάλογα (το $\frac{0}{0}$ που δεν ισούται με 2 αποτελεί εξαίρεση. Δηλαδή στα ανάλογα ποσά όταν το ένα θα είναι 0, τότε και το άλλο ποσό θα είναι 0.)

Τελικά $\frac{y}{x} = 2$ οπότε $y = 2x$ που είναι και η συνάρτηση που περιγράφει το συγκεκριμένο παράδειγμα.

26 Τι γνωρίζετε για την γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x$;

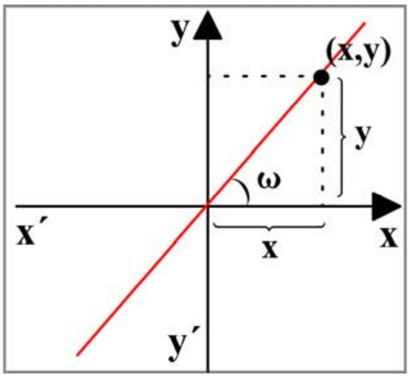
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x$ είναι μία ευθεία που διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων. Η ευθεία αυτή λέμε ότι έχει εξίσωση $y = \alpha x$. (Για να την σχεδιάσουμε, δύο σημεία αρκούν, Το ένα το γνωρίζουμε ήδη! Είναι η αρχή Ο των αξόνων)

27 Τι λέγεται κλίση της ευθείας $y = \alpha x$ και με τι ισούται;

Κλίση της ευθείας $y = \alpha x$ λέγεται το α (ο συντελεστής του x) και ισούται:

1. με τον σταθερό λόγο $\frac{y}{x}$ όπως προκύπτει από τον πίνακα τιμών.

2. με την εφαπτομένη της γωνίας ω, που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x΄x.

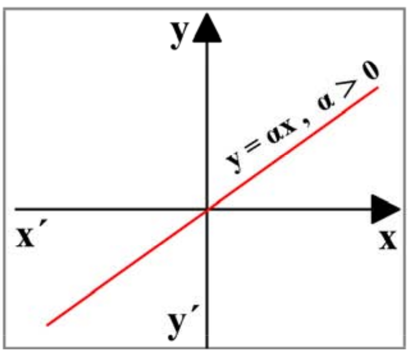


Άρα $\alpha = \frac{y}{x} = εφω$

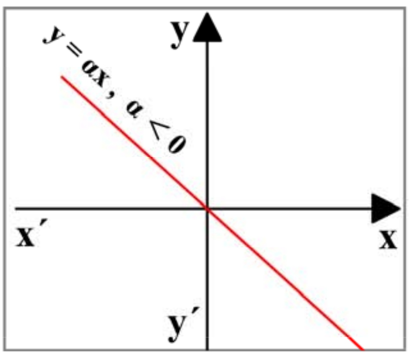
28 Ποιά είναι η θέση της ευθείας $y = \alpha x$ για τις διάφορες τιμές του α;

- Αν $\alpha > 0$ τότε η ευθεία $y = \alpha x$ βρίσκεται στο 1° και 3° τεταρτημόριο. (σχήμα 1)
- Αν $\alpha < 0$ τότε η ευθεία $y = \alpha x$ βρίσκεται στο 2° και 4° τεταρτημόριο. (σχήμα 2)
- Αν $\alpha = 0$ τότε προκύπτει η ευθεία $y = 0$ που ταυτίζεται με τον άξονα x΄x. (σχήμα 3)

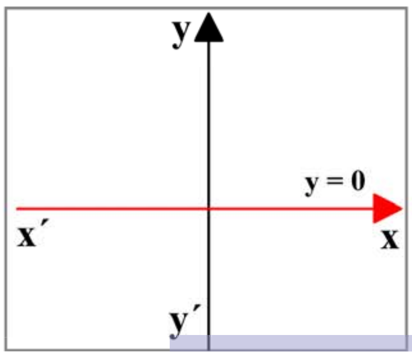
1.



2.



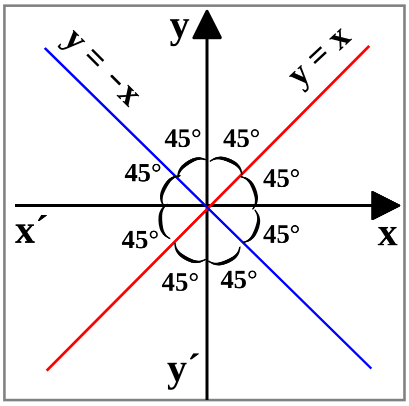
3.



29 Ποιό είναι το χαρακτηριστικό των ευθειών $y = x$ και $y = -x$;

Η ευθεία $y = x$ (με κλίση $\alpha = 1$) είναι διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων,
ενώ η ευθεία $y = -x$ (με κλίση $\alpha = -1$) είναι διχοτόμος της 2ης και 4ης γωνίας των αξόνων.

Σχηματικά:



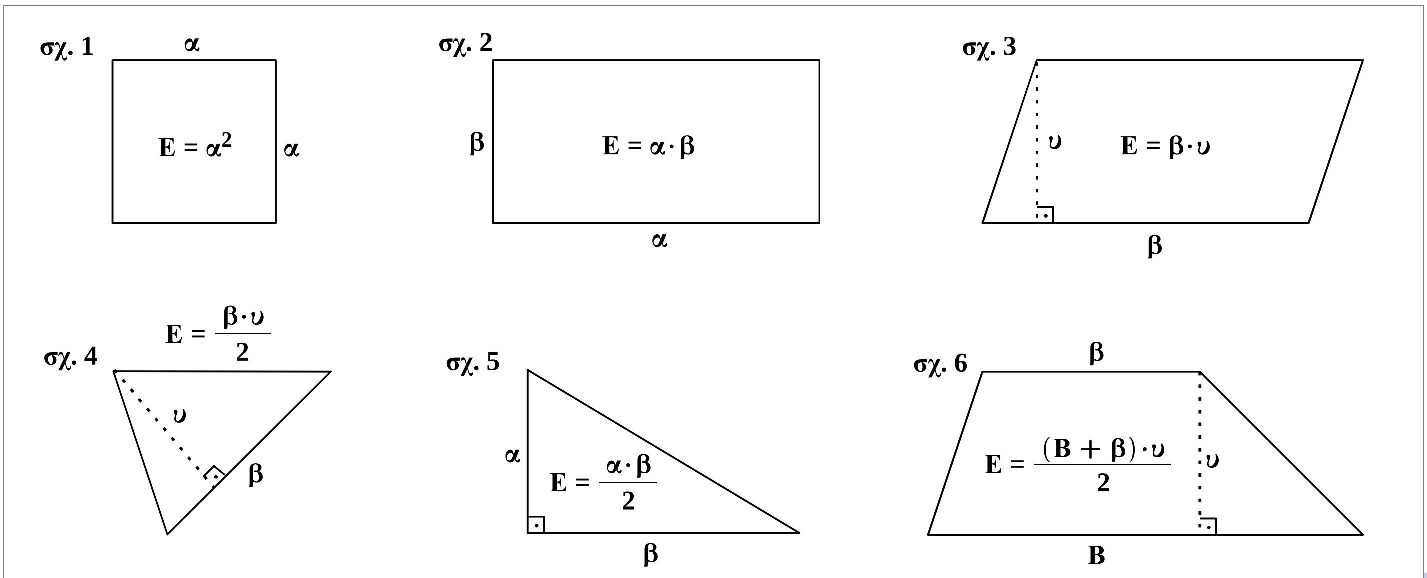
Παρατηρούμε επιπλέον ότι οι ευθείες $y = x$ και $y = -x$ τέμνονται κάθετα (σχηματίζουν γωνίες 90°).

30 Πώς ορίζεται το εμβαδόν μιας επίπεδης επιφάνειας ;

Το εμβαδόν μιας επίπεδης επιφάνειας είναι ένας θετικός αριθμός, που εκφράζει την έκταση που καταλαμβάνει η επιφάνεια αυτή στο επίπεδο. Ο αριθμός αυτός εξαρτάται από τη μονάδα μέτρησης επιφανειών που χρησιμοποιούμε.

31 Να γράψετε τους τύπους με τους οποίους υπολογίζουμε τα εμβαδά των βασικών επίπεδων σχημάτων.

- ► Εμβαδόν τετραγώνου πλευράς α : $E = \alpha^2$ (σχ. 1)
- ► Εμβαδόν ορθογωνίου με πλευρές α, β : $E = \alpha \cdot \beta$ (σχ. 2)
- ► Εμβαδόν παραλληλογράμου : $E = (\text{βάση}) \cdot (\text{αντίστοιχο ύψος})$ (σχ. 3)
- ► Εμβαδόν τυχαίου τριγώνου : $E = \dfrac{(\text{βάση}) \cdot (\text{αντίστοιχο ύψος})}{2}$ (σχ. 4)
- ► Εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές α, β : $E = \dfrac{\alpha \cdot \beta}{2}$ (σχ. 5)
- ► Εμβαδόν τραπεζίου με βάσεις Β, β και ύψος υ : $E = \dfrac{(B + \beta) \cdot \upsilon}{2}$ (σχ. 6)



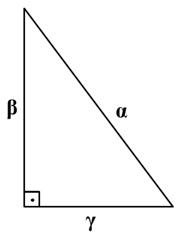
32 Να διατυπώσετε το Πυθαγόρειο θεώρημα και το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος.

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

(το εφαρμόζω όταν γνωρίζω δύο πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου και θέλω να βρω τη τρίτη πλευρά)

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτείνουσας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών,

δηλαδή $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

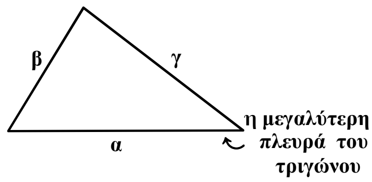


ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ

(το εφαρμόζω για να εξετάσω αν ένα τυχαίο τρίγωνο είναι ορθογώνιο τρίγωνο)

Αν σε ένα τρίγωνο το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή,

δηλαδή αν $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ **τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη πλευρά α**



33 Πώς ορίζεται η εφαπτομένη, το ημίτονο και το συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ;

► Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την απέναντι κάθετη πλευρά με την προσκείμενη κάθετη πλευρά μιας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται **εφαπτομένη** της γωνίας ω.

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}$$

► Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την απέναντι κάθετη πλευρά μιας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου με την υποτείνουσα, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται **ημίτονο** της γωνίας ω.

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

► Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την προσκείμενη κάθετη πλευρά μιας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου με την υποτείνουσα, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται **συνημίτονο** της γωνίας ω.

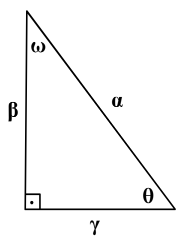
$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

Παρατηρήσεις:

1. Οι παραπάνω τύποι ισχύουν μόνο σε ορθογώνια τρίγωνα.
2. Αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο γνωρίζουμε μια πλευρά και μια οξεία γωνία, τότε μπορούμε με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας αυτής να υπολογίσουμε τις υπόλοιπες πλευρές του τριγώνου.

Για το διπλανό σχήμα:

$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\gamma}{\beta}$	$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\beta}{\gamma}$
$\eta\mu\omega = \frac{\gamma}{\alpha}$	$\eta\mu\theta = \frac{\beta}{\alpha}$
$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\beta}{\alpha}$	$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\gamma}{\alpha}$



33 Ποιές σημαντικές σχέσεις γνωρίζετε για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς κάθε οξείας γωνίας ;

1. Για κάθε οξεία γωνία ω ισχύουν: $\mathbf{0 < ημω < 1}$ και $\mathbf{0 < συνω < 1}$

Δηλαδή το ημίτονο και το συνημίτονο οξείας γωνίας είναι αριθμοί μεταξύ 0 και 1. Δεν ισχύει το ίδιο για την εφαπτομένη. Για παράδειγμα εφ89° = 57,29.

2. Για κάθε οξεία γωνία ω ισχύει: $\mathbf{εφω = \frac{ημω}{συνω}}$ (σημαντική σχέση που συνδέει και τους τρεις τριγωνομετρικούς αριθμούς)

34 Ποιοί είναι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30° , 45° , 60° ;

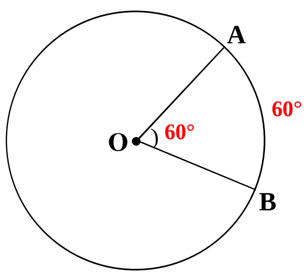
	30°	45°	60°
ημίτονο	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συνημίτονο	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφαπτομένη	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

(Οι αποδείξεις αυτών βρίσκονται στη σελίδα 152 του σχολικού βιβλίου, δραστηριότητες 1 και 2)

35 Πότε μία γωνία λέγεται επίκεντρη; Ποιά είναι η σχέση του μέτρου της επίκεντρης γωνίας με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου της; Δώστε ένα παράδειγμα.

Μία γωνία λέγεται **επίκεντρη**, όταν η κορυφή της είναι το κέντρο ενός κύκλου. Το μέτρο της επίκεντρης γωνίας ισούται με το μέτρο του τόξου στο οποίο βαίνει (αντίστοιχο τόξο).

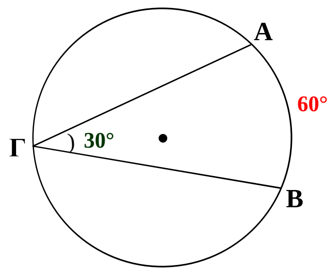
Στο παράδειγμα που ακολουθεί, η επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ μέτρου 60°, βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ μέτρου επίσης 60° :



36 Πότε μία γωνία λέγεται εγγεγραμμένη; Ποιά είναι η σχέση του μέτρου της εγγεγραμμένης γωνίας με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου της; Δώστε ένα παράδειγμα.

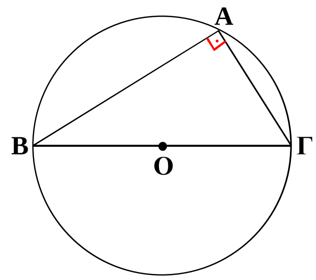
Μία γωνία λέγεται **εγγεγραμμένη**, όταν η κορυφή της είναι σημείο ενός κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο. Το μέτρο της εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του τόξου στο οποίο βαίνει (αντίστοιχο τόξο).

Στο παράδειγμα που ακολουθεί, η εγγεγραμμένη γωνία $A\hat{\Gamma}B$ μέτρου 30°, βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ μέτρου 60° :



37 **Ποιό είναι το μέτρο εγγεγραμμένης γωνίας που βαίνει σε ημικύκλιο;**

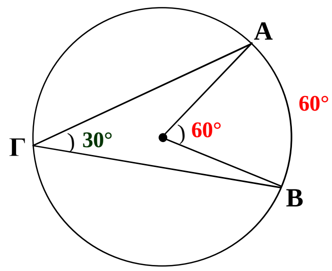
Γνωρίζουμε ότι το μέτρο της εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του τόξου στο οποίο βαίνει. Συνεπώς αν η εγγεγραμμένη γωνία βαίνει σε ημικύκλιο (180°), έχει μέτρο 90° (το μισό των 180°).
Συμπέρασμα: **Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.**



38 **Ποιά είναι η σχέση των μέτρων μίας επίκεντρης και μίας εγγεγραμμένης γωνίας που βαίνουν στο ίδιο τόξο; Δώστε ένα παράδειγμα.**

Αν μία επίκεντρη και μία εγγεγραμμένη γωνία βαίνουν στο ίδιο τόξο, τότε το μέτρο της εγγεγραμμένης είναι το μισό του μέτρου της επίκεντρης.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί, η επίκεντρη $A\widehat{O}B$ μέτρου 60° βαίνει στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ με την εγγεγραμμένη γωνία $A\widehat{\Gamma}B$ μέτρου 30° :



39 **Πότε δύο εγγεγραμμένες γωνίες ενός κύκλου είναι ίσες;**

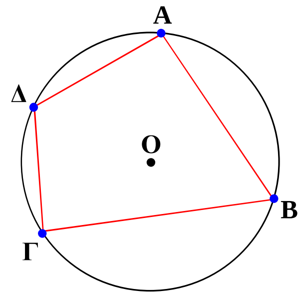
Δύο εγγεγραμμένες γωνίες ενός κύκλου είναι ίσες, όταν βαίνουν στο ίδιο ή σε ίσα τόξα.

40 **Πότε ένα πολύγωνο λέγεται κανονικό; Ποιό είναι το κανονικό πολύγωνο με τρεις πλευρές και ποιό με τέσσερις;**

Ένα **πολύγωνο** λέγεται **κανονικό**, όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες.
Κανονικό πολύγωνο με τρεις πλευρές είναι το ισόπλευρο τρίγωνο, ενώ με τέσσερις είναι το τετράγωνο.

41 **Πότε ένας κύκλος λέγεται περιγεγραμμένος ενός πολυγώνου;**

Αν οι κορυφές ενός πολυγώνου είναι σημεία ενός κύκλου, τότε ο κύκλος λέγεται **περιγεγραμμένος** του πολυγώνου. Λέμε επίσης ότι το πολύγωνο είναι **εγγεγραμμένο** στον κύκλο. Για παράδειγμα:



42 **Ποιά είναι η σχέση μεταξύ της κεντρικής γωνίας ω και της γωνίας φ ενός κανονικού πολυγώνου;**

Η κεντρική γωνία ω και η γωνία φ ενός κανονικού πολυγώνου είναι **παραπληρωματικές** (άθροισμα 180°), δηλαδή $\boldsymbol{\omega + \phi = 180°}$ (αν γνωρίζουμε την ω, από τη σχέση αυτή υπολογίζουμε την φ και αντίστροφα)

43 **Πώς υπολογίζουμε την κεντρική γωνία ω και τη γωνία φ ενός κανονικού ν-γώνου;**

Η κεντρική γωνία ω ενός κανονικού ν-γώνου δίνεται από τον τύπο $\boldsymbol{\omega = \frac{360°}{\nu}}$.

Επίσης λόγω της σχέσης $\omega + \phi = 180°$ προκύπτει ότι $\boldsymbol{\phi = 180° - \omega}$ ή $\boldsymbol{\phi = 180° - \frac{360°}{\nu}}$, από τις οποίες υπολογίζουμε την γωνία **φ**.

44 **Ποιά είναι τα βήματα κατασκευής ενός κανονικού ν-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο;**

Βήμα 1. Υπολογίζουμε την κεντρική γωνία ω του κανονικού ν-γώνου ($\omega = \frac{360°}{\nu}$).

Βήμα 2. Σχηματίζουμε διαδοχικά ν επίκεντρες γωνίες ω, που χωρίζουν τον κύκλο σε ν ίσα τόξα.

Βήμα 3. Ενώνουμε με διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα τα άκρα των τόξων.

45 **Ποιός τύπος μας δίνει το μήκος κύκλου;**

$\delta = 2\rho$

Το μήκος L κύκλου ακτίνας ρ και διαμέτρου δ, δίνεται από τους τύπους: $\boldsymbol{L = \pi\delta}$ ή $\boldsymbol{L = 2\pi\rho}$

Παρατηρήσεις:

1. Ο αριθμός $\pi = 3{,}14...$ είναι άρρητος.

2. Για να υπολογίσουμε το μήκος ενός κύκλου χρειαζόμαστε μόνο την ακτίνα του!

3. Αν διαιρέσουμε το μήκος L με τη διάμετρο δ ενός κύκλου θα βρούμε τον αριθμό π ($\frac{L}{\delta} = \pi$)

4. Το μήκος και η ακτίνα ενός κύκλου είναι ποσά ανάλογα (αν διπλασιαστεί η ακτίνα, διπλασιάζεται και το μήκος κλπ.).

46 **Ποιός τύπος μας δίνει το εμβαδόν κύκλου;**

Το εμβαδόν Ε κύκλου ακτίνας ρ δίνεται από τον τύπο: $\boldsymbol{E = \pi\rho^2}$.

Παρατηρήσεις:

1. Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν ενός κύκλου χρειαζόμαστε μόνο την ακτίνα του!

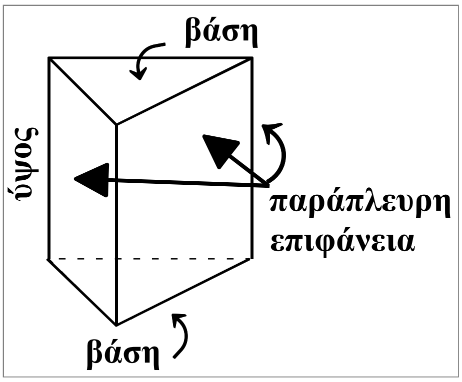
2. Το εμβαδόν και η ακτίνα ενός κύκλου δεν είναι ποσά ανάλογα (αν διπλασιαστεί η ακτίνα, τετραπλασιάζεται το εμβαδόν κλπ.).

47 Ποιοί τύποι μας δίνουν το εμβαδόν και τον όγκο πρίσματος;

► Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας πρίσματος: E_π = **(περίμετρος βάσης) · (ύψος)**

Ολικό εμβαδόν πρίσματος: $E_{ολ} = E_\pi + 2E_\beta$ εμβαδόν βάσης

► Όγκος πρίσματος: **V = (εμβαδόν βάσης) · (ύψος)**



48 Ποιοί τύποι μας δίνουν το εμβαδόν και τον όγκο κυλίνδρου;

► Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας κυλίνδρου: E_π = **(περίμετρος βάσης) · (ύψος) = 2πρυ**

Ολικό εμβαδόν κυλίνδρου: $E_{ολ} = E_\pi + 2E_\beta = 2\pi\rho\upsilon + 2\pi\rho^2$

► Όγκος κυλίνδρου: **V = (εμβαδόν βάσης) · (ύψος) = $\pi\rho^2 h$**