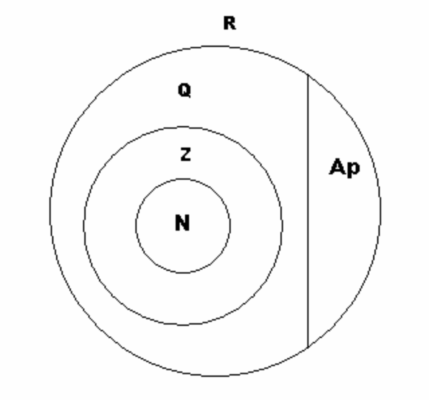
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

- **Φυσικοί αριθμοί (N)** : 0, 1, 2, 3, ...
- **Ακέραιοι αριθμοί (Z)** : $\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
- **Ρητοί (Q)** λέγονται οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν με τη μορφή κλάσματος δηλαδή, στη μορφή $\frac{m}{n}$ ή -$\frac{m}{n}$ όπου m, n φυσικοί αριθμοί και $n \neq 0$.

  → Κάθε (τερματιζόμενος) δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός αριθμός μπορεί να πάρει κλασματική μορφή, δηλαδή είναι ρητός.
- **Άρρητοι αριθμοί** ονομάζονται οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί, δηλαδή οι αριθμοί που δεν μπορούν να γραφούν με μορφή κλάσματος. Οι άρρητοι αριθμοί έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία μη περιοδικά. (Π .χ. π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$).
- Οι **πραγματικοί αριθμοί ($\Re$)** αποτελούνται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς και παριστάνονται με τα σημεία ενός άξονα, του άξονα των πραγματικών αριθμών.



- Παρατηρούμε ότι μέσα στους Ρητούς **Q** βρίσκονται οι Ακέραιοι **Z** και οι Φυσικοί **N** και ότι μέσα στους Ακεραίους **Z** βρίσκονται οι Φυσικοί **N**, ενώ όλοι είναι οι πραγματικοί. $\Re$

- Η απόσταση του σημείου, που παριστάνει τον αριθμό α πάνω στον άξονα, από την αρχή του άξονα Ο λέγεται **απόλυτη τιμή** του α και συμβολίζεται με $|\alpha|$, είναι δε: $|\alpha| \geq 0$ πάντα!!!.

  Έτσι, $|-3|=3$, $|3|=3$, $\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$, $|0|=0$.

- **Άρτιοι ακέραιοι** είναι τα πολλαπλάσια του 2. Π. χ. 0, ± 2, ± 4, ± 6, ± 8, ...

  Συμβολίζονται: $\alpha = 2\kappa$ (κ ακέραιος).

- **Περιττοί ακέραιοι** είναι οι ακέραιοι αριθμοί που δεν είναι πολλαπλάσια του2. Π. χ. ± 1, ± 3, ± 5, ...

  Συμβολίζονται: $\alpha = 2\kappa + 1$ (κ ακέραιος).

ΠΡΑΞΕΙΣ

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	$\alpha\beta=\beta\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$	$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$
Επιμεριστική	$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$	
Ουδέτερο στοιχείο	$\alpha+0=0+\alpha=\alpha$	$\alpha\cdot 1=1\cdot\alpha=\alpha$
Αντίθετοι αριθμοί*	$\alpha+(-\alpha)=0$	
Αντίστροφοι αριθμοί**		$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1$, $\alpha\neq 0$

*** Αντίθετοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν άθροισμα 0**

**** Αντίστροφοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν γινόμενο 1**

→Δυο αριθμοί με την ίδια απόλυτη τιμή και διαφορετικό πρόσημο είναι **αντίθετοι.**

Π. χ. : $|-12|=|12|=12$ άρα οι -12 και 12 είναι αντίθετοι

Επίσης,

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$$

$$\alpha:\beta=\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\frac{1}{\beta},\quad \beta\neq 0$$

Ακόμα, ισχύουν

1.	**Αν** $\begin{cases}\alpha=\beta\\ \gamma=\delta\end{cases}$ **τότε** $\begin{cases}\alpha+\gamma=\beta+\delta\\ \quad\kappa\alpha\iota\\ \alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\delta\end{cases}$ πρόσθεση & πολλαπλασιασμός ισοτήτων κατά μέλη
2.	**Αν** $\alpha=\beta$ **τότε** $\begin{cases}\alpha+\gamma=\beta+\gamma\\ \quad\kappa\alpha\iota\\ \alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma\end{cases}$ & αντίστροφα : **Αν** $\begin{cases}\alpha+\gamma=\beta+\gamma\\ \quad\kappa\alpha\iota\\ \alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma,\ \gamma\neq 0\end{cases}$ τότε $\alpha=\beta$
3.	**Αν** $\alpha\cdot\beta=0$ τότε $\alpha=0$ **ή** $\beta=0$, οπότε $\alpha\cdot\beta\neq 0$ αν και μόνο αν $\alpha\neq 0$ **και** $\beta\neq 0$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Δύναμη με βάση ένα πραγματικό αριθμό α και εκθέτη ένα φυσικό αριθμό $\nu \geq 2$, που συμβολίζεται με α^{ν}, λέμε το γινόμενο ν παραγόντων ίσων με τον αριθμό α δηλαδή: $\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\nu \quad παράγοντες}$

Ορίζουμε ακόμη :

• $\alpha^1 = \alpha$	• $\alpha^0 = 1, \quad \alpha \neq 0$	• $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}, \quad \alpha \neq 0$

Για τις δυνάμεις με εκθέτες ακέραιους αριθμούς ισχύουν οι ιδιότητες:

• $\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$	• $\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu-\nu}$
• $(\alpha\beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu}$	• $(\frac{\alpha}{\beta})^{\nu} = \frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$
• $(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu}$	• $(\frac{\alpha}{\beta})^{-\nu} = (\frac{\beta}{\alpha})^{\nu}$

Παρατηρήσεις

- Κάθε αριθμός μπορεί να γραφεί ως δύναμη με εκθέτη το 1
- Για να ορίζεται μια δύναμη με βάση το 0, πρέπει ο εκθέτης ν να είναι φυσικός διαφορετικός από το 0.
- Αν $0 < \alpha \neq 1$ και $\alpha^{\kappa} = \alpha^{\lambda}$, τότε $\kappa = \lambda$.
- Για δυνάμεις με βάση τον αριθμό $-\alpha$, $(\alpha \neq 0)$ κ΄ εκθέτη ν ακέραιο, έχουμε :
  - o $(-\alpha)^{2\nu} = ((-\alpha)^2)^{\nu} = (\alpha^2)^{\nu} = \alpha^{2\nu}$ (άρτιος εκθέτης)
  - o $(-\alpha)^{2\nu+1} = (-\alpha)^{2\nu} \cdot (-a) = \alpha^{2\nu} \cdot (-a) = -\alpha^{2\nu} \cdot \alpha = -\alpha^{2\nu+1}$ (περιττός εκθέτης)
  - o Είναι $(-\alpha)^{\nu} \neq -\alpha^{\nu}$ και
  - o αν $\alpha, \beta \geq 0$ και $\alpha^2 = \beta^2$ τότε $\alpha = \beta$

Παρατήρηση: Σε κλάσματα όπου οι αριθμητές και παρανομαστές είναι παραγοντοποιημένοι μπορούμε να μεταφέρουμε μια μεταβλητή από αριθμητή σε παρανομαστή και αντίστροφα αλλάζοντας το πρόσημο του εκθέτη.

Παραδείγματα: $\frac{x^{-2}}{y^{-1}} = x^{-2}y = \frac{y}{x^2}$, $\frac{\alpha^3\beta}{\gamma^2} = \alpha^3\beta\gamma^{-2} = \frac{\alpha^3\gamma^{-2}}{\beta^{-1}} = \frac{\beta\gamma^{-2}}{\alpha^{-3}}$

ΡΙΖΕΣ

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού x λέμε τον θετικό αριθμό που όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον αριθμό x και συμβολίζεται με $\sqrt{x}$. Ορίζουμε ακόμη : $\sqrt{0}=0$.

Παρατηρήσεις

- Δεν ορίζεται τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού, γιατί δεν υπάρχει αριθμός που το τετράγωνο του να είναι αρνητικός αριθμός.
- Το σύμβολο $\sqrt{x}$ έχει νόημα όταν $x \geq 0$.
- Αν $x \geq 0$ τότε $(\sqrt{x})^2 = x$ και $\sqrt{x^2} = x$
- Για κάθε πραγματικό αριθμό x, ισχύει $\sqrt{x^2} = |x|$

Ιδιότητες

- Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$ τότε $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$
- Αν $a \geq 0$ και $\beta > 0$ τότε $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$
- Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$ τότε $\sqrt{\alpha^2\beta} = \alpha\sqrt{\beta}$

Παρατηρήσεις

- Αν *α, β* >0 τότε $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \neq \sqrt{\alpha+\beta}$
- Είναι $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha+\beta}$ όταν ένας τουλάχιστον από τους *α, β* είναι 0**.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι άρρητοι;

a) 1,2313542…

b) $\sqrt{4}$

c) $\sqrt{7}$

d) 2,363636

2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

Α = $-2a+(-5a+2b+4)-(-2b+3a+8)$ για α = -1 και b = - 3

Β = $a(2a-3)+b(2b+3)-4ab$ αν $a-b=3$

Γ = $2a(6a-7)+b(3b+7)-12ab$ αν $2a=b+5$

3. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις

Α = $2^{14}\cdot 2^{20}\cdot 2^{-4}:2^{16}\cdot 2^{4}\cdot 2^{10}$

Β = $[(-\frac{1}{2})^{-4}]^{-8}\cdot[(\frac{1}{2})^{-2}]^{16}$

4. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις ως δυνάμεις με το βάση το α ($\alpha \neq 0$)

i) $(a^{-1}a^{-2})^{-3}$

ii) $(\frac{a}{a^2})^{-2}$

iii) $[((a^2)^{-2}]^5 \div (a^4a)^3$

iv) $[(a^2\cdot a^3)^2\cdot a]:(a^{12}:a^4)$

v) $[a(a^3a^{-2})^0a^{-4}]^2$

5. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις (με την υπόθεση ότι x, y, z, $\omega \neq 0$)

a) $-3(2x^{-1}y^2)^{-2}$

b) $(-2x^{-5}y^3)^{-2}$

c) $(\frac{-3x^4y^{-4}}{2x^{-1}y^{-1}})^2$

d) $\frac{8x^2yz^3\omega}{64x^3z^2\omega^3}$

e) $[(\frac{x^2}{y^3})^{-4}(\frac{x^{-4}}{y^{-5}})^3(xy^{-3})^{-5}]^{-1}:\ [(\frac{x}{y^2})^4(\frac{y}{x^3})^3]^5$

6. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί a^6 και $\left[\dfrac{(\frac{1}{a})^{-2}+(\frac{1}{b})^{-2}}{1+(\frac{a}{b})^{-2}}\right]^{-3}$ είναι αντίστροφοι

7. Αν οι αριθμοί $2x-y+w$ και $y-2x+\phi$ είναι αντίθετοι να αποδείξετε ότι και οι αριθμοί w και ϕ είναι αντίθετοι.

8. Αν οι αριθμοί Α = $x-3y+4z$ και Β = $y-x-2z$ είναι αντίθετοι να δείξετε ότι $y=z$.

9. Να βρεθεί το λάθος στο συλλογισμό :

Αν $2a<3a$ τότε $\dfrac{2a}{a}<\dfrac{3a}{a}$ άρα 2 < 3.

10. Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις ως Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ)

(i) Οι αριθμοί 1και -1 είναι αντίστροφοι

(ii) Κάθε άρρητος πραγματικός αριθμός δεν μπορεί να γραφεί ούτε ως δεκαδικός ούτε ως περιοδικός δεκαδικός

(iii) Κάθε φυσικός αριθμός είναι και ακέραιος

(iv) Κάθε πραγματικός αριθμός είναι ρητός

(v) Κάθε ρητός αριθμός είναι και ακέραιος

(vi) Ο αριθμός 0 δεν έχει αντίθετο

(vii) Ο αριθμός 0 έχει αντίστροφο

(viii) Κάθε ακέραιος αριθμός είναι ρητός.

(ix) Κάθε ακέραιος αριθμός είναι φυσικός.

(x) Το 0 είναι άρτιος.

(xi) Όλοι οι αριθμοί έχουν αντίστροφο.

(xii) Ο αριθμός –α είναι αρνητικός αριθμός.

(xiii) Αν δυο αριθμοί είναι αντίθετοι, τότε το γινόμενο τους είναι αρνητικός.

(xiv) Αν δυο αριθμοί είναι αντίστροφοι, τότε είναι ομόσημοι.

(xv) Αν το άθροισμα δυο αριθμών, είναι αρνητικός αριθμός και το πηλίκο τους θετικός αριθμός, τότε οι αριθμοί είναι αρνητικοί.

11. Αν $\alpha<\beta$ και $\beta>2$ να βρεθεί το πρόσημο της παράστασης $\mathrm{A}=\beta(\alpha-\beta)(\beta-1)$

12. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις

(i) $2^x 2^{x+1} = \frac{1}{2^3}$

(ii) $(-3)^{5x+2} = -27$

(iii) $3^x 3^{2x+3} = 27$

(iv) $2^{2x} 4^{3x+1} = \frac{1}{64}$

13. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες

$\sqrt{a^2} = \ldots\ldots\ldots$ $a^0 = \ldots\ldots\ldots$ $a^{-\nu} = \ldots\ldots\ldots$ $\sqrt{a}\sqrt{b} = \ldots\ldots\ldots$

14. Να απλοποιηθούν οι ρίζες από τους παρανομαστές των κλασμάτων (ρητοποίηση παρονομαστού)

(i) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(ii) $\frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{3}}$

(iii) $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

(iv) $\frac{5}{2\sqrt{3}}$

(v) $\frac{5\sqrt{2}+\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$

(vi) $\frac{6}{\sqrt{48}}$

15. Να κάνετε τις πράξεις

(i) $\sqrt{3}(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

(ii) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

(iii) $\sqrt{5}+\sqrt{5}$

(iv) $\sqrt{5}\sqrt{5}$

(v) $\sqrt{5+5}$

(vi) $(\sqrt{12}+\sqrt{75})(\sqrt{48}-\sqrt{27})$

(vii) $2\sqrt{7}-4\sqrt{2}-5\sqrt{7}+6\sqrt{2}$

16. Να συμπληρώσετε τις ισότητες :

i) $2(x-3) = ...$

ii) $-5(x\ ....\ ....) = ... + 10$

iii) $-3(2x-1) = ...$

17. Αν $x = -|5-3|$ και $y = -|1-2|$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις

i) $K = 1 + 3x - 5y - 2xy$

ii) $M = 1 - 5(x-3y) + \dfrac{x}{y}$

18. Αν οι αριθμοί $\beta - 2\alpha + \delta$ και $2\alpha - \beta + \gamma$ είναι αντίθετοι αριθμοί, να αποδείξετε ότι και οι αριθμοί γ και δ είναι αντίθετοι.

19. Αν οι αριθμοί α, β είναι αντίθετοι και οι x, y αντίστροφοι να υπολογίσετε την παράσταση $2 - 3(\alpha - x) - \dfrac{\beta - 2}{xy} - 3x - 2\beta$

20. Να απλοποιήσετε την παράσταση : $A = \dfrac{3^{\nu} - 3^{\nu-1}}{3^{\nu+1} - 6 \cdot 3^{\nu-2}}$

21. Για τις διάφορες τιμές του ακέραιου αριθμού ν, να υπολογίσετε τις παραστάσεις : $A = (-1)^{\nu}$, $B = \dfrac{(-5)^{\nu}}{5^{\nu}}$

22. Αν οι αριθμοί x, y είναι αντίστροφοι, να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = (x^{-2}y)^3 \cdot (x^2 y^{-1})^2 \cdot 2x^3$

23. Να γράψετε κάθε παράσταση ως μια δύναμη

$A = 2^{13} + 2^{13}$, $B = 2^{33} - 2^{32}$,

$\Gamma = 4^{50} - 8^{33}$, $\Delta = 6^{23} \cdot 5^{22} - 6^{22} \cdot 5^{23}$

24. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων

$A=\sqrt{22+\sqrt{5+\sqrt{16}}}-\sqrt{8\sqrt{2\sqrt{4}}}+\sqrt{81}$ $\qquad B=\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}-\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}$

25. Να αποδείξετε ότι :

i) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{20}=2\sqrt{10}$

ii) $\sqrt{2}\sqrt{18}-\sqrt{3}\sqrt{15}+\dfrac{\sqrt{60}}{\sqrt{3}}=6-\sqrt{5}$

26. Να κάνετε τις πράξεις :

i) $\sqrt{2}(3\sqrt{8}-\sqrt{50})$

ii) $\sqrt{3}(5\sqrt{12}-\sqrt{27})$

iii) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

27. Να γράψετε την παράσταση $A=\sqrt{8}+\sqrt{16}-\sqrt{200}+\sqrt{50}$ στη μορφή $\alpha+\beta\sqrt{2}$ όπου α, β ακέραιοι αριθμοί.

28. Να αποδείξετε ότι : $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}}=44$

ΜΟΝΩΝΥΜΑ – ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ

- **Αριθμητική παράσταση** ονομάζεται η παράσταση που περιέχει πράξεις μεταξύ αριθμών.
  Π. χ. $6 \cdot 5 - 2^3$

- **Αλγεβρική** λέγεται η **παράσταση** η οποία περιέχει πράξεις μεταξύ αριθμών και μεταβλητών (γράμματα). Π. χ.: 3χ, $2a^2$, 3χ + α, $4x - 5y^{-2}$, $\frac{2}{x} - y + 6$

- Μια αλγεβρική παράσταση λέγεται **ακέραια** όταν μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού (οι δυνάμεις έχουν θετικούς εκθέτες).
  Π. χ. $\frac{4}{5}x^2y + y^2$

- Αν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αριθμούς και κάνουμε τις πράξεις τότε προκύπτει ένας αριθμός που λέγεται **αριθμητική τιμή** της αλγεβρικής παράστασης. **Π. χ.** αν έχω την αλγεβρική παράσταση 3χ και αντικαταστήσω το χ = 2 τότε η αριθμητική τιμή της αλγεβρικής παράστασης 3χ είναι $3 \cdot 2 = 6$

- **Μονώνυμο** ονομάζεται η ακέραια αλγεβρική παράσταση που οι αριθμοί και οι μεταβλητές συνδέονται μόνον με τη πράξη του πολλαπλασιασμού. **Π. χ.** 2 α, 4ψχ, $5a^3$

- Ο αριθμητικός παράγοντας, που συνήθως γράφεται πρώτος, λέγεται **συντελεστής** του **μονωνύμου** ενώ το γινόμενο των μεταβλητών λέγεται **κύριο μέρος** του **μονωνύμου**. **Π. χ**. Αν έχω $-2a^2b^3$ τότε ο συντελεστής είναι το -2 και κύριο μέρος το a^2b^3

- **Βαθμός** του μονωνύμου **ως προς μια μεταβλητή** λέγεται ο εκθέτης της μεταβλητής αυτής. Π. χ. Ο βαθμός του μονωνύμου $4x^2y$ ως προς τη μεταβλητή x είναι 2 και ως προς y είναι 1.

- **Βαθμός** του μονωνύμου ως προς όλες τις μεταβλητές του λέγεται το άθροισμα των εκθετών των μεταβλητών του. Π. χ. Ο βαθμός του $4x^2y$ ως προς x, y είναι $2+1=3$ ή είναι 3[ου] βαθμού.

- Δυο ή περισσότερα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος λέγονται **όμοια μονώνυμα**. Π. χ. $-3xy^2$, $\frac{3}{2}xy^2$.

- **Ίσα** λέγονται τα όμοια μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή. Π. χ. $4x^2y$, $4yx^2$
- **Αντίθετα** λέγονται τα όμοια μονώνυμα που έχουν αντίθετους συντελεστές. Π. χ. $4x^2y$, $-4x^2y$

- **Σταθερό** μονώνυμο λέμε οποιοδήποτε αριθμό. Π. χ. -5, 6, $\frac{2}{3}$

- **Μηδενικό** μονώνυμο λέμε το σταθερό μονώνυμο 0

    - Αν το μονώνυμο είναι μηδενικό τότε δεν ορίζεται βαθμός αυτού.
    - Αν το μονώνυμο είναι σταθερό και όχι μηδενικό, τότε είναι μηδενικού βαθμού.

- Το **άθροισμα** όμοιων μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο όμοια με αυτά και έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους. Π. χ. $5x^2 - 2x^2 = (5-2)x^2 = 3x^2$

- Το **γινόμενο** μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο με συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και κύριο μέρος το γινόμενο όλων των μεταβλητών τους με εκθέτη κάθε μεταβλητής το άθροισμα των εκθετών της. Π. χ. $-3x^2y^3z\cdot(2xy^2) = (-3)\cdot 2x^{2+1}y^{3+2}z = -6x^3y^5z$

- **Πολυώνυμο** λέγεται μια αλγεβρική παράσταση που είναι άθροισμα ανόμοιων μονωνύμων. Π. χ. $ax^2 + bx + c$, $3x^3 + 2a^2 + 5y$

- **Όρος του πολυωνύμου** λέγεται κάθε μονώνυμο που περιέχεται στο πολυώνυμο.

- Ένα πολυώνυμο που δεν έχει όμοιους όρους λέγεται
    - **διώνυμο** όταν έχει δυο όρους (π. χ. $2x^3 + 5y$) και
    - **τριώνυμο** όταν έχει τρεις όρους. (π. χ. $8x + 5y^2 + z^3$)

- **Βαθμός ενός πολυωνύμου** ως προς μια ή περισσότερες μεταβλητές του είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του. Π. χ. Το πολυώνυμο $3x^6 + 2x^2y^3 - 5x^3y^2$ είναι $6^{ου}$ βαθμού ως προς x, $3^{ου}$ βαθμού ως προς y και $6^{ου}$ βαθμού ως προς x, y

- **Σταθερό πολυώνυμο** λέγεται κάθε αριθμός $P(x)=c\,,c\neq 0$ Π. χ. -9, 8, $\frac{-4}{5}$

- **Μηδενικό πολυώνυμο** λέγεται ο αριθμός μηδέν. $P(x)=0$

- **Αναγωγή ομοίων όρων** ονομάζεται η αντικατάσταση των ομοίων όρων με το άθροισμα τους.

Π. χ. $2ab^2+4xy+3ab^2-xy=(2+3)ab^2+(4-1)xy=5ab^2+3xy$

- **Δυο πολυώνυμα είναι ίσα** όταν έχουν όρους ίσα μονώνυμα

Π. χ. $\left.\begin{array}{l} P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta \\ P'(x)=\alpha' x^3+\beta' x^2+\gamma' x+\delta' \end{array}\right\}$ είναι ίσα $\Leftrightarrow$ $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$, $\delta=\delta'$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ποια από τα παρακάτω μονώνυμα είναι όμοια

i). $-2x^2$, $\frac{1}{2}xy^2$, $-x^2y$, yx^2, $2x^2y^2$, $-\frac{x^2}{3}$, $-\frac{1}{2}x^2$

ii). $-4a^2$, $\frac{4}{3}a^2b$, $-ba^2$

2. Να βρεθούν τα κ, λ ώστε τα μονώνυμα να είναι όμοια

α) $3x^2y^k$, $-2x^2y^3z^\lambda$ **β)** $2006x^5y^{\mu+1}z^\lambda$, $-2004x^ky^4$

3. Ποιες από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι μονώνυμα και ποιες όχι; Από τα μονώνυμα, ποια είναι όμοια;

a) $\sqrt{3}a^2\beta$

b) $\frac{2}{5}xy^2\omega^2$

c) $(5+\sqrt{3})xy\omega$

d) $3(x-y)\omega$

e) $\frac{7a^3}{5\omega y}$

f) $2x^2y^{-2}$

g) $\frac{3}{2}xy^2\omega^2$

h) $-xy^2\omega^2$

i) $\frac{x^2y^3}{3}$

4. Δίνεται το μονώνυμο $-x^3y^2z$. Να βρείτε

i). το συντελεστή και το κύριο μέρος του μονωνύμου

ii). το βαθμό του μονωνύμου

i. ως προς x,

ii. ως προς x, y,

iii. ως προς x, y, z

iii). την αριθμητική τιμή του μονωνύμου για $x=-2,\ y=-3,\ z=5$.

5. Να βρείτε τις τιμές των λ, μ, ν ώστε τα μονώνυμα

i). $3x^{\nu}y^{3}$, $-x^{2}y^{2\mu-5}$ να είναι όμοια

ii). $\lambda\alpha^{2}\beta^{3}$, $5\alpha^{2}\beta^{\mu+1}$ να είναι ίσα

iii). $(2\lambda-1)x^{3}y^{4}$, $\lambda x^{\mu}y^{4}$ να είναι αντίθετα

6. Να προσδιορίσετε την τιμή του φυσικού αριθμού λ ώστε το μονώνυμο $2x^{\lambda}y^{\lambda-2}$

(i) Να είναι μηδενικού βαθμού ως προς y

(ii) Να είναι 4ου βαθμού ως προς x, y

(iii) Να έχει αριθμητική τιμή 64 για $x=-1$ και $y=-2$

7. Να προσδιορίσετε την τιμή του φυσικού αριθμού ν, ώστε το μονώνυμο $2x^{2}y^{\nu}$ να έχει

i). αριθμητική τιμή 54 για $x=-1$ και $y=3$

ii). αριθμητική τιμή 72 για $x=-2$ και $y=-3$

8. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

i). Το γινόμενο όμοιων μονωνύμων είναι μονώνυμο όμοιο προς αυτά

ii). Το πηλίκο όμοιων μονωνύμων είναι μονώνυμο.

iii). Το άθροισμα όμοιων μονωνύμων είναι μονώνυμο όμοιο προς αυτά.

iv). Το άθροισμα αντίθετων μονωνύμων είναι το μηδενικό μονώνυμο.

v). Το πηλίκο μονωνύμων είναι μονώνυμο.

i)	**ii)**	**iii)**	**iv)**	**v)**

9. Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς λ, μ ώστε η αλγεβρική παράσταση $2\alpha^{3}\beta^{2\mu}-3\alpha^{\lambda+1}\beta^{6}$ να είναι μονώνυμο.

10. Να κάνετε τις πράξεις

i). $xy^3 - 2xy^3$

ii). $-5ab^2 + 3ab^2 - b^2a$

iii). $-\kappa^3\lambda + 3\lambda^2\kappa - 2\kappa^3\lambda^2$

11. Να υπολογίσετε τα γινόμενα

i). $\sqrt{2}\omega^2 \cdot \sqrt{3}\omega$

ii). $2\chi^3 \cdot 3\chi^2$

iii). $2x^3y \cdot (-5x^2y^3)$

iv). $3x^2 \cdot (-2x^3) \cdot 5x$

v). $-\alpha^2\beta \cdot (-2\alpha\gamma^3) \cdot 5\alpha^3\beta^2$

12. Να υπολογίσετε τα πηλίκα

i). $\dfrac{15x^4}{3x^2}$

ii). $-6x^5 : (3x^2)$

iii). $6x^3y^4 : (-2x^2y)$

iv). $-8\alpha^5\beta^3\gamma : (-6\alpha\beta^3)$

v). $\dfrac{2}{5}xy^3 : (-\dfrac{2}{5}y^2\omega)$

13. Να βρείτε τις τιμές των κ, λ, μ ώστε να ισχύουν οι ισότητες

i). $(\kappa x^\lambda y) \cdot (3x^2y^\mu) = -12x^5y$

ii). $[(2\kappa - 1)x^{2\lambda} \cdot y^{\mu+3}] \cdot (3x^{\lambda+1}y^\mu) = -6x^7y^9$

14. Να βρείτε τις τιμές των κ, λ, μ ώστε να ισχύουν οι ισότητες

i). $(12x^{3\lambda}y^{2\kappa}) : (\mu x^\lambda y^\kappa) = -3x^4y^3$

ii). $[(3\mu - 1) \cdot x^{2\lambda+3} \cdot y^{\kappa+1}] : (-2x^{\lambda+5}y^3) = \mu xy^2$

15. Αν $P(x) = x^3 - x^2 - 3x + 5$

i). Να βρείτε την $P(-1)$

ii). Να δείξετε ότι $P(-2) = -7 + P(-1)$

16. Να βρείτε το βαθμό των παρακάτω πολυωνύμων

i). $P(x) = \lambda x^2 + 3x - 2$

ii). $Q(x) = (\lambda - 1)x^2 - (1 - \lambda^2)x - 1$

17. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(\alpha-1)x^2+\beta x+\gamma+3$ (μεταβλητή του πολυωνύμου το x, τα α, β, γ είναι σταθεροί αριθμοί - παράμετροι)

i). Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε το $P(x)$ να είναι σταθερό πολυώνυμο.

ii). Αν το $P(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο να βρείτε τις τιμές των α, β, γ

iii). Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ ώστε το $P(x)$ να είναι ίσο με το $Q(x)=x^2+5$.

18. Αν $A(x)=1-(x-3x^2)-2x$ και $B(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ να βρείτε τις τιμές των α, β, γ ώστε τα πολυώνυμα $A(x)$ και $B(x)$ να είναι ίσα.

19. Τα πολυώνυμα $P(x), Q(x), R(x)$ έχουν βαθμούς 3, 4, 3 αντίστοιχα.

i). Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου $H(x)=P(x)+Q(x)$

ii). Αν το πολυώνυμο $A(x)=P(x)+R(x)$ είναι μη μηδενικό, τι βαθμό μπορεί να έχει;

20. Αν $P(x)=3x^2-x-2$ να προσδιορίσετε το πολυώνυμο $Q(x)=P(-x)-P(2x^3)$

21. Να αποδείξετε ότι αν από το εμβαδόν $5x^2-3x+37$ ενός ορθογωνίου, αφαιρέσουμε τα εμβαδά $3x^2-x+7$, $2x^2-2x+5$ δυο άλλων ορθογωνίων, θα βρούμε το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς 5.

22. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

i). Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει βαθμό 0 και το πολυώνυμο $Q(x)$ έχει βαθμό 3, τότε το πολυώνυμο $P(x)\cdot Q(x)$ έχει βαθμό ………..…….

ii). Αν το πολυώνυμο $P(x)\cdot Q(x)$ έχει βαθμό 5 και το πολυώνυμο $P(x)$ έχει βαθμό 2, τότε το πολυώνυμο $Q(x)$ έχει βαθμό ....

iii). Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει βαθμό 3 τότε το πολυώνυμο $Q(x)=[P(x)]^2$ έχει βαθμό ……………………………………..…..

23. Να κάνετε τις πράξεις

i). $x^2(3x^2-5x-1)$

ii). $1-2x^2(3x-1)-(5x-2)(-x)$

iii). $(x+2)(y+3)$

iv). $1+2x(x-1)(x+3)$

v). $2\alpha^3\beta-\alpha\beta(\alpha-\beta)(2\alpha-\beta)+\alpha\beta^3$

24. Να αποδείξετε τις ισότητες

i). $5x-2x(3x-1)-(6x-1)(1-x)=1$

ii). $3\beta^2-2\alpha(\alpha+3\beta)-3(\alpha+\beta)(\beta-2\alpha)-4\alpha^2=-3\alpha\beta$

25. Αν $P(x)=x-(2x-1)(x-2)(-3x)$ και $Q(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.

26. Αν $P(x)=3x-2$ να βρείτε τα πολυώνυμα

i). $Q(x)=P(2x+1)$

ii). $R(x)=P(x^2-3)$

iii). $H(x)=P(P(x))$

27. Με ποιο πολυώνυμο πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το $5x-2$ ώστε το γινόμενο τους να είναι το πολυώνυμο $10x^2-9x+2$

28. Να κάνετε τις πράξεις

i). $\alpha^2+2\alpha\beta-3\alpha^2+8\alpha\beta+9\alpha^2$

ii). $3x^2y^2-x^2y^2+8x^2y^2-12x^2y^2$

iii). $-2a(-a\beta^2)^2(-\beta)^4$

iv). $[(x^2y)(y\omega)^3]:[(xy^2)^2\omega^3]$

v). $[(\alpha^3\beta)(\beta\gamma)^2]:[(\alpha\beta)^2\gamma]$

vi). $(4xy^3\omega^2):(\frac{1}{2}xy^2\omega^2)$

29. Να απαλειφθούν οι παρενθέσεις και να γίνει αναγωγή ομοίων όρων

Α = $(x^3-2x^2y)-(x^3+4xy^2-y^3)-(-x^3-3x^2y+2y^3)$

Β = $(a+b)(2a-b)-(3a-b)(a+b)-2b(a+3b)$

Γ = $(2x+3y)(x-2y)-(x+5y)(y-3x)-2xy(x+y)$

Δ = $(1-2x^2+4x^3)(2-5x^2+4x)$

Ε = $(a^2x^2-3ax^3)+(2x^3-2a^3+a^3x)-(-a^2x^2+a^3)$

Ζ = $5\alpha\beta(3\beta^2\alpha^4)-2\beta^3(\alpha+\alpha^5)+\beta\alpha^3$

30. Να κάνετε τις πράξεις

i). $2x-2x(3x^2-1)+(2-x)(-3x)-(-3x)^2$

ii). $x^2y-xy^2(xy-1)+(xy^2+y)(xy-x^2)$

iii). $3x(x-1)(x-2)-(3x-1)(x+1)(x-3)$

iv). $(x+2)(y+3)$

v). $1+(x-1)(x+1)$

vi). $(x^2-2y)(3xy-x)$

vii). $(2\alpha-3)(5\beta-4)$

viii). $(2x-1)(3x-5)$

ix). $3x(x-1)(2x-3)$

x). $x^2+(3x-2)(1-x)$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

Ταυτότητα είναι μια ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών.

(1) $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$	**Τετράγωνο αθροίσματος**

Απόδειξη : Παίρνουμε το $1^{ο}$ μέλος και κάνουμε πράξεις

$(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)$ (ορισμός δύναμης)

$=\alpha^2+\alpha\beta+\beta\alpha+\beta^2$ (διπλή επιμεριστική ιδιότητα)

$=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ (αναγωγή ομοίων όρων)

Παράδειγμα: $(2x+7y)^2=(2x)^2+2(2x)(7y)+(7y)^2$ (εφαρμογή ταυτότητας)

$=4x^2+28xy+49y^2$ (ιδιότητες πολ/μού & δυνάμεων)

(2) $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$	**Τετράγωνο διαφοράς**

Απόδειξη : Παίρνουμε το $1^{ο}$ μέλος και κάνουμε πράξεις

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)$ (ορισμός δύναμης)

$=\alpha^2-\alpha\beta-\beta\alpha+\beta^2$ (διπλή επιμεριστική ιδιότητα)

$=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$ (αναγωγή ομοίων όρων)

Παράδειγμα: $(2ax-3x^2y)=(2ax)^2-2(2ax)(3x^2y)+(3x^2y)^2$ (εφαρμογή ταυτότητας)

$=4a^2x^2-12ax^3y+9x^4y^2$ (ιδιότητες πολ/μού & δυνάμεων)

(3) $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$	**Διαφορά δυο τετραγώνων ή Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά**

Απόδειξη

Παίρνουμε το $1^{ο}$ μέλος και κάνουμε πράξεις

$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\alpha\beta+\beta\alpha-\beta^2$ (διπλή επιμεριστική ιδιότητα)

$=\alpha^2-\beta^2$ (αναγωγή ομοίων όρων)

Παράδειγμα: $(3xy+y^2)(3xy-y^2)=(3xy)^2-(y^3)^2$ (εφαρμογή ταυτότητας)

$=9x^2y^2-y^6$ (ιδιότητες δυνάμεων)

(4) $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$	**Κύβος αθροίσματος**

Απόδειξη

Παίρνουμε το 1^o μέλος και κάνουμε πράξεις

$(\alpha+\beta)^3=(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta)$ (ιδιότητα δυνάμεων)

$=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)(\alpha+\beta)$ (εφαρμογή ταυτότητας 1)

$=\alpha^3+\alpha^2\beta+2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\alpha\beta^2+\beta^3$ (γινόμενο πολυωνύμων)

$=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ (αναγωγή ομοίων όρων)

Παράδειγμα:

$(2x+y^3)^3=(2x)^3+3(2x)^2(y^3)+3(2x)(y^3)^2+(y^3)^3$ (εφαρμογή ταυτότητας)

$=8x^3+3(4x^2)y^3+3(2x)(y^6)+y^9$ (ιδιότητες δυνάμεων)

$=8x^3+12x^2y^3+6xy^6+y^9$ (ιδιότητες πολλαπλασιασμού)

(5) $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$	**Κύβος διαφοράς**

Απόδειξη

Παίρνουμε το 1^o μέλος και κάνουμε πράξεις

$(\alpha-\beta)^3=(\alpha-\beta)^2(\alpha-\beta)$ (ιδιότητα δυνάμεων)

$=(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)(\alpha-\beta)$ (εφαρμογή ταυτότητας 2)

$=\alpha^3-\alpha^2\beta-2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\alpha\beta^2-\beta^3$ (γινόμενο πολυωνύμων)

$=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$ (αναγωγή ομοίων όρων)

Παράδειγμα:

$(x^2y-5)^3=(x^2y)^3-3(x^2y)^2\cdot5+3(x^2y)\cdot5^2-5^3$ (εφαρμογή ταυτότητας)

$=x^6y^3-3(x^4y^2)\cdot5+3(x^2y)\cdot25-125$ (ιδιότητες δυνάμεων)

$=x^6y^3-15x^4y^2+75x^2y-125$ (ιδιότητες πολλαπλασιασμού)

(6) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$	**Άθροισμα δυο κύβων**

Απόδειξη

Παίρνουμε το 2^o μέλος και κάνουμε πράξεις

$$(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3-\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+\beta^3$$ (γινόμενο δύο πολυωνύμων)

$$=\alpha^3+\beta^3$$ (αναγωγή ομοίων όρων)

Παράδειγμα:

$$x^3+8=x^3+2^3=(x+2)(x^2-2x+2^2)$$ (εφαρμογή ταυτότητας)

$$=(x+2)(x^2-2x+4)$$

(7) $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$	**Διαφορά δυο κύβων**

Απόδειξη

Παίρνουμε το 2^o μέλος και κάνουμε πράξεις

$$(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2-\beta^3$$ (γινόμενο δύο πολυωνύμων)

$$=\alpha^3-\beta^3$$ (αναγωγή ομοίων όρων)

Παράδειγμα:

$$1-x^3=1^3-x^3=(1-x)(1^2+1x+x^2)$$ (εφαρμογή ταυτότητας)

$$=(1-x)(1+x+x^2)$$

Σημείωση 1: Όπως είδαμε στις παραπάνω αποδείξεις των ταυτοτήτων, ξεκινήσαμε από ένα μέλος τους, κάναμε πράξεις και καταλήξαμε στο άλλο. Αυτός όμως δεν είναι ο μοναδικός τρόπος που χρησιμοποιούμε στις αποδείξεις διάφορων σχέσεων. Πολλές φορές μας διευκολύνει να μετασχηματίσουμε τη σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε σε άλλη ισοδύναμη της (π. χ. Κάνοντας πράξεις και στα δυο μέλη), μέχρι να καταλήξουμε σε μια σχέση που θα μας είναι γνωστό ότι αληθεύει. Έτσι, θα αληθεύει και η αρχική.

Παράδειγμα:

Ν' αποδειχθεί ότι : $(\alpha+\beta)^2=(\alpha-\beta)^2+4\alpha\beta$

Απόδειξη

$(\alpha+\beta)^2=(\alpha-\beta)^2+4\alpha\beta$	Κάνουμε πράξεις και στα δυο μέλη
$(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+4\alpha\beta$	Κάνουμε αναγωγές ομοίων όρων
$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$	Είναι προφανές ότι ισχύει, άρα ισχύει και η αρχική

Σημείωση 2: Ένας ακόμα τρόπος για να αποδεικνύουμε ταυτότητες είναι: Να πάρουμε το 1ο μέλος και κάνοντας πράξεις να καταλήξουμε σ' ένα αποτέλεσμα. Παίρνουμε και το δεύτερο μέλος και κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα. Άρα, το 1ο μέλος είναι ίσο με το 2ο.

Παράδειγμα

Ν' αποδειχθεί η ταυτότητα : $(3\kappa+2)^2-(2\kappa+3)^2=5(\kappa+1)(\kappa-1)$

Απόδειξη

- Το $1^{\text{ο}}$ μέλος διαδοχικά γράφεται :

$$\begin{aligned}(3\kappa+2)^2-(2\kappa+3)^2&=(9\kappa^2+12\kappa+4)-(4\kappa^2+12\kappa+9)\\&=9\kappa^2+12\kappa+4-4\kappa^2-12\kappa-9\\&=5\kappa^2-5\end{aligned}$$

- Το $2^{\text{ο}}$ μέλος διαδοχικά γράφεται :

$$5(\kappa+1)(\kappa-1)=5(\kappa^2-1)=5\kappa^2-5$$

Επομένως, $(3\kappa+2)^2-(2\kappa+3)^2=5(\kappa+1)(\kappa-1)$

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ	ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ
1. $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$	8. $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
2. $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$	9. $\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta$
3. $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$	10. $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
4. $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$	11. $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)$
5. $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$	12. $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$
6. $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$	13. $(\alpha-\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma+2\alpha\gamma$
7. $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$	

Αποδείξεις

1. $(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2+\alpha\beta+\beta\alpha+\beta^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$
2. $(\alpha-\beta)^2=(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\alpha\beta-\beta\alpha+\beta^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$
3. $(\alpha+\beta)^3=(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta)=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)(\alpha+\beta)=$
   $=\alpha^3+\alpha^2\beta+2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^2\alpha+\beta^3=$
   $=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$
4. $(\alpha-\beta)^3=(\alpha-\beta)^2(\alpha-\beta)=(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)(\alpha-\beta)=$
   $=\alpha^3-\alpha^2\beta-2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^2\alpha-\beta^3=$
   $=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$
5. $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2+\alpha\beta-\beta\alpha-\beta^2=\alpha^2-\beta^2$
6. $(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\beta\alpha^2-\alpha\beta^2-\beta^3=\alpha^3-\beta^3$
7. $(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3-\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta\alpha^2-\alpha\beta^2+\beta^3=\alpha^3+\beta^3$

---

12. $(\alpha+\beta+\gamma)^2=((\alpha+\beta)+\gamma)^2=(\alpha+\beta)^2+2(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2=$
    $=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\gamma^2$
    $=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$
13. $(\alpha-\beta+\gamma)^2=((\alpha-\beta)+\gamma)^2=(\alpha-\beta)^2+2(\alpha-\beta)\gamma+\gamma^2=$
    $=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+2\alpha\gamma-2\beta\gamma+\gamma^2$
    $=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma+2\alpha\gamma$

ΠΡΟΣΟΧΗ !!!!

► $\boxed{(\alpha+\beta)^2\neq\alpha^2+\beta^2}$ και ► $\boxed{(\alpha+\beta)^3\neq\alpha^3+\beta^3}$

Πράγματι: $(2+3)^2=5^2=25$ $(2+3)^3=5^3=125$

Ενώ $2^2+3^2=4+9=13$ και ενώ $2^3+3^3=8+27=35$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ)

$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2$	
$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2$	
$(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$	
$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha\beta+\beta^3$	
$(\alpha+\beta)(\beta-\alpha)=\alpha^2-\beta^2$	
$(\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3+\beta^3$	
$(\alpha-\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3-\beta^3$	
$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$	
$(\alpha-\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma+2\gamma\alpha$	
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta$	
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2-2\alpha\beta$	
$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)$	
$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha-\beta)$	

2. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

A. Αν $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2$, τότε

i) $\alpha=0$ και $\beta=0$ ii) $\alpha+\beta=0$ iii) $\alpha=0$ ή $\beta=0$

B. Αν $(\alpha+\beta)^2=2\alpha\beta$, τότε

i) $\alpha=0$ και $\beta=0$ ii) $\alpha+\beta=0$ iii) $\alpha=0$ ή $\beta=0$

C. Αν $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3$ και $\alpha,\beta\neq 0$,τότε οι αριθμοί α,β δεν είναι

i) Ετερόσημοι   ii) Αντίθετοι   iii) Ομόσημοι

D. Αν $\alpha\neq\beta$ και $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-\beta^3$, τότε

i) $\alpha=0$ και $\beta=0$ ii) $\alpha=0$ ή $\beta=0$ iii) $\alpha\beta>0$

E. Αν $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2$, τότε οι αριθμοί α,β δεν είναι

i) Ομόσημοι   ii) Αντίστροφοι   iii) Αντίθετοι

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα

i) $(x+4)^2$

ii) $(1-x)^2$

iii) $(-x+6)^2$

iv) $(\sqrt{3}+2)^2$

v) $(2\alpha+3\beta)^2$

vi) $(x-\frac{2}{3})^2$

vii) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$

viii) $(\alpha x-\beta y)^2$

ix) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$

x) $(x^2+3)^2$

xi) $(-x-y)^2$

xii) $(x+2)^3$

xiii) $(2x+1)^3$

xiv) $(x-\sqrt{2})^3$

xv) $(x^2-5)^3$

xvi) $(-x+\sqrt{3})^3$

xvii) $(x+4)(x-4)$

xviii) $(3x-2)(2+3x)$

xix) $(2x-5)(-5-2x)$

xx) $(3x-1)(3x+1)(9x^2+1)$

xxi) $(a+b-1)^2$

xxii) $(a^2x-b^2y)^2$

xxiii) $(x+3)(x^2-3x+9)$

xxiv) $(x-1)(x^2+x+1)-(x+2)(x^2-2x+4)$

2. Να κάνετε τις πράξεις

i) $3(x-2)^2-2x(3-x)^2+(1-x)(4+x)^2$

ii) $(2x+5)^2-(4x-1)(4x+1)-(3x+1)^2$

iii) $(x+2y)(x-2y)(x^2+4y^2)(x^2+16y^4)$

iv) $2(a+2b)^2-3(a+3b)^2-(2a+3b)(3a-3b)$

v) $(a-b)^2-(b-a)^2$

vi) $(a^2+b^2)^2-4a^2b^2$

vii) $(\frac{\kappa+\lambda}{2})^2-(\frac{\kappa-\lambda}{2})^2$

viii) $(3x+2)^2-(2x+5)(2x-5)-(2x-1)^2$

ix) $2x^2-(x-4)^2-(x-2)(2+x)$

x) $2x^2-(2x+3)(3-2x)-(x+2)(x^2-2x+4)$

3. Να αποδείξετε τις ταυτότητες

i. $(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=4\alpha\beta$

ii. $(\alpha^2+1)(x^2+4)-(2\alpha-x)^2=(\alpha x+2)^2$

iii. $4\alpha(\alpha-1)-(2\alpha-1)^2=-1$

iv. $(\alpha+\beta)^3-(\alpha-\beta)^3-6\alpha^2\beta=2\beta^3$

v. $2\alpha(2\alpha-1)^2-(2\alpha-1)^3-4\alpha^2=1-4\alpha$

vi. $(\alpha^2-1)^3-\alpha^2(\alpha^2+1)^2=\alpha^2(2-5\alpha^2)-1$

4. Να αποδείξετε ότι

i. $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)-(2\alpha-\beta)(2\alpha+\beta)+3\alpha^2=0$

ii. $\alpha(1+\alpha)(\alpha-1)-(\alpha-1)^2-\alpha^3=-1-\alpha(\alpha-1)$

iii. $(2\alpha^2-1)^3-2(2\alpha^3-1)(1+2\alpha^3)-1=-6\alpha^2(2\alpha^2-1)$

iv. $(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)-(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=2\beta^3$

v. $(2x-1)^3-(2x-1)(1+4x+4x^2)-8x=-16x^2$

vi. $(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\alpha-\beta+\gamma)^2=4\beta(\alpha+\gamma)$

vii. $(x+y+z)(x+y-z)=x^2+y^2-z^2+2xy$

5. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρανομαστή.

i. $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ **ii.** $\dfrac{3}{\sqrt{2}+1}$ **iii.** $\dfrac{1}{1+2\sqrt{3}}$

6. Να βρείτε τα αναπτύγματα

i. $(2\alpha+\beta-3\gamma)(2\alpha-\beta+3\gamma)$

ii. $(x-2)(x+2)(x^2+4)$

iii. $(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})$

iv. $(5x+1)(1-5x)$

v. $(x-y+3)(x+y-3)$

vi. $(x-3+\sqrt{2})(x-3-\sqrt{2})$

vii. $(1-xy)(1+xy+x^2y^2)$

7. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=(x+1)(x^2-x+1)-(x+1)^3+3x(x+1)$ είναι μηδενικό.

8. Να βρείτε τα αναπτύγματα

i. $(x^2+3x+2)^2$ **ii.** $(x+2y-z)^2$ **iii.** $(x-2)^4$

9.

i. Να κάνετε τις πράξεις : $(x-3)^2-(x+2)(x-8)$

ii. Να υπολογίσετε τον αριθμό : $9997^2-9992\cdot 10002$

10. Αν $x-y=3$ και $xy=-2$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

i. x^2+y^2 **ii.** x^3-y^3 **iii.** $|x+y|$

11. Αν $\alpha=x+y$, $\beta=x-y$ και $\gamma=4xy$ να δείξετε ότι : $(\alpha^2-\beta^2)^2=\gamma^2$

12. Αν $\alpha+\beta=-2$ και $\alpha\beta=-3$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις

i. $\alpha^2+\beta^2$ **iii.** $(\alpha-\beta)^2$

ii. $\alpha^3+\beta^3$ **iv.** $|\alpha-\beta|$

13. Αν $x+\dfrac{1}{x}=5$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις

i. $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ **iii.** $(x+1)^2+(\dfrac{1}{x}+1)^2$

ii. $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ **iv.** $(x-1)^3+(\dfrac{1}{x}-1)^3$

14. Αν $\alpha+\beta=-\dfrac{5}{2}$ και $\alpha^3+\beta^3=-\dfrac{65}{8}$ να δείξετε ότι οι αριθμοί α,β είναι αντίστροφοι.

15. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=(x-1)^2-(3x-2)^2-2x(5-4x)$ είναι σταθερό

16. Αν οι αριθμοί x, y είναι αντίστροφοι να υπολογίσετε την παράσταση

$A=(x+2y)^2-(2x-y)^2+3x^2-3y^2$

17. Αν $x-\frac{1}{x}=1$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις

i. $x^2+\frac{1}{x^2}$

ii. $x^3-\frac{1}{x^3}$

iii. $x^4+\frac{1}{x^4}$

iv. $x^5-\frac{1}{x^5}$

v. $\left|x+\frac{1}{x}\right|$

18. Αν $\alpha^2+\beta^2=1$ να δείξετε ότι η παράσταση $A=3(\alpha^4+\beta^4-2(\alpha^6+\beta^6)$ είναι ανεξάρτητη των α,β

19. Αν $x+y+z=12$ και $xy+xz+yz=22$ να υπολογίσετε την παράσταση $x^2+y^2+z^2$

20. Παρατηρήστε τις ισότητες :

$$2^2-1^2=3$$
$$3^2-2^2=5$$
$$4^2-3^2=7$$
$$5^2-4^2=9$$

i. Τι συμπέρασμα βγάζετε απ' αυτές;

ii. Μπορείτε να βρείτε τη διαφορά $20000^2-19999^2$ χωρίς να υπολογίσετε τις δυνάμεις;

iii. Να διατυπώσετε ένα ισχυρισμό (μια εικασία) για τη διαφορά των τετραγώνων δυο διαδοχικών ακεραίων ν και ν+1.

iv. Να αποδείξετε τον ισχυρισμό που διατυπώσατε.

21. Αν $\alpha=2+\sqrt{3}$

i. Να δείξετε ότι ο αντίστροφος του α είναι ο συζυγής του: $\overline{\alpha}=\overline{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$

ii. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

a. $\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}$

b. $\alpha^3-\frac{1}{\alpha^3}$

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

Η μετατροπή ενός πολυωνύμου ή μιας αλγεβρικής παράστασης από άθροισμα σε γινόμενο λέγεται **ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων** ή απλά **παραγοντοποίηση.**

Η παραγοντοποίηση είναι πολύ χρήσιμη στις πράξεις των κλασμάτων που οι όροι τους είναι πολυώνυμα, στην επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων ανωτέρου του πρώτου βαθμού και αλλού. (Η παραγοντοποίηση ενός πολυωνύμου πρέπει να φθάνει μέχρι την εύρεση των «πρώτων» παραγόντων του).

ΤΡΟΠΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

1. ΚΟΙΝΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ

Όταν όλοι οι όροι ενός πολυωνύμου έχουν κοινό παράγοντα το πολυώνυμο αυτό μετατρέπεται σε γινόμενο με τη βοήθεια της ισότητας της επιμεριστικής ιδιότητας.

Παραδείγματα:

- $\alpha x+\alpha y=\alpha(x+y)$
- $\alpha x+\alpha=\alpha(x+1)$
- $2x^2y+6xy^2=2xy(x+3y)$
- $\alpha(x+2)+\beta(x+2)=(\alpha+\beta)(x+2)$
- $7x(\alpha-\beta)-\alpha+\beta=7x(\alpha-\beta)-(\alpha-\beta)=(\alpha-\beta)(7x-1)$

2. ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ

Εξάγουμε κοινό παράγοντα κατά ομάδες

Παραδείγματα:

- $\alpha x-\beta x-\alpha y+\beta y=\alpha(x-y)-\beta(x-y)=(x-y)(\alpha-\beta)$
- $\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=\alpha(\alpha^2+1)+\alpha^2+1=(\alpha^2+1)(\alpha+1)$
- $5\alpha^2+10\alpha\beta-3\alpha\beta-6\beta^2=5\alpha(\alpha+2\beta)-3\beta(\alpha+2\beta)=(\alpha+2\beta)(5\alpha-3\beta)$. Δηλαδή, βγάζοντας κοινό παράγοντα από κάθε ομάδα, πρέπει να παρουσιάζεται το ίδιο πολυώνυμο μέσα στην κάθε παρένθεση για όλες τις ομάδες. Άρα, αυτό το νέο πολυώνυμο είναι ο κοινός παράγοντας.

3. ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Χρήση της ταυτότητας : $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$

Παραδείγματα

- $4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x - 3y)(2x + 3y)$
- $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$
- $(2x + 1)^2 - 9y^2 = (2x + 1 - 3y)(2x + 1 + 3y)$
- $(-x - 1)^2 - 4y^2 = (x + 1)^2 - (2y)^2 = (x + 1 - 2y)(x + 1 + 2y)$

4. ΔΙΑΦΟΡΑ Ή ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΥΒΩΝ

Χρήση των ταυτοτήτων : $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

Παραδείγματα

- $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$
- $x^3 + 27 = x^3 + 3^3 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

5. ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ

Χρήση των ταυτοτήτων : $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$$

Παραδείγματα:

- $x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2 = (x - 2)^2$
- $\alpha^2 + \alpha + \frac{1}{4} = \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 = (\alpha + \frac{1}{2})^2$
- $x^4 + y^4 - 2x^2y^2 = (x^2 - y^2)^2 = [(x - y)(x + y)]^2 = (x - y)^2(x + y)^2$
- $9\alpha^4 - 24\alpha^2\beta + 16\beta^2 = (3\alpha^2)^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3\alpha^2\beta + (4\beta)^2 = (3\alpha^2 - 4\beta)^2$

6. ΤΡΙΩΝΥΜΟ

Για να παραγοντοποιήσουμε ένα τριώνυμο της μορφής $x^2+\beta x+\gamma$ ψάχνουμε δυο αριθμούς τέτοιους ώστε $\kappa+\lambda=\beta$ και $\kappa\cdot\lambda=\gamma$ ισχύει: $(x+\kappa)(x+\lambda)=x^2+(\kappa+\lambda)x+\kappa\lambda$

Παραδείγματα

- $x^2+3x-10$ Θέλουμε: $\kappa+\lambda=3$ και $\kappa\cdot\lambda=-10$

  δηλαδή $\kappa=5$ και $\lambda=-2$

  Άρα, $x^2+3x-10=(x+5)(x-2)$

ΜΕΡΙΚΕΣ ΑΚΟΜΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΕΙΣ

7. ΔΙΑΦΟΡΑ Ή ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΙΣΟΥ ΕΚΘΕΤΗ

Παραδείγματα

- $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=(\alpha^2+\beta^2)^2-(\sqrt{2}\alpha\beta)^2=$

  $=(\alpha^2+\beta^2-\sqrt{2}\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2+\sqrt{2}\alpha\beta)$

- $\alpha^6+\beta^6=(\alpha^2)^3+(\beta^2)^3=(\alpha^2+\beta^2)[(\alpha^2)^2-\alpha^2\beta^2+(\beta^2)^2]=$

  $=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^4-\alpha^2\beta^2+\beta^4)$

  $=(\alpha^2+\beta^2)[(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2]$

  $=(\alpha^2+\beta^2)[(\alpha^2+\beta^2)^2-3\alpha^2\beta^2]$

  $=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\beta^2-\sqrt{3}\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2+\sqrt{3}\alpha\beta)$

- $\alpha^6-\beta^6=(\alpha^3)^2-(\beta^3)^2=(\alpha^3-\beta^3)(\alpha^3+\beta^3)$

  $=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

8. ΤΕΛΕΙΟΣ ΚΥΒΟΣ

Χρήση των ταυτοτήτων : $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

$(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

Παραδείγματα

- $x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$
- $(\alpha+2)^3+3(\alpha+2)^2(\alpha-2)+3(\alpha+2)(\alpha-2)^2+(\alpha-2)^3=$

  $=[(\alpha+2)+(\alpha-2)]^3=(\alpha+2+\alpha-2)^3=(2\alpha)^3=8\alpha^3$

9. ΔΙΑΣΠΑΣΗ Ή ΠΡΟΣΘΑΦΑΙΡΕΣΗ ΟΡΩΝ

Παράδειγμα

- $x^2+4xy+3y^2=x^2+4xy+4y^2-y^2=(x+2y)^2-y^2=$

$$=(x+2y-y)(x+2y+y)=(x+y)(x+3y)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

i) $-\lambda x+\lambda y-\lambda z$

ii) $4x+6y$

iii) $-6\alpha+15\beta-30\gamma$

iv) $5\alpha x-5x$

v) $2x^3+5x$

vi) $10\lambda^5-15\lambda^4+5\lambda^2$

vii) $\lambda(x^2+1)+3(x^2+1)$

viii) $(2y-1)^3-5(2y-1)^2$

ix) $\lambda(2\alpha-\beta)+6\alpha-3\beta$

x) $6x^3-4x^2+3x-2$

xi) $12x^2y-16xy$

xii) $(x+y)^2+3(x+y)$

xiii) $(3x-2)^2+3x-2$

2. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

i) x^3-x^2-4x+4

ii) $x^2-xy+3y-3x$

iii) $-8x+12y-20z$

iv) $-x^2y+xy^2-xy$

v) $(2y-1)^2-3(1-2y)$

vi) $(4x-3)^2-4x+3$

vii) $\alpha\beta-\beta\psi-\alpha\psi+\psi^2$

viii) $a^2-a\gamma+a\beta-\gamma\beta$

ix) $8\alpha^2-12\alpha\beta-10\alpha+15\beta$

x) $2\alpha^2\beta\chi-4\alpha\chi+3\alpha\beta^2\psi-6\beta\psi$

xi) $2\alpha\chi^2+3\alpha\chi\psi-2\beta\chi\psi-3\beta\psi^2$

3. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

i) $9x^2-4$

ii) $16x^4-1$

iii) x^2-5

iv) $(3x-2)^2-1$

v) $9x^2-(2x-3)^2$

vi) a^3b-ab^3

vii) $9x^2-16y^2$

viii) $81-y^2$

ix) $\alpha^2x^2-y^2$

x) $64\lambda^2-25\mu^2$

xi) $81x^4-16$

xii) $5x^2-5y^2$

xiii) $(2y-x)^2-x^2$

xiv) $9(2x-y)^2-16(x-y)^2$

4. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

i) $1+\alpha^3$

ii) x^3+8

iii) $27y^3-1$

iv) α^3+27

v) $64x^3-125$

vi) $8a^3-27x^3$

vii) $a^3-(x-1)^3$

5. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

i) $x^2+10x+25$

ii) y^2-4y+4

iii) $12x^2-36x+27$

iv) $x^2-8x+15$

v) x^2+7x+6

vi) x^2+x-12

vii) $x^2-2x-15$

viii) $x^2+9x+20$

ix) $a^2-6ab+9b^2$

x) $(x+y)^2-2(x+y)+1$

xi) x^2+6x+9

xii) $y^2-10y+25$

xiii) $25x^2+4y^2-20xy$

xiv) $4x^2+12x+9$

xv) x^4-6x^2+9

xvi) $x^4+x^2+\frac{1}{4}$

xvii) $a^2x^2-a^2y^2-9x^2+9y^2$

6. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

i) $36\alpha^2-25(\alpha-2\beta)^2$

ii) x^3-x

iii) $27y^3-12y$

iv) $16\alpha^5-\alpha$

v) $5(x+y)^2-20(2x-y)^2$

7. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

i) $(x-1)^2(\alpha-2\beta)-\alpha+2\beta$

ii) $(x-3)(x^2-4)-(x+2)(x^2-9)$

iii) $(x^2-4)+(3x-4)(x+2)^2$

iv) x^3-2x^2-x+2

v) $x^3-2x^2-9x+18$

vi) $x^2y^2-9y^2-x^2+9$

vii) $25x^2-y^2-5x+y$

viii) x^3+y^3+x+y

8. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

i) $x-6\sqrt{x}+9,\ x\geq 0$

ii) $2x^2-12x+18$

iii) $4x^3-x^2-4x^4$

iv) $9(2x-y)^2-6x(2x-y)+x^2$

9. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

i) $x^2-2xy+y^2-1$

ii) $\alpha^2+9\beta^2-6\alpha\beta+2(\alpha-3\beta)+1$

iii) $(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2)^2-4\alpha^2\gamma^2$

10. Να δείξετε ότι ισχύουν

i) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

ii) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$

11. Να δείξετε ότι ο αριθμός 753^2-674^2 είναι πολλαπλάσιο του 79

12. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

i) x^2+4x-1

ii) $4x^2-4x-3$

iii) $\alpha^2+3\alpha\beta+2\beta^2$

13. α) Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$, ν' αποδείξετε ότι : $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$

β) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

i. $(3x+2)^3+(1-2x)^3+(-3-x)^3$

ii. $(2x-1)^3+(1-x)^3-x^3$

14. Δίνονται οι παραστάσεις $\mathrm{A}=x(x+3)$ και $B=(x+1)(x+2)$.

i) Να αποδείξετε ότι: $B=A+2$ και $\mathrm{AB}-8=(\mathrm{A}-2)(\mathrm{A}+4)$

ii) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση : $x(x+1)(x+2)(x+3)-8$

15. Να δείξετε ότι η διαφορά $(2x+1)^2-1$ είναι πολλαπλάσιο του 4.

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Ταυτότητα Ευκλείδειας Διαίρεσης : $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$, με $\upsilon < \delta$

Αν έχουμε δυο φυσικούς αριθμούς Δ (διαιρετέος) και δ (διαιρέτης) με $(\delta \neq 0)$ και κάνουμε τη διαίρεση $\Delta : \delta$ τότε βρίσκουμε δυο μοναδικούς φυσικούς αριθμούς π (πηλίκο) και υ (υπόλοιπο) για τους οποίους ισχύει: $\boxed{\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon \text{ με } 0 \leq \upsilon < \delta}$.

Παράδειγμα:

$$\begin{array}{r|l} 450 & 17 \\ \cline{2-2} -34 & 26 \\ \cline{1-1} 110 & \\ -102 & \\ \cline{1-1} 8 & \end{array}$$

Άρα, $450 = 17 \cdot 26 + 8$, $\upsilon = 8$ (<17)

Αν $\upsilon = 0$ τότε $\boxed{\Delta = \delta \cdot \pi}$, οπότε έχουμε **τέλεια διαίρεση**

Π. χ.

$$\begin{array}{r|l} 363 & 3 \\ \cline{2-2} 21 & 87 \\ 0 & \end{array}$$

Στη περίπτωση αυτή λέμε ότι ο **δ διαιρεί τον Δ** ή ότι **ο δ είναι παράγοντας του Δ.**

Άρα, $363 = 3 \cdot 87$, $\upsilon = 0$

Ανάλογα,

Αν έχουμε, δυο πολυώνυμα $\Delta(x)$ (διαιρετέος) και $\delta(x)$ (διαιρέτης) με $\delta(x) \neq 0$ και κάνουμε τη διαίρεση $\Delta(x) : \delta(x)$, τότε βρίσκουμε ένα μοναδικό ζεύγος πολυωνύμων $\pi(x)$ (πηλίκο) και $\upsilon(x)$ (υπόλοιπο) για τα οποία ισχύει: $\boxed{\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x)}$ **Ταυτότητα Ευκλείδειας Διαίρεσης**

όπου το $\upsilon(x)$ ή είναι ίσο με το μηδέν ή **έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του** $\delta(x)$**.**

$$\begin{array}{l|l} \Delta(x) & \delta(x) \\ \cline{2-2} & \pi(x) \\ \upsilon(x) & \end{array}$$

$\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x)$ ή $\Delta(x) = \delta(x)\pi(x)$, αν $\upsilon(x) = 0$

Ακόμα, Βαθμός (Διαιρετέου) = βαθμός (διαιρέτη) + βαθμός (πηλίκου)

Παράδειγμα: Να γίνει η διαίρεση του πολυωνύμου ($4x^3-4x^2-x+3$) διά τού ($2x-1$)

δηλ. ($4x^3-4x^2-x+3$): ($2x-1$).

$$\begin{array}{r|l} 4x^3-4x^2-x+3 & 2x-1 \\ \hline -4x^3+2x^2 & 2x^2-x-1 \\ \hline -2x^2-x+3 & \\ 2x^2-x & \\ \hline -2x+3 & \\ 2x-1 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

Ώστε: $4x^3-4x^2-x+3=(2x-1)(2x^2-x-1)+2$

Παράδειγμα: Να γίνει η διαίρεση του πολυωνύμου : (x^3-7x+6) *διά τού* $(x-2)$

$$\begin{array}{r|l} x^3+0x^2-7x+6 & x-2 \\ \hline -x^3+2x^2 & x^2+2x-3 \\ \hline 2x^2-7x+6 & \\ -2x^2+4x & \\ \hline -3x+6 & \\ 3x-6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

(Συμπληρώνω τους όρους που λείπουν βάζοντας συντελεστή 0)

Παρατήρηση: Επειδή το υπόλοιπο της διαίρεσης $\upsilon(x)=0$, η διαίρεση είναι τέλεια. Άρα, το $x-2$ είναι παράγοντας του x^3-7x+6. Είναι δηλαδή,

$$x^3-7x+6=(x-2)(x^2+2x-3)=(x-2)(x+3)(x-1)$$

Άρα, η τέλεια διαίρεση είναι μια παραγοντοποίηση!!!!

Στη περίπτωση της τέλειας διαίρεσης τα $\delta(x)$ και $\pi(x)$ λέγονται παράγοντες ή διαιρέτες του $\Delta(x)$, ενώ το $\Delta(x)$ λέγεται πολλαπλάσιο του $\delta(x)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

Βαθμός Διαιρετέου	Βαθμός διαιρέτη	Βαθμός πηλίκου
6	4	
	5	3
2	2	

2. Να κάνετε τις διαιρέσεις και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης

   i) $(4x^3 - 4x^2 - x + 3) : (2x - 1)$

   ii) $(x^3 - 7x + 6) : (x - 2)$

   iii) $(3x^2 - 2x + 5) : (x - 2)$

   iv) $(6x^2 - 7x - 3) : (2x - 1)$

   v) $(2x^3 - x + 1) : (2x^2 - 3)$

3. Να βρείτε το πολυώνυμο το οποίο διαιρούμενο με το $2x^2 - x + 1$ δίνει πηλίκο $2x - 1$και υπόλοιπο $3x - 2$

4. Να βρείτε το πολυώνυμο το οποίο διαιρούμενο με το $x^2 + 3$ δίνει πηλίκο $3x - 1$και υπόλοιπο $x - 3$

5. Να κάνετε τη διαίρεση $(2x^3 + \lambda) : (x - 2)$ και να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η διαίρεση είναι τέλεια.

6. Να κάνετε τη διαίρεση $(2x^3 - \lambda) : (x + 1)$ και να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η διαίρεση είναι τέλεια.

7.
   i) Να κάνετε τη διαίρεση $(x^3 - 6x + 5) : (x - 1)$

   ii) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $x^3 - 6x + 5$

8.
   i) Να δείξετε ότι το $x + 2$ είναι παράγοντας του $x^3 - 6x - 4$

   ii) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $x^3 - 6x - 4$

Ε. Κ. Π & Μ. Κ. Δ. ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

- **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε. Κ. Π.)** δυο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων : ονομάζεται το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.
- **Μέγιστος κοινός διαιρέτης (Μ. Κ. Δ)** δυο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων: ονομάζεται το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μικρότερο από τους εκθέτες του.

Παρατήρηση: Η εύρεση του Ε. Κ. Π. και του Μ. Κ. Δ δυο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων είναι ανάλογη με την εύρεση του Ε. Κ. Π. και του Μ. Κ. Δ δυο ή περισσοτέρων θετικών ακέραιων αριθμών.

Έτσι,

Ε. Κ. Π. (300, 80, 240) = Ε. Κ. Π. ($2^2 \cdot 3 \cdot 5^2,\ \ 2^4 \cdot 5,\ \ 2^4 \cdot 3 \cdot 5$) = $2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 = 1200$

Μ. Κ. Δ. (300, 80, 240) = Μ. Κ. Δ. ($2^2 \cdot 3 \cdot 5^2,\ \ 2^4 \cdot 5,\ \ 2^4 \cdot 3 \cdot 5$) = $2^2 \cdot 5 = 20$

Βήματα : Για να βρούμε το Ε. Κ. Π. και το Μ. Κ. Δ. πολυωνύμων

- Αναλύουμε τα πολυώνυμα σε γινόμενο πρώτων παραγόντων
- Υπολογίζουμε το Ε. Κ. Π. και Μ. Κ. Δ. των αριθμητικών παραγόντων τους.
- Εφαρμόζουμε τους ορισμούς για το Ε. Κ. Π. και το Μ. Κ. Δ. των πολυωνύμων

Παραδείγματα

- Ε. Κ. Π. ($3\alpha^2 xy^3,\ 4\alpha x^2 y^2,\ \ 6a^3 x$) $= 12 \cdot a^3 x^2 y^3$ [Ε. Κ. Π. (3, 2^2, $2 \cdot 3$) = $3 \cdot 2^2 = 12$]
- Μ. Κ. Δ. ($3\alpha^2 xy^3,\ \ 4\alpha x^2 y^2,\ \ 6a^3 x$) $= a^2 xy$ [Μ. Κ. Δ. (3, 2^2, $2 \cdot 3$) = 1]
- Ε. Κ. Π. [$2(x-1)(x+1),\ \ 3(x-1)^3,\ \ 5(x-1)^2$] = $30(x-1)^3(x+1)$ [Ε. Κ. Π. (2, 3, 5) = 30]
- Μ. Κ. Δ. [$2(x-1)(x+1),\ \ 3(x-1)^3,\ \ 5(x-1)^2$] = $(x-1)$ [Μ. Κ. Δ. (2, 3, 5) = 1]

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να συμπληρώσετε το παρακάτω πίνακα γράφοντας σε κάθε κενό το Ε. Κ. Π. των παραστάσεων Α και Β.

A \ B	$2x^2y^3$	xyz	$3z$
$6x^3y$			
$8x^2yz^2$			
x^4z			

2. Να συμπληρώσετε το παρακάτω πίνακα γράφοντας σε κάθε κενό το Μ. Κ. Δ. των παραστάσεων Α και Β.

A \ B	$2x^2y^3$	xyz	$3z$
$6x^3y$			
$8x^2yz^2$			
x^4z			

3. Να βρεθεί το Ε. Κ. Π. και ο Μ. Κ. Δ. των παρακάτω παραστάσεων

i) $8x^3$, $12x^2$

ii) $2x^4$, $6x^3$

iii) $4x^2y^2$, $5xy^3$

iv) $3\alpha^2xy^3$, $4\alpha x^2y^2$, $6\alpha^3x$

v) $5x+5y$, $x^2+2xy+y^2$, x^2-y^2

vi) x^2-1, x^3-1, x^2+x-2

vii) $5\alpha^4-5\alpha$, $3\alpha^2-6\alpha+3$, $\alpha^2-5\alpha+6$

viii) x^2+3x+2, x^3+1

ix) x^3-9x, $x^2y-6xy+9y$, x^3-27

ΡΗΤΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Ρητή αλγεβρική παράσταση ή απλώς ρητή λέγεται μια αλγεβρική παράσταση που έχει στο παρανομαστή μεταβλητές.

Παράδειγμα

- $\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2+x-5}+\frac{3x+2}{5}$ είναι ρητή
- $\frac{x^2+2}{5}+\frac{x^2-3xy+\alpha}{9}+\frac{\beta}{3}$ δεν είναι ρητή (είναι ακεραία)

Προσοχή!!! Οι μεταβλητές μιας ρητής παράστασης δεν μπορούν να πάρουν τιμές που μηδενίζουν τον παρανομαστή της, αφού δεν ορίζεται κλάσμα με παρανομαστή 0.

Π. χ. $\frac{3}{x+2}$ δεν ορίζεται για $x=-2$

Πράξεις

1. **Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση** (όπως στα κλάσματα)

i) $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$

ii) $\alpha\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha\beta}{\gamma}$

iii) $\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$

Παραδείγματα

i) $\frac{x}{x+2}\cdot\frac{x-1}{x+1}=\frac{x(x-1)}{(x+2)(x+1)}=\frac{x^2-x}{x^2+3x+2}$

ii) $3x\frac{x+1}{x^2+3}=\frac{3x(x+1)}{x^2+3}$

iii) $\frac{x+2}{x+3}:\frac{x-3}{x-2}=\frac{x+2}{x+3}\cdot\frac{x-2}{x-3}=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-3)}=\frac{x^2-4}{x^2-9}$

2. Απλοποίηση

Για να απλοποιήσουμε ένα κλάσμα πρέπει και ο αριθμητής και ο παρανομαστής να είναι παραγοντοποιημένοι.

Παράδειγμα:

$$\frac{x^2-9}{x+3}=\frac{(x-3)(x+3)}{x+3}=x-3, \quad \frac{x-1}{x^2-2x+1}=\frac{x-1}{(x-1)^2}=\frac{1}{x-1}$$

Προσοχή!!!

$$\frac{\cancel{\alpha}\cdot\cancel{\beta}\cdot\gamma}{\cancel{\alpha}\cdot\cancel{\beta}}=\gamma \text{ Σωστό}, \quad \frac{\cancel{\alpha}+\cancel{\beta}+\gamma}{\cancel{\alpha}+\cancel{\beta}}=\gamma \text{ Λάθος}, \quad \frac{\cancel{\alpha}x}{\cancel{\alpha}y+\beta}=\frac{x}{y+\beta} \text{ Λάθος}$$

3. Μετατροπή Σύνθετου κλάσματος σε απλό

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}=\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma} \quad \textbf{Π. χ.} \quad \frac{\frac{3x+1}{x-2}}{\frac{x^2+1}{x}}=\frac{(3x+1)x}{(x-2)(x^2+1)}$$

4. Πρόσθεση – Αφαίρεση ρητών παραστάσεων

Για να μπορούμε να κάνουμε πρόσθεση ρητών παραστάσεων πρέπει να κάνουμε ομώνυμα τα κλάσματα, δηλαδή να βρούμε το Ε. Κ. Π. των παρανομαστών.

► Όπως μάθαμε, **(Ε. Κ. Π.)** δυο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων, που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, είναι το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.

Παράδειγμα

Να εκτελέσετε την πράξη : $\frac{3}{x-y}+\frac{2x+1}{x^2-y^2}+\frac{5}{x+y}$

Λύση

Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π. των παρανομαστών $x-y$, x^2-y^2, $x+y$,αφού πρώτα τους παραγοντοποιήσουμε.

Είναι :

$$\left.\begin{aligned} x-y &= x-y \\ x^2-y^2 &= (x-y)(x+y) \\ x+y &= x+y \end{aligned}\right\} \text{Άρα, Ε. Κ. Π.} = (x-y)(x+y)$$

Οπότε,

$$\frac{3}{x-y}+\frac{2x+1}{x^2-y^2}+\frac{5}{x+y}=$$

$$=\frac{3(x+y)}{(x-y)(x+y)}+\frac{2x+1}{(x-y)(x+y)}+\frac{5(x-y)}{(x+y)(x-y)}=$$

$$=\frac{3(x+y)+2x+1+5(x-y)}{(x-y)(x+y)}=$$

$$=\frac{3x+3y+2x+1+5x-5y}{(x-y)(x+y)}=$$

$$=\frac{10x-2y+1}{(x-y)(x+y)}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος

i) $\dfrac{\alpha\beta+\gamma}{\alpha}=\beta+\gamma$

ii) $\dfrac{2x+y}{2x}=y$

iii) $\dfrac{x+3}{y+3}=\dfrac{x}{y}$

iv) $\dfrac{x^2-1}{x}=x-1$

v) $\dfrac{(x-y)^2}{y-x}=-(y-x)$

vi) $\dfrac{3(2-x)}{x-2}=-3$

2. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

1. Το αποτέλεσμα της απλοποίησης της $\dfrac{x^2-y^2}{x(x+y)}$ είναι

Α. $\dfrac{1-y}{x}$ Β. $\dfrac{x-y^2}{x+y}$ Γ. $\dfrac{x-y}{x}$ Δ. $\dfrac{x-y}{x+y}$ Ε. $-y$

2. Η παράσταση $\dfrac{x^2-1}{x^3+x+2x^2}$ ισούται με

Α. $x+1$ Β. $\dfrac{x-1}{x(x+1)}$ Γ. $\dfrac{x+1}{x}$ Δ. $\dfrac{-1}{x^3+x+2x^2}$ Ε. $\dfrac{x}{x+1}$

3. Αν $xy\neq 0$ και $x-y=xy$ τότε το $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$ ισούται με

Α. $\dfrac{1}{xy}$ Β. $\dfrac{1}{x-y}$ Γ. 0 Δ. -1 Ε. $y-x$

4. Αν $y\neq 0$ και $x=\dfrac{1}{y}$ τότε η παράσταση $A=(x-\dfrac{1}{x})(y-\dfrac{1}{y})$ ισούται με

Α. $2x^2$ Β. $2y^2$ Γ. x^2+y^2 Δ. $-x^2-y^2+2$ Ε. $y-\chi$

5. Αν $\alpha\beta\gamma\neq 0$, $\alpha\neq\beta$ και $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{\gamma}$ τότε το γ ισούται με :

Α. $\beta-\alpha$ Β. $\alpha-\beta$ Γ. $\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}$ Δ. $\dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}$ Ε. $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$

6. Αν $x,y\neq 0$ και οι x,y είναι αντίστροφοι μεταξύ τους αριθμοί, τότε η παράσταση $A=(2x-2y):(\dfrac{1}{y}(x-1))$ γράφεται ως έκφραση μόνο του x ως:

Α. $\dfrac{2x^2-2}{x}$ Β. $2\dfrac{x+1}{x}$ Γ. $\dfrac{2(x+1)}{x^2}$ Δ. $2(x+1)$ Ε. $\dfrac{2x}{x+1}$

3. Για ποιες τιμές των μεταβλητών τους ορίζονται οι παρακάτω παραστάσεις

i) $\dfrac{x-3}{3x-5}$

ii) $\dfrac{y}{(y-1)^2}$

iii) $\dfrac{w+1}{w(w+2)}$

iv) $\dfrac{3}{x-2y}$

v) $\dfrac{x+1}{x-2}$

vi) $\dfrac{5}{x(x+1)}$

vii) $\dfrac{x-1}{2x(y-1)^2}$

viii) $\dfrac{x}{x-3y}$

4. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις

1. $\dfrac{2x-4}{x^2-2x}$

2. $\dfrac{x^3-x}{x^2+x}$

3. $\dfrac{x^3-1}{x-1}$

4. $\dfrac{3x^2-2x}{9x^2-4}$

5. $\dfrac{x^3-16x}{x^3-8x^2+16x}$

6. $\dfrac{x^3-3x^2}{x^2-4x+3}$

7. $\dfrac{x^4-16}{x^3-8}$

8. $\dfrac{(x+1)^2-4x^2}{x-x^3}$

9. $\dfrac{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2-\gamma^2}{\alpha^2-\alpha\beta+\alpha\gamma}$

10. $\dfrac{x(x-5)-x^2+25}{x^2-6x+5}$

11. $\dfrac{\dfrac{xy-y^2}{x-y}}{\dfrac{y-x}{xy-x^2}}$

12. $\dfrac{x^3-x+x^2-1}{(x^2+2x+1)^2}$

13. $\dfrac{x^2-4xy+4y^2}{x^2-4y^2}$

14. $\dfrac{x^2-y^2}{x^3+2x^2y+xy^2}$

15. $\dfrac{x^2y}{y^2\omega}\cdot\dfrac{\omega^2y}{x\omega}\cdot\dfrac{y^2}{\omega x^2}$

16. $\dfrac{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta}{3(\alpha+\beta)}$

17. $\dfrac{x^2-9}{x^2+5x+6}\cdot\dfrac{x+2}{x+3}$

18. $\dfrac{x^2-9y^2}{2x^2-12xy+18y^2}$

19. $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-5x+6}$

20. $\dfrac{x-y}{x+y}\cdot\dfrac{x^2+2xy+y^2}{8x-8y}$

21. $\dfrac{(x+2)^2-x-2}{x(x+3)+2}$

5. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις

1. $\frac{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta+2\alpha+2\beta+1}{\alpha^2-1+2\alpha\beta+\beta^2}$
2. $\frac{3\alpha\beta^3+3\alpha^3\beta-6\alpha^2\beta^2}{6\alpha\beta^3-6\alpha^3\beta}$
3. $\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2+2\alpha\beta}{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2-2\alpha\gamma}$
4. $\frac{\alpha x+\alpha y+\beta x+\beta y}{x^2-y^2}$
5. $\frac{x^2-x}{x^2+4x+4}\cdot\frac{x^2+3x+2}{2-x}\cdot\frac{x^2-4}{x^2-1}$
6. $\frac{x^3+ax^2+ax+a-1}{x^3+\beta x^2+\beta x+\beta-1}$

6. Να εκτελέσετε τις πράξεις

1. $3x\cdot\frac{2y}{15x^2}$
2. $\frac{5x^2}{3y^3}\cdot\frac{6y}{10x}$
3. $(4x^2-1)\cdot\frac{x+1}{2x^2-x}$
4. $-\frac{3x}{2y^2}\cdot(-\frac{4y}{9x})$
5. $\frac{x-y}{x+y}\cdot\frac{x^2+2xy+y^2}{8x-8y}$
6. $\frac{x^2-7x}{3x-15}\cdot\frac{x^2-10x+25}{x^2-49}$
7. $(\frac{x}{x+3}:\frac{x-1}{x+3})\cdot\frac{x^2}{x+1}$
8. $(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}):\frac{2x^2}{1-x}$
9. $\frac{1-x^2}{1+x^2}:\frac{5x-5}{3x^2+3}$
10. $(\frac{-3x^2}{4ay}:\frac{-5y}{6a})\frac{4x}{5y^3}$
11. $\frac{3}{x}\cdot\frac{2x+2}{x}:\frac{x^2+2x+1}{x^2}$
12. $\frac{x^2-x}{x^2+4x+4}\cdot\frac{x^2+3x+2}{2-x}\cdot\frac{x^2-4}{x^2-1}$

7. Να εκτελέσετε τις πράξεις

1. $\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^2}$
2. $\frac{1}{2x+6}+\frac{x-1}{3x-x^2}-\frac{x}{x^2-9}$
3. $(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta})\cdot\frac{\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}$
4. $\frac{ax}{a+x}.(\frac{x}{a}-\frac{a}{x})$
5. $\frac{3}{x-3}-\frac{5x+6}{x^2+x-12}$
6. $\frac{4x^2}{x^2-y^2}+\frac{x-y}{x+y}-\frac{x+y}{x-y}$
7. $\frac{5}{2x-4}-\frac{x}{4x+8}-\frac{x+10}{2x^2-8}$
8. $\frac{4a^2}{a^2-b^2}-\frac{a-b}{a+b}-\frac{a+b}{a-b}$

9. $\dfrac{1}{a^2-b^2}+\dfrac{1}{a^2+ab}-\dfrac{1}{2a^2-2ab}$

10. $1-\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{2x}{x^2-4}$

11. $\dfrac{5}{x^2+x}-\dfrac{5}{x^2+2x}+1$

12. $\dfrac{3\alpha\beta^3+3\alpha^3\beta-6\alpha^2\beta^2}{6\alpha\beta^3-6\alpha^3\beta}$

13. $(\dfrac{x}{x+1}+1):(1-\dfrac{3x^2}{1-x^2})$

14. $\dfrac{1-\dfrac{\alpha}{\beta}-\dfrac{\beta}{\alpha}}{\dfrac{\alpha}{\beta^2}+\dfrac{\beta}{\alpha^2}}\cdot(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta})$

8. Να αποδείξετε ότι : $\dfrac{\alpha-\dfrac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}}{1+\dfrac{\alpha(\alpha-\beta)}{1+\alpha\beta}}=\beta$

9. i) Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\alpha^3-1}{\alpha-1}+\alpha=(\alpha+1)^2$

ii) Να υπολογίσετε την παράσταση: $\dfrac{999^3-1}{998}+999$

10. Αν α, β, γ οι πλευρές ενός τριγώνου ΑΒΓ ($\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0$) και ισχύει $\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma}+\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha}+\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta}=0$ να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

11. Να αποδειχθούν οι ταυτότητες:

i) $\dfrac{x}{(x-y)(x-w)}+\dfrac{y}{(y-w)(y-x)}+\dfrac{w}{(w-x)(w-y)}=0$

ii) $\dfrac{a^2}{(a-\beta)(a-\gamma)}+\dfrac{\beta^2}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\dfrac{\gamma^2}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}=1$

iii) $\dfrac{1}{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{1}{\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\dfrac{1}{\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}=\dfrac{1}{\alpha\beta\gamma}$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

1. **Εξίσωση 1^{ου} βαθμού** με άγνωστο το x ονομάζουμε κάθε εξίσωση που είναι ή μπορεί να καταλήξει στη
   μορφή $\boxed{\alpha \cdot x = \beta}$, όπου α, β γνωστοί πραγματικοί αριθμοί. Η μεγαλύτερη δύναμη στην οποία εμφανίζεται το x είναι η πρώτη.
2. **Λύση** ή **ρίζα της εξίσωσης** λέγεται ο αριθμός που επαληθεύει την εξίσωση

<u>Προσοχή:</u> Διαιρούμε με τον συντελεστή τού αγνώστου, όταν αυτός είναι διαφορετικός από το μηδέν.

- **Αδύνατη** λέγεται η εξίσωση που δεν έχει καμία λύση. Η τελική μορφή της είναι $0x = \beta$, με $\beta \neq 0$
- **Ταυτότητα ή αόριστη** λέγεται η εξίσωση που επαληθεύεται για όλες τις τιμές του x. Η τελική της μορφή είναι $0x = 0$.

Άρα,

$\alpha \cdot x = \beta$

Αν $\alpha \neq 0$ τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = \dfrac{\beta}{\alpha}$

Αν $\alpha = 0$ τότε $0x = \beta$, οπότε αν $\begin{cases} \beta \neq 0, & \text{αδυνατη} \\ \beta = 0, & \text{αοριστη η ταυτοτητα} \end{cases}$

<u>Για να λύσουμε μια εξίσωση ακολουθούμε τα εξής βήματα:</u>

- Απαλείφουμε τις παρενθέσεις και τους παρανομαστές, αν υπάρχουν
- Χωρίζουμε τους γνωστούς από τους αγνώστους όρους
- Κάνουμε και στα δυο μέλη αναγωγή ομοίων όρων εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα
- Διαιρούμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το συντελεστή του αγνώστου
- Επαληθεύουμε ή αποφαινόμεθα για το αν είναι «αδύνατη» ή «αόριστη»

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x+1}{2}-\frac{x-2}{6}=x+\frac{1}{3}$

ΛΥΣΗ

$$\frac{x+1}{2}-\frac{x-2}{6}=x+\frac{1}{3}$$

Κάνουμε απαλοιφή παρανομαστών πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη της εξίσωσης με το Ε. Κ. Π. τους, ώστε να προκύψει εξίσωση χωρίς παρανομαστές.

$$6\cdot\frac{x+1}{2}-6\cdot\frac{x-2}{6}=6\cdot x+6\cdot\frac{1}{3}$$

$3(x+1)-(x-2)=6x+2$ Κάνουμε απαλοιφή παρενθέσεων:

$3x+3-x+2=6x+2$ Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους:

$3x-x-6x=-3-2+2$ Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων:

$-4x=-3$ Διαιρούμε με το συντελεστή του x (το -4) & τα δυο μέλη

$$\frac{-4x}{-4}=\frac{-3}{-4}$$

$x=\frac{3}{4}$ (Να κάμετε την επαλήθευση).

2. Να λυθεί η εξίσωση $\frac{2x+1}{4}=\frac{x-1}{3}$

- *Όταν η εξίσωσή μας είναι ισότητα δυο κλασμάτων, όπως η παραπάνω, τότε μπορούμε να κάνουμε την απαλοιφή παρανομαστών πολλαπλασιάζοντας χιαστί τους όρους του κλάσματος*

ΛΥΣΗ

$\frac{2x+1}{4}=\frac{x-1}{3}$ απαλοιφή παρανομαστών (χιαστί):

$3(2x+1)=4(x-1)$ απαλοιφή παρενθέσεων:

$6x+3=4x-4$ χωρισμός γνωστών από αγνώστους:

$6x-4x=-3-4$ αναγωγή ομοίων όρων:

$2x=-7$ διαιρώ με συντελεστή τού x:

$\frac{2x}{2}=\frac{-7}{2}$ και $x=-\frac{7}{2}$. (Να επαληθεύσετε)

3. Να λυθεί η εξίσωση : $3(5x+1)-x=2(7x+4)$

ΛΥΣΗ

$3(5x+1)-x=2(7x+4)$

$15x+3-x=14x+8$

$15x-x-14x=-3+8$

$0x=5$

ΑΔΥΝΑΤΗ

4. Να λυθεί η εξίσωση : $2(2x+1)=4x+2$

ΛΥΣΗ

$2(2x+1)=4x+2$

$4x+2=4x+2$

$4x-4x=-2+2$

$0x=0$

ΑΟΡΙΣΤΗ ή ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

Εξίσωση 2^{ου} βαθμού είναι κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$

Η μεγαλύτερη δύναμη στην οποία εμφανίζεται το x είναι η δεύτερη.

Μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού έχει το πολύ δυο λύσεις (ρίζες).

Η γενική της μορφή χωρίζεται σε τρεις υποπεριπτώσεις:

1. Αν η εξίσωση είναι της μορφής : $\alpha x^2+\beta x=0$, δηλαδή λείπει ο όρος γ (ελλιπής: με γ = 0). Τότε:

Παραγοντοποιούμε και έχουμε :

$\alpha x^2+\beta x=0$ $x(\alpha x+\beta)=0$ $x=0$ ή $\alpha x+\beta=0$ $x=0$ ή $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$, $\alpha\neq 0$	$3x^2+6x=0$ $x(3x+6)=0$ $x=0$ ή $3x+6=0$ $x=0$ ή $x=-2$

2. Αν η εξίσωση είναι της μορφής : $\alpha x^2-\gamma=0$, δηλαδή λείπει ο όρος βx (ελλιπής: με.β = 0). Τότε:

$\alpha x^2-\gamma=0$ ή $\alpha x^2=\gamma$ $x^2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$ & $\sqrt{x^2}=\sqrt{\dfrac{\gamma}{a}}$ ή $\lvert x\rvert=\sqrt{\dfrac{\gamma}{\alpha}}$ Οπότε: Εάν $\dfrac{\gamma}{\alpha}>0$, τότε $x=\pm\sqrt{\dfrac{\gamma}{\alpha}}$ Εάν $\dfrac{\gamma}{\alpha}<0$, τότε είναι αδύνατη	$4x^2-8=0$ $4x^2=8$ $x^2=2$ $x=\pm\sqrt{2}$

3. Αν είναι της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$ Τότε δουλεύουμε ως εξής:

Βρίσκουμε τη διακρίνουσα : $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$

- Αν Δ > 0 έχουμε δυο λύσεις : $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$
- Αν Δ = 0 έχουμε 1 διπλή ρίζα : $x_0=\dfrac{-\beta}{2\alpha}$
- Αν Δ < 0 δεν έχουμε λύσεις : Αδύνατη

Προσοχή!!! Τονίζουμε ότι με τη διακρίνουσα λύνουμε και τις άλλες, (τις ελλιπείς) περιπτώσεις εξισώσεων 2ου βαθμού, οπότε γενικά έχουμε

Διακρίνουσα $\Delta = \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$	Λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$
$\Delta > 0$	2 ρίζες: $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$
$\Delta = 0$	1 Διπλή ρίζα (ή 2 ίσες ρίζες): $x_1 = x_2 = \dfrac{-\beta}{2a}$
$\Delta < 0$	Αδύνατη

Παραδείγματα

1. Να λύσετε την εξίσωση : $x^2 - 4x + 3 = 0$

Είναι α = 1 β = - 4 και γ =3

Άρα η Διακρίνουσα είναι Δ = $\beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0$. Άρα,

η εξίσωση έχει 2 λύσεις τις: $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \dfrac{4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \dfrac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{4+2}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$

2. Να λύσετε την εξίσωση : $2x^2 - 4x + 2 = 0$

Είναι α = 2 και β = - 4 και γ =2

Άρα η διακρίνουσα είναι $\beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16 - 16 = 0$

άρα η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα την $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = \dfrac{4}{2 \cdot 2} = \dfrac{4}{4} = 1$

3. Να λύσετε την εξίσωση : $-x^2 - x - 1 = 0$

Είναι α = -1 και β = -1 και γ = -1

Άρα η διακρίνουσα είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = 1 - 4 = -3 < 0$

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Γνωρίζουμε ότι η παραγοντοποίηση του τριωνύμου της μορφής $x^2+\kappa x+\lambda=0$ γίνεται με τον εξής τρόπο:

Βρίσκουμε ένα ζεύγος αριθμών x_1, x_2 τέτοιο ώστε : $\begin{cases} x_1+x_2=\kappa \\ x_1\cdot x_2=\lambda \end{cases}$ Τότε, $x^2+\kappa x+\lambda=(x+x_1)(x+x_2)$

► Όμως, η μορφή $x^2+\kappa x+\lambda$ είναι ειδική περίπτωση της $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ και η παραγοντοποίηση γίνεται με τον εξής τρόπο:

Βρίσκουμε τις ρίζες της $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ και

- Αν $\Delta>0$: τότε $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$
- Αν $\Delta=0$: τότε $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_0)^2$
- Αν $\Delta<0$: τότε ΔΕΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΕΙΤΑΙ

Παραδείγματα:

1. Να παραγοντοποιηθεί το $2x^2+6x-8$

Λύση

- Βρίσκουμε τις ρίζες της $2x^2+6x-8=0$
- Είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=6^2-4\cdot2\cdot(-8)=36+64=100>0$. Άρα, έχει δυο ρίζες τις:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-6\pm\sqrt{100}}{2\cdot2}=\frac{-6\pm10}{4}=\begin{cases}\frac{-6+10}{4}=1\\ \frac{-6-10}{4}=-4\end{cases}$$ άρα,

- παραγοντοποιείται ως εξής : $2x^2+6x-8=2(x-1)(x+4)$

2. Να παραγοντοποιηθεί το $9x^2-12x+4$

- Βρίσκουμε τις ρίζες της $9x^2-12x+4=0$
- Είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-12)^2-4\cdot9\cdot4=144-144=0$. Άρα, έχει μια διπλή ρίζα την

$$x=-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{-12}{2\cdot9}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$$, οπότε: $9x^2-12x+4=9(x-\frac{2}{3})^2$

3. Να παραγοντοποιηθεί το x^2-x+1

Βρίσκουμε τις ρίζες της x^2-x+1

Είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot1\cdot(1)=1-4=-3<0$, Άρα, δεν παραγοντοποιείται.

Εξισώσεις ανωτέρου βαθμού του 2ου

Μέθοδος

- Φέρνουμε όλους τους όρους της εξίσωσης στο α΄ μέλος, ώστε η εξίσωση να πάρει τη μορφή $P(x)=0$
- Παραγοντοποιούμε το $P(x)$, ώστε η εξίσωση να πάρει τη μορφή $\mathrm{A}(x)\cdot \mathrm{B}(x)\cdot \Gamma(x)=0$, όπου $\mathrm{A}(x)$, $\mathrm{B}(x)$, $\Gamma(x)$,... πρωτοβάθμιοι και δευτεροβάθμιοι παράγοντες
- Λύση : $\mathrm{A}(x)=0$ ή $\mathrm{B}(x)=0$ ή $\Gamma(x)=0$ ή .....

Σημείωση:

- Μια εξίσωση ν βαθμού έχει το πολύ ν λύσεις
- Ισχύει $\alpha^2+\beta^2=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ και $\beta=0$

Παραδείγματα

1. Να λυθεί η εξίσωση : $4x^3+12x^2-7x=0$

Λύση

$4x^3+12x^2-7x=0$

$x(4x^2+12x-7)=0$

$x=0$ ή $x=\dfrac{1}{2}$ ή $x=-\dfrac{7}{2}$

2. Να λυθεί η εξίσωση : $(x+3)^2+(2x-5)^2=0$

Λύση

$(x+3)^2+(2x-5)^2=0$

$x+3=0$ **και** $2x-5=0$

$x=-3$ **και** $x=\dfrac{5}{2}$ ΑΔΥΝΑΤΗ

Προβλήματα εξισώσεων 2^{ου} βαθμού

Προβλήματα, που η λύση τους ανάγεται σε επίλυση μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης ή μιας κλασματικής εξίσωσης ή μιας πρωτοβάθμιας.

Προσοχή!!!! Σε κάθε τέτοια περίπτωση πρέπει να εξετάζεται αν κάποια από τις ρίζες της εξίσωσης δεν είναι λύση του προβλήματος.

Παράδειγμα

Σε ένα τετράγωνο ο αριθμός που εκφράζει το τριπλάσιο εμβαδόν του είναι κατά 15 μεγαλύτερος από τον αριθμό που εκφράζει την περίμετρο του. Πόση είναι η πλευρά του τετραγώνου;

Λύση

Έστω x η πλευρά του τετραγώνου. Τότε έχουμε

$3x^2 = 4x + 15$

$3x^2 - 4x - 15 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4\cdot 3\cdot(-15) = 16 + 180 = 196 > 0$. Άρα, έχει δυο ρίζες, τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{4 \pm \sqrt{196}}{2\cdot 3} = \frac{4 \pm 14}{6} = \begin{cases} \dfrac{4+14}{6} = \dfrac{18}{6} = 3 \\ \dfrac{4-14}{6} = -\dfrac{10}{6} = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

Επειδή, όμως, η πλευρά του τετραγώνου δεν μπορεί να είναι αρνητικός αριθμός η λύση $x_2 = -\frac{5}{3}$ απορρίπτεται.

Δεκτή είναι η λύση $x_1 = 3$.

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Μια εξίσωση λέγεται **κλασματική** αν παρουσιάζεται άγνωστος σε έναν τουλάχιστον παρανομαστή.

►Ο παρανομαστής ενός κλάσματος πρέπει πάντα να είναι διάφορος του μηδενός (0).

Γι' αυτό από τις λύσεις μιας εξίσωσης εξαιρούμε πάντα τις τιμές που μηδενίζουν τους παρανομαστές.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

1) Υπολογίζουμε το Ε. Κ. Π. των παρανομαστών
2) Βρίσκουμε τις τιμές που μηδενίζουν τον παρανομαστή και τις εξαιρούμε
3) Απαλείφουμε τους παρανομαστές πολλαπλασιάζοντας κάθε κλάσμα με το Ε. Κ. Π. και απλοποιώντας τους παρανομαστές.
4) Αφού βρω τις λύσεις ελέγχω αν είναι όλες δεκτές.

Παράδειγμα : Να λυθεί η εξίσωση $\frac{2x-3}{x}+\frac{4}{2x-3}=\frac{6}{2x^2-3x}$

Λύση

1. **Βρίσκω το Ε. Κ. Π.** των παρανομαστών $x,\ 2x-3,\ 2x^2-3x$ αφού τους παραγοντοποιήσω

$2x^2-3x=x(2x-3)$.

Άρα, Ε. Κ. Π. $(x,\ 2x-3,\ 2x^2-3x)$=Ε.Κ.Π. $((x,\ 2x-3,\ x(2x-3))=x(2x-3)$

2. **Περιορισμοί**:

Πρέπει $x(2x-3)\neq 0$, δηλαδή $x\neq 0$ και $2x-3\neq 0$, δηλαδή τελικώς, $x\neq 0$ και $x\neq\frac{3}{2}$

3. **Απαλοιφή παρανομαστών:**

$$x(2x-3)\frac{2x-3}{x}+x(2x-3)\frac{4}{2x-3}=x(2x-3)\frac{6}{x(2x-3)}$$

$(2x-3)^2+4x=6$ ή $(2x-3)^2+4x-6=0$

$(2x-3)^2+2(2x-3)=0$

$(2x-3)(2x-3+2)=0$ ή $(2x-3)(2x-1)=0$

$(2x-3)=0$ ή $(2x-1)=0$ και οι ρίζες τής εξισώσεως είναι:

η $\boxed{x=\frac{3}{2}}$ (η οποία απορρίπτεται από περιορισμούς) και η $\boxed{x=\frac{1}{2}}$. Άρα, δεκτή είναι μόνο η $\boxed{x=\frac{1}{2}}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

a) $4x+3=2x+17$

b) $2(3x+2)-3(4x-7)=5$

c) $2(x+3)-(x-5)=x+7$

d) $3(x+5)-2(4x+3)+(6x-5)=x+4$

e) $x-\frac{2x-1}{3}=\frac{3(x+1)}{4}$

f) $\frac{x-7}{2}-\frac{1}{3}=1+\frac{x+9}{9}$

g) $\frac{4-5x}{12}-\frac{3(x-1)}{2}=2x-6$

h) $\frac{2x-1}{3}-\frac{3x-2}{4}=\frac{5x-4}{6}-\frac{7x+6}{6}$

i) $\frac{1}{3}(x-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}(x+\frac{1}{3})=\frac{x+1}{4}$

2. Να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού λ ώστε η εξίσωση (2λ - 1) x = 5 να είναι αδύνατη.

3. Να βρεθούν οι τιμές των πραγματικών αριθμών μ και λ ώστε η εξίσωση $2\lambda x+\mu=2$ να είναι αόριστη.

4. Να χαρακτηρίσετε ως Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τους παρακάτω ισχυρισμούς

i) Η εξίσωση 3χ = 3 είναι αδύνατη

ii) Η εξίσωση 3χ = 0 είναι αδύνατη

iii) Η εξίσωση λχ = 1 δεν είναι ποτέ αδύνατη

iv) Οι εξισώσεις (λ – 4) χ = 0 και (λ – 3) χ = 0 δεν μπορούν ταυτόχρονα να είναι αόριστες

v) Η εξίσωση 2χ = χ είναι αδύνατη

vi) Η εξίσωση 2χ = 4 έχει λύση το χ = 2.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^2+4=0$

ii) $5x^2-7x=0$

iii) $2\chi^2-8\chi=0$

iv) $x^3-4x=0$

v) $2x^2-32=0$

vi) $3\chi^2-27=0$

vii) $x^2+2=0$

viii) $4x^3-x=0$

ix) $x^2-4x=0$

x) $2x^2=5x(x-3)$

xi) $x(x-1)(x-3)=0$

xii) $(4-8x)(x^2+8x)=0$

xiii) $x^3(x+2)(x-1)^5=0$

ύσετε τις εξισώσεις

i) $x^2-2x+5=0$

ii) $x^2-4x+4=0$

iii) $x^2-13x+36=0$

iv) $x^2-7x+12=0$

v) $x^2-4x+3=0$

vi) $2x^2=x(x+2)+3$

vii) $x^2-6x+9=0$

viii) $3x^2+10x+8=0$

ix) $-2\chi^2+6\chi-4=0$

3. Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες η εξίσωση $2x^2+6x+8-2\lambda=0$ είναι αδύνατη.

4. Να προσδιορίσετε το λ ώστε η εξίσωση $x^2-4\chi+\lambda=0$ να έχει

a) Διπλή ρίζα

b) Να μην έχει πραγματικές ρίζες

5. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές ρίζες

a) $ax^2+bx-a=0$, $\alpha\neq 0$

b) $x^2-3(a+b)x+5ab=0$

6. Για τις διάφορες τιμές του λ να λύσετε τις εξισώσεις:

a) $3x^2+4x+\lambda=0$

b) $\chi^2+\lambda\chi+1=0$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2x^2-5x=x^2-9+x$

ii) $(x-2)^2+x^2=-2$

iii) $(x-1)^2-4(x-1)+3=0$

8. Να βρεθούν δυο αριθμοί με διαφορά 13 και γινόμενο 264.

9. Να βρείτε δυο διαδοχικούς ακεραίους με άθροισμα τετραγώνων 61.

10. Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου έχει περίμετρο 30 m και εμβαδόν $56\,m^2$. Να βρεθούν οι διαστάσεις του.

11. Να βρεθούν δυο αριθμοί με άθροισμα 28 και γινόμενο 192.

12. Να αναλύσετε σε γινόμενα πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα

i) x^2+x-6

ii) $2x^2-x-1$

iii) $6x^2-x-1$

iv) $9(2x+1)^2-(4x-1)^2$

v) $-9x^2+6x-1$

vi) $x^2-7x+12$

vii) $5x^2+x-4$

13. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^4-2x^2+1=0$

ii) $x^4-5x^2+6=0$

iii) $x^3-3x^2+3x-1=0$

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Η εξίσωση $ax^2+b=0$ με $a\neq 0$ έχει λύση όταν οι αριθμοί α, β είναι :

α) Ομόσημοι β) θετικοί γ) αρνητικοί δ) ετερόσημοι ε)οποιοσδήποτε αριθμός

2. Αν η εξίσωση $x^2-2\mu x+4=0$ έχει διπλή ρίζα, τότε η τιμή του μ είναι :

α) μόνο 2 β) μόνο -2 γ) ακαθόριστη δ) 2 ή -2 ε) κανένα από τα προηγούμενα

3. Αν η εξίσωση $x^2+\lambda x+\lambda^2=0$ έχει ρίζες, τότε για τον πραγματικό αριθμό λ ισχύει

α) $\lambda < 0$ β) $\lambda > 0$ γ) $\lambda \geq 1$ δ) $\lambda \neq 0$ ε) $\lambda = 0$

1. Ο αριθμός -1 είναι μια ρίζα της εξίσωσης $x^2-(\mu+3)x+\mu^2+2\mu-14=0$ με μ>0

ο μ ισούται με Α. 5 Β. 3 Γ. 1 Δ. 4 Ε. 2

η άλλη ρίζα της εξίσωσης είναι Α. 6 Β. 5 Γ. 2 Δ. -3 Ε. -6

2. Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις διαδοχικούς ακεραίους είναι 156 cm.

i) Η μικρότερη διάσταση ισούται με: α) 13 β) 12 γ) 11 δ) 8 ε) 24

ii) Η περίμετρός του ισούται με: α) 25 β) 40 γ) 50 δ) 56 ε) 78

3. Ο θετικός ακέραιος του οποίου το τετράγωνο αν αυξηθεί κατά το πενταπλάσιο του αριθμού είναι ίσο με το 50 είναι ο

α) 5 β) 6 γ) 7 δ) 5 ή 10 ε) 10

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. Να λυθούν οι εξισώσεις

i) $(16-x^2)(x^3-x)=0$

ii) $x^2(x-3)(6-x)=0$

iii) $(x-1)^2+x^2-1=0$

iv) $(3x+1)(3x-1)=8$

2. Το άθροισμα ενός αρνητικού ακεραίου αριθμού και του τετραγώνου του είναι ίσο με το διπλάσιο τού επόμενου τού αριθμού. Ποιος είναι ο αριθμός;

3. Αν αυξήσουμε τη μια πλευρά ενός τετραγώνου κατά 5 cm και ελαττώσουμε την άλλη κατά 5 cm προκύπτει ορθογώνιο με εμβαδόν $56\,cm^2$. Να βρείτε το μήκος της πλευράς και το εμβαδόν του τετραγώνου.

Ερωτήσεις τύπου Σωστό ή Λάθος

1) Η εξίσωση $ax^2=b$ με άγνωστο το x, έχει πάντα λύση όταν τα a, b είναι αριθμοί ετερόσημοι.

2) Αν $a\neq 0$ και $b>0$ η εξίσωση $ax^2=b$ με άγνωστο το x έχει πάντα λύση.

3) Αν το 0 είναι ρίζα της εξίσωσης $ax^2+\beta x+\gamma=0$, $a\neq 0$, τότε είναι $\gamma = 0$.

4) Αν $\gamma < 0$ τότε η εξίσωση $x^2+x+\gamma=0$ έχει δυο ρίζες στο $\Re$.

5) Αν $\lambda\neq 0$, τότε η εξίσωση $ax^2-\lambda^2=0, \alpha\neq 0$, έχει δυο ρίζες που είναι αντίθετοι αριθμοί

6) Αν $x^2+x=4x$ τότε είναι $x = 2$ μόνο.

7) Η εξίσωση $ax^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \Re$ είναι πάντοτε 2^{ου} βαθμού.

8) Η εξίσωση $x(x-1)+1=0$ έχει πραγματικές ρίζες.

9) Η εξίσωση $-x^2-3x-1=0$ έχει πραγματικές ρίζες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λυθούν οι εξισώσεις

1) $\frac{3}{x}+\frac{2}{x-1}=\frac{1}{x^2-x}$

2) $\frac{x-2}{2x}-\frac{2}{2-x}-\frac{4}{x^2-2x}=0$

3) $\frac{x}{x-2}+\frac{1}{x^2-2x}-\frac{x-1}{x}=0$

4) $\frac{1}{x}+\frac{1-x}{x+x^2}=\frac{1+x}{x^2-x}-\frac{3}{2x}$

5) $\frac{3}{x+1}-\frac{x^2-7}{x^2-1}=\frac{2}{x-1}$

6) $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2-x}+\frac{2x}{x^2-4}=1$

7) $\frac{x+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}}+\frac{2}{x-\frac{1}{x}}=3$

8) $\frac{1}{\chi-3}+\frac{2}{\chi-1}=0$

9) $\frac{5}{\chi+8}=\frac{1}{\chi-8}$

10) $\frac{2x+1}{3x+x^2}-\frac{4x}{9-x^2}=\frac{4}{x+3}+\frac{2}{x-3}$

11) $\frac{x}{x-1}+\frac{2}{2-x}=\frac{x^2-4x+2}{x^2-3x+2}$

12) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2-x}=\frac{x-6}{x^2-4x+3}$

13) $\frac{x+1}{x^2-x-2}=\frac{2}{x-2}-\frac{2x-1}{2x+2}$

14) $\frac{3}{\omega^2-3\omega-4}=\frac{2\omega+5}{\omega^3+2\omega^2+\omega}+\frac{4}{\omega^2-4\omega}$

ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν
- Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από το μηδέν
- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό αριθμό
- Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha - \beta > 0$ & Αν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha - \beta < 0$
- Αν $\alpha - \beta > 0$ τότε $\alpha > \beta$ & Αν $\alpha - \beta < 0$ τότε $\alpha < \beta$
- Αν $\alpha - \beta = 0$ τότε $\alpha = \beta$
- Αν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ τότε $\alpha + \beta > 0$ ή Αν $\alpha < 0$ και $\beta < 0$ τότε $\alpha + \beta < 0$
- Αν α, β ομόσημοι τότε $\alpha\beta > 0$ και $\frac{\alpha}{\beta} > 0$ &
- Αν α, β ετερόσημοι τότε $\alpha\beta < 0$ και $\frac{\alpha}{\beta} < 0$
- Για κάθε αριθμό α ισχύει $\alpha^2 \geq 0$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$ τότε $\alpha > \gamma$	Αν $\alpha < \beta$ και $\beta < \gamma$ τότε $\alpha < \gamma$
Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$	Αν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$
Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $\alpha\gamma > \beta\gamma$ & $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$	Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $\alpha\gamma < \beta\gamma$ & $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$
Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $\alpha\gamma < \beta\gamma$ & $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$	Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $\alpha\gamma > \beta\gamma$ & $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$
Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$ τότε $\alpha + \gamma < \beta + \delta$	
Αν $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ τότε $\alpha = 0$ και $\beta = 0$	
Για θετικούς αριθμούς α, β, γ, δ ισχύουν Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha\gamma > \beta\delta$ Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$ τότε $\alpha\gamma < \beta\delta$	

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ

Αν θέλουμε να συγκρίνουμε δυο αριθμούς α, β τότε βρίσκουμε τη διαφορά τους $\alpha-\beta$ και εξετάζουμε αν είναι θετική, αρνητική ή μηδέν .

- Αν $\alpha-\beta>0$ τότε $\alpha>\beta$
- Αν $\alpha-\beta<0$ τότε $\alpha<\beta$
- Αν $\alpha-\beta=0$ τότε $\alpha=\beta$

Παράδειγμα

Αν $2<\alpha<\beta$ να συγκρίνετε τους αριθμούς $\alpha^2+2\beta$ και $\alpha\beta+2\alpha$

Λύση

Παίρνουμε τη διαφορά τους:

$\alpha^2+2\beta-(\alpha\beta+2\alpha)=\alpha^2+2\beta-\alpha\beta-2\alpha=\alpha(\alpha-\beta)-2(\alpha-\beta)=(\alpha-\beta)(\alpha-2)$

Εξετάζουμε το πρόσημο της διαφοράς :

Είναι $\alpha<\beta$, άρα $\alpha-\beta<0$ και $2<\alpha$, άρα $2-\alpha<0$ ή $\alpha-2>0$

Άρα, $(\alpha-\beta)(\alpha-2)<0$, οπότε $\alpha^2+2\beta-(\alpha\beta+2\alpha)<0$, δηλαδή $\alpha^2+2\beta<\alpha\beta+2\alpha$

Παράδειγμα

Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y να αποδείξετε ότι : $(x-y)^2\geq -4xy$

Λύση

Για να αποδείξω μια ανισότητα μεταφέρω όλους τους όρους στο πρώτο μέλος, κάνω πράξεις και καταλήγω σε τετράγωνο ή άθροισμα τετραγώνων ή σε κάτι που ισχύει γενικά ή από υπόθεση.

$(x-y)^2\geq -4xy \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2+4xy\geq 0 \Leftrightarrow x^2+2xy+y^2\geq 0 \Leftrightarrow (x+y)^2\geq 0$. Ισχύει.

Παράδειγμα

Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y να αποδείξετε ότι : $x^2+y^2\geq 2x-1$

Λύση

$x^2+y^2\geq 2x-1$ ή $x^2+y^2-2x+1\geq 0$ ή

$x^2-2x+1+y^2\geq 0$ ή $(x-1)^2+y^2\geq 0$. Ισχύει.

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Για την ανίσωση $\alpha x > \beta$ έχουμε:

- Αν $\alpha > 0$, τότε $x > \frac{\beta}{\alpha}$
- Αν $\alpha < 0$, τότε $x < \frac{\beta}{\alpha}$
- Αν $\alpha = 0$, τότε $0 \cdot x > \beta$, οπότε
  - Αν $\beta \geq 0$, είναι αδύνατη
  - Αν $\beta < 0$, αληθεύει για κάθε τιμή του x

Για να επιλύσουμε μια ανίσωση

1. Βρίσκουμε το Ε. Κ. Π. των παρανομαστών και πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους της ανίσωσης με το Ε. Κ. Π.
2. Απαλείφουμε τους παρανομαστές
3. Κάνουμε τις πράξεις
4. Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους όρους
5. Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων και φέρνουμε την ανίσωση στη μορφή $\alpha x > \beta$ ή $\alpha x < \beta$
6. Αν $\alpha < 0$ (δηλαδή συντελεστής τού x είναι αρνητικός), τότε αλλάζουμε φορά της ανίσωσης:

   $\alpha x > \beta$, *οπότε* $x < \frac{\beta}{\alpha}$ *ή* $\alpha x < \beta$, *οπότε* $x > \frac{\beta}{\alpha}$ ενώ
7. Αν $\alpha > 0$ (δηλαδή συντελεστής τού x είναι θετικός), τότε έχουμε:

   $\alpha x > \beta$, οπότε $x > \frac{\beta}{\alpha}$ *ή* $\alpha x < \beta$, οπότε $x < \frac{\beta}{\alpha}$.

Παράδειγμα

Να λύσετε την ανίσωση $1-\frac{2x-1}{6}<\frac{x-2}{3}-\frac{x}{2}$

Λύση

$1-\frac{2x-1}{6}<\frac{x-2}{3}-\frac{x}{2}$ ή

$6\cdot 1-\cancel{6}\cdot\frac{2x-1}{\cancel{6}}<\cancel{6}^{2}\cdot\frac{x-2}{\cancel{3}}-\cancel{6}^{3}\cdot\frac{x}{\cancel{2}}$ ή

$6-(2x-1)<2(x-2)-3x$ ή

$6-2x+1<2x-4-3x$ ή

$-2x-2x+3x<-6-1-4$ ή

$-x<-11$ ή

$x>11$

Παράδειγμα

Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων $\begin{cases}3x-2>2x-1\\5x-1<7x-5\end{cases}$

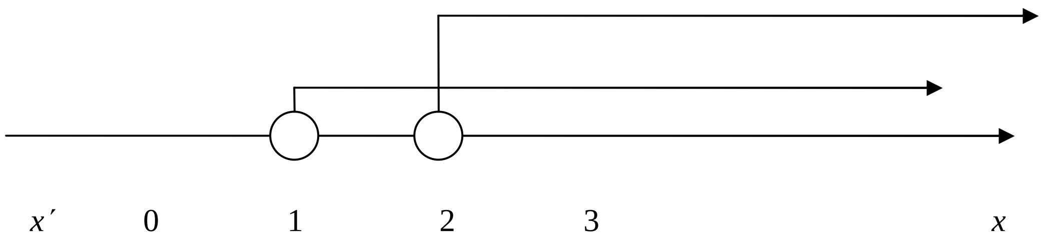
Λύση

Λύνω κάθε ανίσωση χωριστά

$3x-2>2x-1$ ή $3x-2x>-1+2$ ή $\boxed{x>1}$

$5x-1<7x-5$ ή $5x-7x<-5+1$ ή $-2x<-4$ ή $x>\frac{-4}{-2}$ ή $\boxed{x>2}$

Τοποθετώ τους αριθμούς πάνω στον άξονα και βρίσκω που συναληθεύουν:



$x>2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδείξετε ότι :

i) $a^2 + 4 \geq 4a$

ii) $(a+b)^2 + 2ab \geq -3b^2$

iii) $3a^2 + 2a + 1 \geq 0$

iv) $a^2 - 6a + 10 > 0$

v) $a^2 + b^2 + 8 \geq 4(a+b)$

2. Αν $\alpha < \beta$ να αποδείξετε ότι :

i) $2\alpha - 1 < 2\beta - 1$

ii) $1 - 3\alpha > 1 - 3\beta$

iii) $\alpha < \dfrac{2\alpha + \beta}{3}$

iv) $\dfrac{\alpha + 2\beta}{3} < \beta$

3. Να λύσετε τις ανισώσεις

i) $7x - 3 < 10x + 15$

ii) $3(x-2) - 2(3x+1) > 3x - 2(x+3)$

iii) $\dfrac{3x-1}{5} - \dfrac{x+2}{3} > \dfrac{4-3x}{5} - \dfrac{2-3x}{15}$

iv) $\dfrac{x-5}{9} - \dfrac{3x+1}{2} \leq \dfrac{4-3x}{3} - \dfrac{x+3}{6}$

v) $\dfrac{3(x-1)}{4} - \dfrac{2(x+3)}{3} > \dfrac{4(3-x)}{3} - \dfrac{x+2}{6}$

vi) $\dfrac{3x-5}{4} - \dfrac{2(4-x)}{5} \leq \dfrac{7(x+3)}{2} - \dfrac{x+3}{10}$

4. Αν $3 \leq x \leq 4$ και $5 \leq y \leq 7$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμίας από τις παραστάσεις:

i) $x + 4$ ii) $2x$ iii) $-x$ iv) $x + y$ v) $3x - 4y$

5. Αν $-1 < x < 2$ και $0 < y < 1$ να αποδείξετε ότι

i) $-1 < x + y < 3$

ii) $-3 < 3x + y < 7$

iii) $-2 < x - y < 2$

6. Αν $x > 3$ και $y > 2$ να αποδείξετε ότι

i) $x \cdot y > 6$

ii) $(x-2)y > 2$

iii) $(x-3)(y-2) > 0$

iv) $(x-1)(y+1) > 6$

7. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων

i) $\begin{cases} 3x-2 > 2x-1 \\ 5x-1 < 7x-5 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} 5x-1 > 4x-2 \\ 2x+5 > 5x+1 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} 1-\dfrac{3(x-1)}{2} < x-\dfrac{5(x-2)}{6} \\ 1-\dfrac{(2-x)}{2} > \dfrac{2(x-1)}{3} \end{cases}$

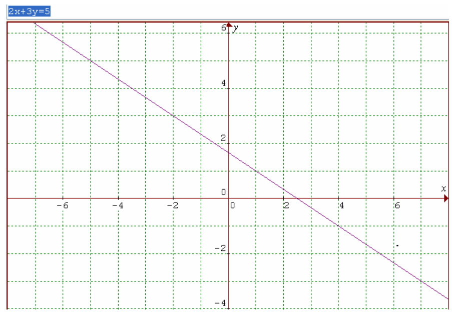
8. Αν $1 < x < y$ να συγκρίνετε τους αριθμούς $x^2 + y$ και $x + xy$

9. Αν $1 < x < 2$ να συγκρίνετε τους αριθμούς x^3 και $2x^2 + x - 2$

10. Αν $\alpha < -2$ και $\beta > -1$ να συγκρίνετε τους αριθμούς $\alpha\beta + 2$ και $-\alpha - 2\beta$

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

1. Ονομάζουμε **γραμμική εξίσωση ή εξίσωση πρώτου βαθμού** με δυο αγνώστους x και y κάθε εξίσωση της μορφής $\boxed{\alpha x+\beta y=\gamma}$, όπου α, β, γ γνωστοί πραγματικοί αριθμοί. Οι x, y είναι υψωμένοι στη πρώτη δύναμη.



2. **Λύση** μιας τέτοιας εξίσωσης είναι κάθε ζεύγος (x, y) που την επαληθεύει.

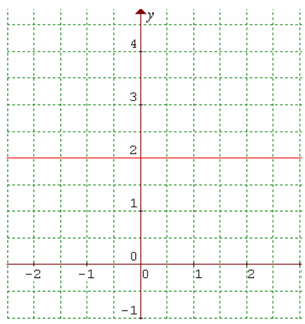
3. Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x+\beta y=\gamma$ έχει άπειρες λύσεις που είναι διατεταγμένα ζεύγη με πρώτο στοιχείο μια τιμή του x και δεύτερο στοιχείο μια τιμή του y, που επαληθεύουν την εξίσωση. Τα ζεύγη αυτά σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων ανήκουν σε μια ευθεία.

Ειδικές Περιπτώσεις

➲ Η εξίσωση $\boxed{y=\kappa}$ $(\alpha x+\beta y=\gamma, \quad \alpha=0)$

Η εξίσωση $y=\kappa$ με $\kappa \neq 0$ παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,\kappa)$ Π. χ. $y=2$ $(0x+2y=4)$

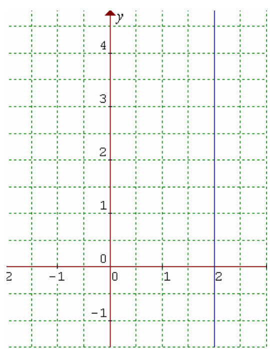
■ Αν $\kappa=0$ τότε η εξίσωση $y=0$ παριστάνει τον άξονα $x'x$



➲ Η εξίσωση $\boxed{x=\kappa}$ $(\alpha x+\beta y=\gamma, \quad \beta=0)$

Η εξίσωση $x=\kappa$ με $\kappa \neq 0$ παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(\kappa,0)$. Π. χ. $x=2$ $(4x+0y=8)$

■ Αν $\kappa=0$ τότε η εξίσωση $x=0$ παριστάνει τον άξονα $y'y$.



ΠΑΡΑΤΗΡΉΣΕΙΣ

- **Αδύνατη εξίσωση**: $0x+0y=\gamma,\ \gamma\neq 0$. Δεν την επαληθεύει κανένα ζεύγος (x,y). Δεν παριστάνει ευθεία.
- **Αόριστη εξίσωση**: $0x+0y=0$. Επαληθεύεται για κάθε ζεύγος (x,y). Δεν παριστάνει ευθεία.

- Για να βρω τα **σημεία τομής** της $\alpha x+\beta y=\gamma$ **με τον άξονα** $x'x$**:**
  - Θέτω όπου $y=0$, οπότε έχουμε: $\alpha x=\gamma$ ή $x=\dfrac{\gamma}{\alpha}$, $\alpha\neq 0$
- Για να βρω τα **σημεία τομής** της $\alpha x+\beta y=\gamma$ **με τον άξονα** $y'y$
  - Θέτω όπου $x=0$ οπότε έχουμε: $\beta y=\gamma$ ή $y=\dfrac{\gamma}{\beta}$, $\beta\neq 0$
- **Για να σχεδιάσουμε μια ευθεία** αρκεί να βρω δυο σημεία που την επαληθεύουν, καθώς γνωρίζω ότι από δυο σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία. Συνήθως διαλέγω τα σημεία τομής με τους άξονες.

- Μια ευθεία της μορφής $\alpha x+\beta y=\gamma$ **διέρχεται από την αρχή των αξόνων:** αν $\gamma=0$

- Μια ευθεία της μορφής $\alpha x+\beta y=\gamma$ είναι **παράλληλη προς τον άξονα** $x'x$**:** αν $\alpha=0$, ενώ
- Μια ευθεία της μορφής $\alpha x+\beta y=\gamma$ είναι **παράλληλη προς τον άξονα** $y'y$**:** αν $\beta=0$

- Δυο ευθείες της μορφής $y=\alpha_1 x+\beta_1$ και $y=\alpha_2 x+\beta_2$ είναι
  - Παράλληλες όταν : $\alpha_1=\alpha_2$
  - Κάθετες όταν : $\alpha_1\cdot\alpha_2=-1$

- Αν η ευθεία $\alpha x+\beta y=\gamma$ με $\alpha,\beta,\gamma\neq 0$ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $\mathrm{A}(\kappa,0)$, & $\mathrm{B}(0,\lambda)$ αντιστοίχως, τότε το **εμβαδόν Ε του τριγώνου** ΟΑΒ είναι: $\mathrm{E}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}=\dfrac{1}{2}|\kappa|\cdot|\lambda|$.

Παράδειγμα

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: 2x-3y=6$

1. Να σχεδιάσετε την ευθεία
2. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία ε με τους άξονες

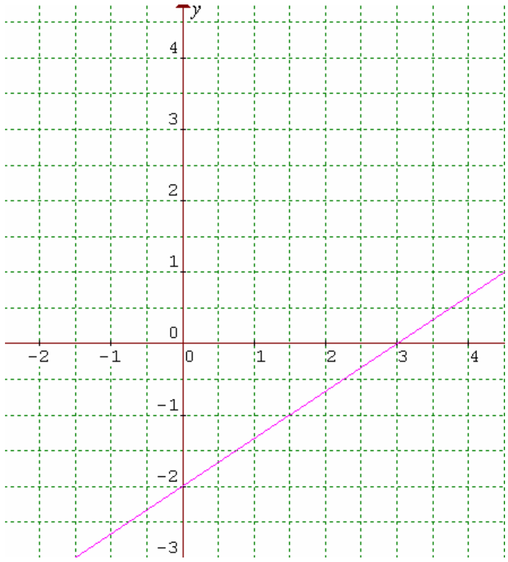
Λύση

1. Για να σχεδιάσουμε την ευθεία $\varepsilon: 2x-3y=6$ αρκεί να βρούμε δυο σημεία της

Για $x=0$ έχουμε : $-3y=6$ ή $y=-2$ (σημείο τομής με $y'y$)

Για $y=0$ έχουμε : $2x=6$ ή $x=3$ (σημείο τομής με $x'x$)

Άρα, η ευθεία διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(0,-2)$ και $\mathrm{B}(3, 0)$



2. Το τρίγωνο που σχηματίζει η ευθεία με τους άξονες είναι το ΟΑΒ

και έχει εμβαδόν $\mathrm{E}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}=\frac{1}{2}|-2|\cdot|3|=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=3$

Παράδειγμα

Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η ευθεία $\varepsilon:(\lambda+1)x+(\lambda-3)y=8$ να είναι

1. Παράλληλη στον άξονα $x'x$
2. Παράλληλη στον άξονα $y'y$

Λύση

1. Για να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$: πρέπει $\lambda+1=0$ ή $\lambda=-1$

Για $\lambda=-1$ έχουμε $(-1-3)y=8$ ή $-4y=8$ ή $y=-2$

Άρα, $\varepsilon: y=-2$

2. Για να είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ **: πρέπει** $\lambda-3=0$ ή $\lambda=3$

Για $\lambda=3$ έχουμε $(3+1)x=8$ ή $4x=8$ ή $x=2$

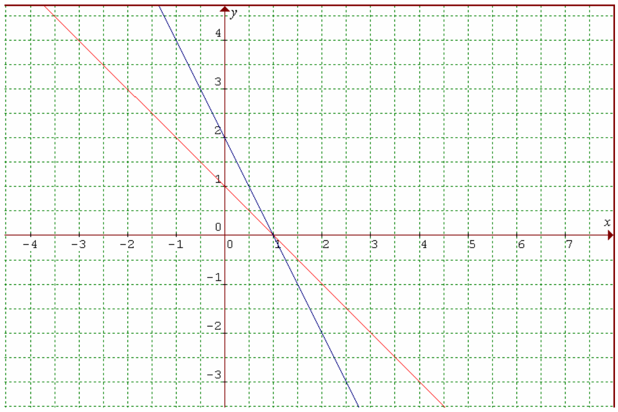
Άρα, $\varepsilon: x=2$

ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Παραδείγματα

1. Να λυθεί γραφικά το σύστημα

$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+y=2 \end{cases}$ Σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες

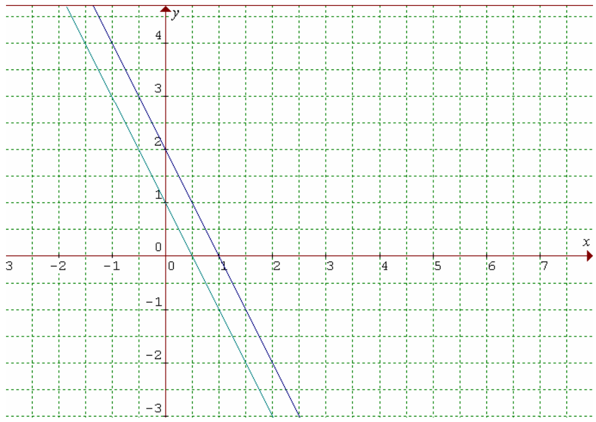


y = 1- x και y = -2x + 2

- Παρατηρούμε ότι τέμνονται στο σημείο Α(1, 0). Άρα, για x = 1 και y = 0 επαληθεύονται και οι 2 εξισώσεις. Άρα, το **σύστημα έχει μία λύση**

2. Να λυθεί γραφικά το σύστημα

$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 6x+3y=6 \end{cases}$ Σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες

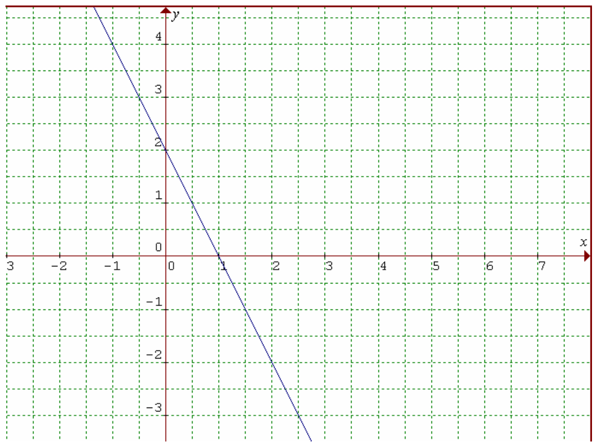


y = -2x + 1 και y = -2x + 2

- Παρατηρούμε ότι είναι παράλληλες, δηλαδή δεν τέμνονται. Άρα, το **σύστημα είναι αδύνατο.**

3. Να λυθεί γραφικά το σύστημα

$\begin{cases} 2x+y=2 \\ 4x+2y=4 \end{cases}$ Σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες



y = -2x + 2 και y = -2x + 2

- Παρατηρούμε ότι ταυτίζονται άρα το **σύστημα είναι αόριστο.**

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

1. ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Για να λύσουμε ένα σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης :

i. Λύνουμε τη μια από τις εξισώσεις ως προς τον ένα άγνωστο, έστω τον y.

ii. Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος την τιμή τού y που βρήκαμε και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει, οπότε βρίσκουμε το x.

iii. Την τιμή αυτή του x αντικαθιστούμε στην έκφραση του y που βρήκαμε στο $1^{ο}$ βήμα της εργασίας αυτής και έπειτα υπολογίζουμε την τιμή του x.

Παράδειγμα : Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 4x + 3y = 24 \end{cases}$

Λύση

$$\begin{cases} 2x + y = 10 & (1) \\ 4x + 3y = 24 & (2) \end{cases}$$

i. (1) $2x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - 2x$ (1α) [Λύνω την (1) ως προς y]

ii. (2) $\overset{(1\alpha)}{\Rightarrow} 4x + 3(10 - 2x) = 24 \Leftrightarrow 4x + 30 - 6x = 24 \Leftrightarrow x = 3$ [αντικαθιστώ το y στην (2)]

iii. (1α)$\overset{x=3}{\Rightarrow} y = 10 - 2 \cdot 3 = 10 - 6 = 4 \Leftrightarrow y = 4$ [αντικαθιστώ το x στην έκφραση του y]

Άρα, η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x,\ y) = (3,\ 4)$

2. ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΤΙΘΕΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

Για να λύσουμε ένα σύστημα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών:

i. Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της πρώτης εξίσωσης επί ένα αριθμό κ και τα μέλη της δεύτερης εξίσωσης επί ένα αριθμό λ διαλέγοντας τα κ και λ έτσι ώστε στις εξισώσεις που προκύπτουν οι συντελεστές σε ένα από τους αγνώστους να είναι αντίθετοι.

ii. Προσθέτουμε κατά μέλη τις δυο νέες εξισώσεις, οπότε εξαλείφεται ο άγνωστος με τους αντίθετους συντελεστές και προσδιορίζεται ο άλλος άγνωστος.

iii. Βρίσκουμε τον άλλο άγνωστο με αντικατάσταση σε μια από τις εξισώσεις του αρχικού συστήματος.

Παράδειγμα: Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} 3x - y = 23 \\ 4x + 3y = 48 \end{cases}$

Λύση

$$\begin{cases} 3x - y = 23 & (1) \\ 4x + 3y = 48 & (2) \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 9x - 3y = 69 \\ 4x + 3y = 48 \end{cases} \overset{\oplus}{\Leftrightarrow}$$

(πρόσθεση κατά μέλη)

$$13x + 0y = 117 \Leftrightarrow x = \frac{117}{13} \Leftrightarrow x = 9$$

Αντικαθιστώ την τιμή $x = 9$ στην (1) $3x - y = 23$ και έχω $3 \cdot 9 - y = 23 \Leftrightarrow y = 4$.

Άρα, η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x,\ y) = (9,\ 4)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λυθούν γραφικά τα παρακάτω συστήματα

a) $\begin{cases} x+y=2 \\ x=y \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 4x-y=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+3y=-6 \\ 4x+6y=12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+3y=6 \\ 4x+6y=12 \end{cases}$

2. Ποια από τα παρακάτω συστήματα είναι αδύνατα ή αόριστα.

a) $\begin{cases} x+y=2 \\ 3x+3y=5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x-2y=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+5y=7 \\ 4x+10y=14 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y=x \\ y=x+2 \end{cases}$

3. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.

a) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 3x+4y=10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+2y=7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+2y=7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ -4x+2y=5 \end{cases}$

4. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

a) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ x-y=-4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 5x-y=12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+3y=10 \\ 3x-y=4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-y=2 \\ -4x+2y=-4 \end{cases}$

5. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα

a) $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 0.6x+0.4y=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2+y^2=34 \\ x+y=8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2+y=10 \\ 2x-y=5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2+y=1 \\ x*y=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x+5y=-9 \\ -\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=-2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \frac{x-1}{3}+\frac{y-2}{6}=\frac{1}{2} \\ x+y=2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \frac{3x+y}{2}-\frac{x-3y}{3}=-3 \\ \frac{x-1}{3}+\frac{1-4y}{27}=0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} \frac{x+1}{3}+\frac{y-2}{6}=\frac{1}{2} \\ \frac{x-1}{4}+\frac{y}{3}=\frac{1}{3} \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2\frac{x-3}{2}-3\frac{3-y}{2}=2-\frac{x-y-1}{6} \\ 3-\frac{x+3}{4}=2-\frac{4-y}{8} \end{cases}$

6. Να βρείτε δυο αριθμούς με άθροισμα 30 και που αν διαιρέσουμε το μεγάλο δια τού μικρού θα βρούμε πηλίκο 6 και υπόλοιπο 2.

7. Μια ευθεία διέρχεται από τα σημεία Α(1, 3) και Β(2, -1). Να βρεθεί η εξίσωσή της.

8. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει εμβαδόν 30 cm^2 και ημιπερίμετρο 11. Να βρεθούν οι διαστάσεις του.

9. Σε ένα ξενοδοχείο υπάρχουν δίκλινα και τρίκλινα δωμάτια. Ο αριθμός των τρίκλινων δωματίων είναι κατά 5 μεγαλύτερος από τον αριθμό των δίκλινων. Επίσης, υπάρχουν συνολικά 60 κλίνες. Να βρείτε πόσα είναι τα δίκλινα και πόσα τα τρίκλινα.

10. Στο αγρόκτημα ενός βοσκού υπάρχουν κότες και πρόβατα. Συνολικά τα κεφάλια είναι 50 και τα πόδια 170. Πόσα είναι τα πρόβατα και πόσες οι κότες;

11. Μια ευθεία διέρχεται από τα σημεία Α(-1,1) και Β(2, 4). Να βρεθεί η εξίσωσή της.

12. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα

a) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x + y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 225 \\ x + y = 21 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 125 = 3xy \\ x + y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 20 \\ x + y = 10 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} + \dfrac{y+1}{3} = 5 \\ \dfrac{x+1}{4} + \dfrac{2y+5}{3} = 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 91 \\ x + y = 11 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x^2 - y^2 - xy = 57 \\ x - y = -1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 7(2x - y) + 5(3y - 4x) = 0 \\ 5(y - x - 3) = 6(y - 2x) \end{cases}$

i) $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x + y = 5 \end{cases}$

j) $\begin{cases} xy = 6 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6} \end{cases}$

k) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = \dfrac{1}{5} \end{cases}$

l) $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3} + \dfrac{2y}{6} = 0 \\ 3(x+4) - 4(y-1) = 23 \end{cases}$

m) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 3 \\ x - 4y = 12 \end{cases}$

n) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x = 5(y+1) \end{cases}$

o) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$

p) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 1 \\ 2x - 5y = -2 \end{cases}$

q) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 325 \\ x + y = 25 \end{cases}$

r) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ x - y = 1 \end{cases}$

s) $\begin{cases} 4x + y^2 = 7 \\ 2x - 8y = 11 \end{cases}$

t) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} = 2 - \dfrac{x-y}{3} \\ \dfrac{x-y}{4} + \dfrac{x+y}{3} = 1 \end{cases}$

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστωσαν δυο μεταβλητές x και y. Ονομάζουμε **συνάρτηση** τη διαδικασία κατά την οποία κάθε τιμή του x αντιστοιχίζεται σε μια μόνο τιμή του y. Λέμε η μεταβλητή y εκφράζεται ως συνάρτηση της x.

Π. χ.: $y = 2x$. Σε κάθε τιμή του x αντιστοιχεί μια μόνο τιμή του y.

Στο x βάζω (αυθαίρετα) τιμές

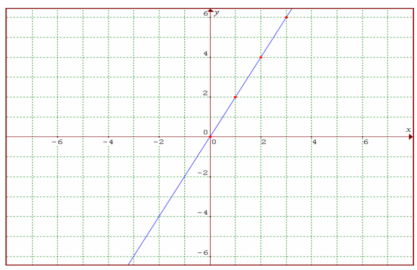
- Αν $x = 2$ τότε $y = 2 \cdot 2 = 4$
- Αν $x = 10$ τότε $y = 2 \cdot 10 = 20$

- Επειδή στο x βάζω όποια τιμή θέλω,η μεταβλητή x λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή.**
- Επειδή η τιμή του y εξαρτάται από την τιμή τής x, η y λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή.**
- **Συμβολισμός:** Συνήθως, τις συναρτήσεις τις συμβολίζουμε με ένα αγγλικό γράμμα f, g κλπ.

  π.χ. $y = f(x) = 2x$
- Η αντιστοιχία μεταξύ των τιμών των μεταβλητών x και y σε μια συνάρτηση φαίνεται καλύτερα με τη βοήθεια ενός **πίνακα τιμών**. Έχουμε,

x	0	1	2	3
$y = f(x) = 2x$	0	2	4	6

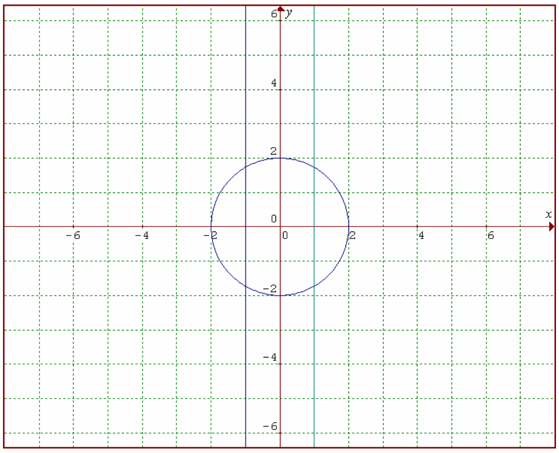
- Τα ζεύγη των τιμών μπορούμε να τα παραστήσουμε σημεία του επιπέδου με τη βοήθεια ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων. Αν αυτό γίνει για όλα τα ζεύγη $(x, y) = (x, f(x))$ των αντίστοιχων τιμών μιας συνάρτησης, τότε το σύνολο των σημείων που βρίσκουμε λέγεται **γραφική παράσταση της συνάρτησης** αυτής. Επειδή όμως αυτό είναι πρακτικά αδύνατο, βρίσκουμε μερικά από αυτά και τα ενώνουμε με μια συνεχή γραμμή.
- Από τον ορισμό της συνάρτησης για κάθε τιμή του x υπάρχει μια μόνο τιμή του y, ενώ σε κάθε τιμή του y μπορεί να αντιστοιχούν περισσότερες τιμές του x. !!



Αυτό σημαίνει:

- Ότι σε ένα πίνακα τιμών δεν μπορεί σε μια τιμή του x να αντιστοιχούν 2 διαφορετικές τιμές του y.
- Ότι αν έχω μια γραφική παράσταση και θέλω να δω αν εκφράζει συνάρτηση, θα πρέπει κάθε ευθεία που θα φέρω παράλληλη στον $y'y$, αυτή να τέμνει την γραφική παράσταση σε 1 μόνο σημείο.

Π. χ. Η παρακάτω γραφική παράσταση δεν εκφράζει συνάρτηση αφού αν φέρω παράλληλη στον $y'y$ τότε αυτή την τέμνει σε 2 σημεία, όπως βλέπουμε.



Ο πίνακας τιμών της είναι

x	-2	-1	-1	0	0	1	1	2
y	0	$-\sqrt{3}$,	$\sqrt{3}$	2	-2	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	0

Παρατηρούμε : στην τιμή $x=1$ αντιστοιχούν δυο τιμές y, οι $y=-\sqrt{3}$ & η $y=\sqrt{3}$.

- **Πεδίο Ορισμού (Π. Ο.) Συνάρτησης**: ονομάζουμε το σύνολο τιμών που μπορεί να πάρει ο x .
    - Π.χ. αν $f(x)=\frac{2}{x}$. Πρέπει $x\neq 0$ άρα, το Π. Ο. της f είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί εκτός από το 0, δηλαδή το $\Re^*$
    - Π.χ. αν $f(x)=\sqrt{x-2}$. Πρέπει $x-2\geq 0$ άρα το Π. Ο. της f είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί x για τους οποίους ισχύει $x\geq 2$, δηλαδή το διάστημα $[2,+\infty)$.

- **Σημεία τομής της f με τον άξονα $x'x$** : τα σημεία αυτά θα έχουν τεταγμένη 0, άρα θέτω όπου y = 0 και βρίσκω τα αντίστοιχα x (λύνοντας εξίσωση ως προς x).
- **Σημείο τομής της f με τον άξονα y΄y :** το σημείο αυτό θα έχει τετμημένη 0 άρα θέτω όπου x = 0 και βρίσκω το f (0). Άρα, το σημείο είναι το (0, f (0))
- **Μέγιστο** : είναι η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει μια συνάρτηση y για μια τιμή του x.
- **Ελάχιστο** : είναι η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει μια συνάρτηση y για μια τιμή του x.

Παράδειγμα : Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 4$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της *f*.

β) Να φτιάξετε ένα πίνακα τιμών της *f*

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση

δ) Να βρείτε τα σημεία τομής της *f* με τους άξονες $x'x$, $y΄y$

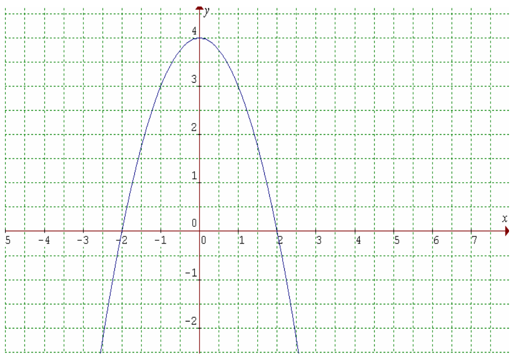
ΛΥΣΗ

α) **Το Π. Ο. της** f είναι όλο το $\Re$ (όλοι οι πραγματικοί αριθμοί)

β) **Πίνακας τιμών** :

x	-2	1	0	1	2
$y = f(x) = -x^2 + 4$	0	3	4	3	0

γ) Γραφική παράσταση



δ) **Σημεία τομής της** f **με τον άξονα** $x'x$: $y = 0$ ή

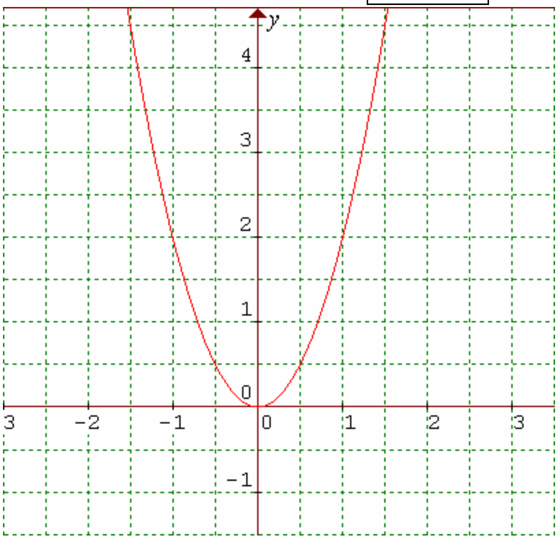
$-x^2 + 4 = 0$ δηλ. $x = 2$ ή $x = -2$ δηλ. τα ζητούμενα σημεία είναι τα (2, 0) και (–2, 0)

Σημείο τομής της f **με τον άξονα y΄y :** για $x = 0$ έχουμε $y = 4$, δηλ. το ζητούμενο σημείο είναι το (0, *f* (0)) = (0, 4)

►Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο για $x = 0$ το $f(0) = 4$

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $y = \alpha x^2$, $a \neq 0$

$\boxed{y = 2x^2}$

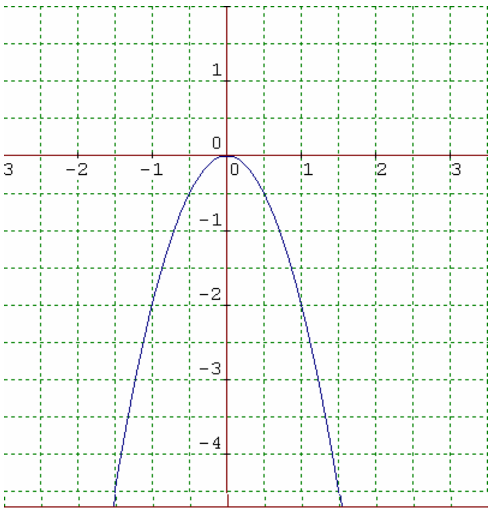


(Αν α > 0)

1) Η γραφική της παράσταση είναι καμπύλη και ονομάζεται **παραβολή.**
2) Παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$, το $f(0)=0$
3) Η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από τον $x'x$.
4) Κορυφή της παραβολής είναι το σημείο Ο(0, 0)
5) Έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$

   (αντίθετα $x \longrightarrow$ ίδιο y)

$\boxed{y = -2x^2}$



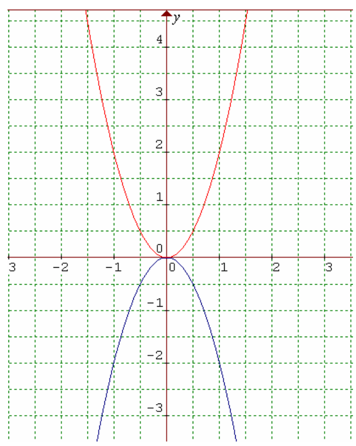
(Αν α < 0)

1) Η γραφική της παράσταση είναι καμπύλη και ονομάζεται **παραβολή**.
2) Παρουσιάζει μέγιστο για $x = 0$, το $f(0)=0$
3) Η γραφική της παράσταση βρίσκεται κάτω από τον $x'x$.
4) Κορυφή της παραβολής είναι το σημείο Ο(0, 0)
5) Έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$

   (αντίθετα $x \longrightarrow$ ίδιο y)

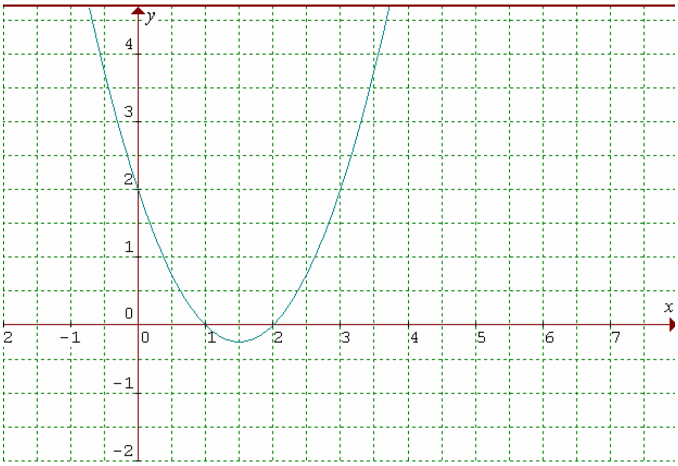
Οι παραβολές $y = 2x^2$ και $y = -2x^2$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$

(ίδια x έχουν αντίθετα y !)



Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha \neq 0$

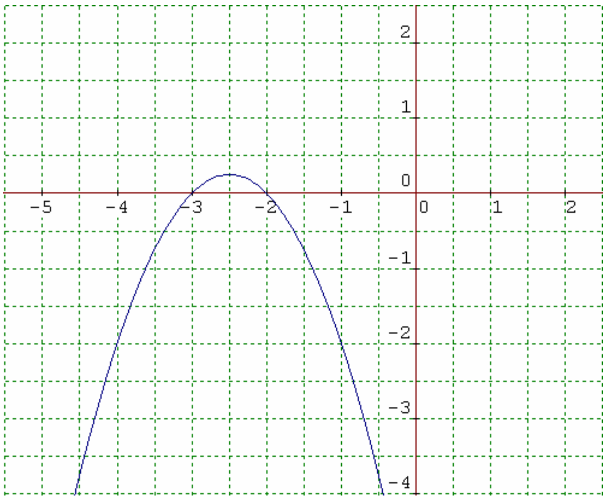
$y = x^2 - 3x + 2$ $\boxed{\Delta = 1 > 0 \text{ και } \alpha = 1 > 0}$ (2 ρίζες = 2 σημεία τομής με τον $x'x$)



- Παραβολή
- Ελάχιστο $f(-\frac{\beta}{2a}) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$

Δηλ. $f(\frac{3}{2}) = -\frac{1}{4}$

$y = -x^2 - 5x - 6$ $\boxed{\Delta = 1>0 \text{ και } \alpha = -1 < 0}$ (2 ρίζες = 2 σημεία τομής με τον $x'x$)

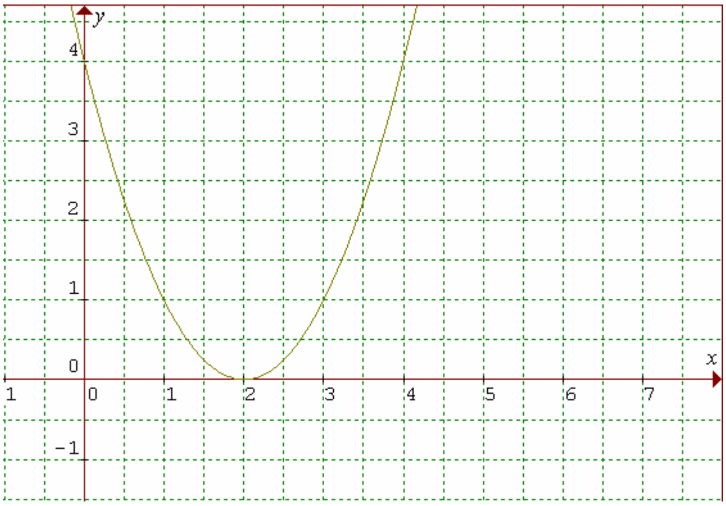


- Παραβολή
- Μέγιστο $f(-\frac{\beta}{2a}) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$

Δηλ. $f(-\frac{5}{2}) = \frac{1}{4}$

$\Delta > 0$	Παραβολή Τέμνει $x'x$ σε 2 σημεία	α > 0	Ελάχιστο $f(-\frac{\beta}{2a}) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$
		α < 0	Μέγιστο $f(-\frac{\beta}{2a}) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$

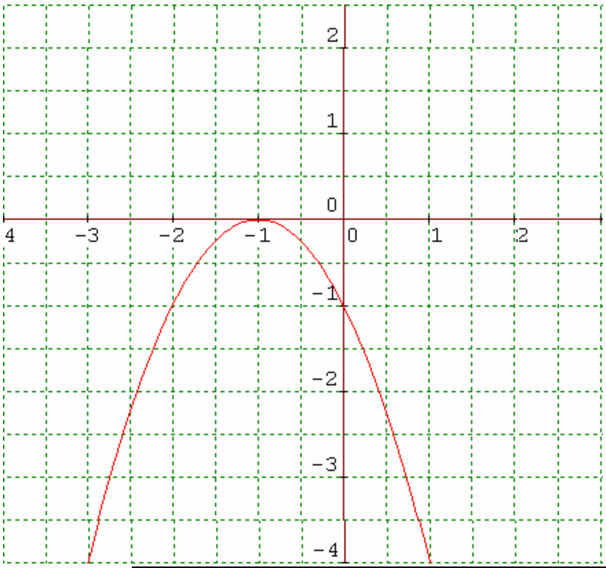
$y=x^2-4x+4$ $\boxed{\Delta = 0 \text{ και } \alpha = 1 > 0}$ (1 διπλή ρίζα άρα ένα σημείο τομής με τον $x'x$)



- Παραβολή
- Ελάχιστο $f(-\frac{\beta}{2a}) = -\frac{\Delta}{4\alpha} = 0$

Δηλ. $f(2)=0$

$y=-x^2-2x-1$ $\boxed{\Delta = 0 \text{ και } \alpha = -1 < 0}$ (1 διπλή ρίζα άρα ένα σημείο τομής με τον $x'x$)

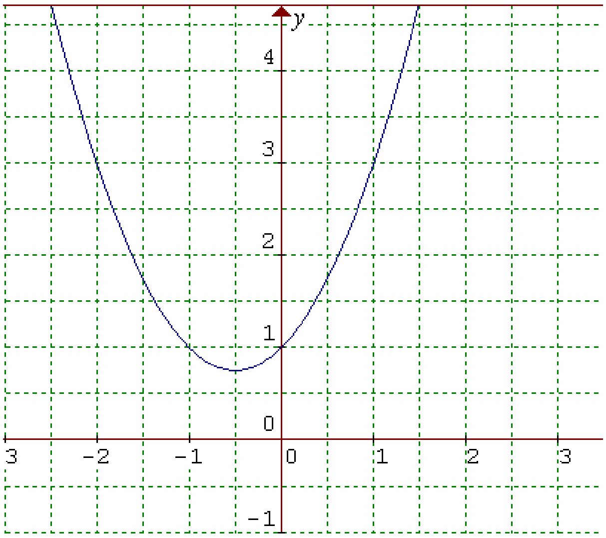


- Παραβολή
- Μέγιστο $f(-\frac{\beta}{2a}) = -\frac{\Delta}{4\alpha} = 0$

Δηλ. $f(-1)=0$

$\Delta = 0$	α > 0	Παραβολή Άνω & Εφάπτεται του $x'x$ (1 ρίζα)	Ελάχιστο $f(-\frac{\beta}{2a}) = 0$
	α < 0	Παραβολή Κάτω & Εφάπτεται του $x'x$ (1 ρίζα)	Μέγιστο $f(-\frac{\beta}{2a}) = 0$

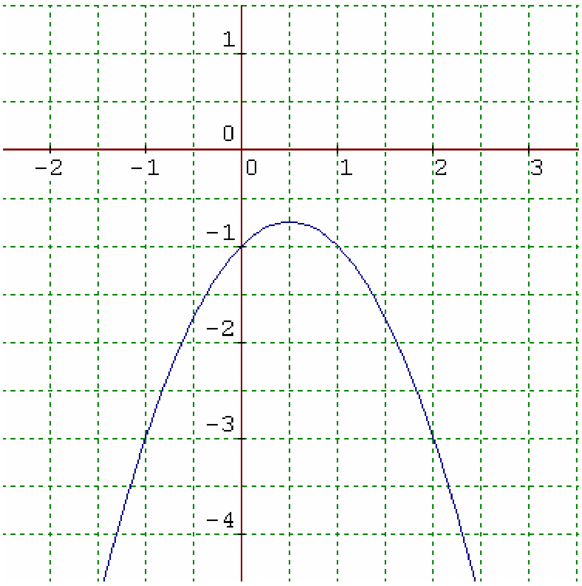
$y = x^2 + x + 1$ $\boxed{\Delta = -3 < 0 \quad \alpha = 1 > 0}$ (Όχι σημεία τομής με τον $x'x$)



- Παραβολή
- Ελάχιστο $f(-\frac{\beta}{2a}) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$

Δηλ. $f(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$

$y = -x^2 + x - 1$ $\boxed{\Delta = -3 < 0 \quad \alpha = -1 < 0}$ (Όχι σημεία τομής με τον $x'x$)



- Παραβολή
- Μέγιστο $f(-\frac{\beta}{2a}) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$

Δηλ. $f(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}$

$\Delta < 0$	$\alpha > 0$	Παραβολή Πάνω από τον $x'x$	Ελάχιστο $f(-\frac{\beta}{2a}) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$
	$\alpha < 0$	Παραβολή Κάτω από τον $x'x$	Μέγιστο $f(-\frac{\beta}{2a}) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ερωτήσεις τύπου Σωστό ή Λάθος

a) Η παραβολή $y=-2x^2+3x+1$ έχει μέγιστο.

b) Κάθε παραβολή $y=ax^2+\beta x+\gamma$, $a\neq 0$ τέμνει πάντα τον άξονα y΄y.

c) Κάθε παραβολή $y=ax^2+\beta x+\gamma$, $a\neq 0$ τέμνει πάντα τον άξονα x΄x.

d) Η παραβολή $y=ax^2+\beta x+\gamma$, $a\neq 0$ μπορεί να τέμνει y΄y τον σε δυο σημεία.

e) Η παραβολή $y=ax^2+\beta x+\gamma$, $a\neq 0$ μπορεί να τέμνει x΄x τον σε δυο σημεία.

f) Η παραβολή $y=ax^2+\beta x+\gamma$, $a\neq 0$ τέμνει τον y΄y σε σημείο με x = 0.

g) Η παραβολή $y=ax^2+\beta x+\gamma$, $a\neq 0$ τέμνει τον x΄x σε σημείο με y = 0.

Ερωτήσεις Αντιστοίχησης

Αντιστοιχίστε τις παραβολές της στήλης Α με τα σημεία τομής με τον άξονα x΄x στη στήλη Β και με τον άξονα y΄y στη στήλη Γ.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β	ΣΤΗΛΗ Γ
1. $y=x^2-5x+6$	Α. (1, 0) και (-1, 0)	Ε. (0, -4)
2. $y=-x^2+2x-1$	Β. (2, 0) και (3, 0)	Ζ. (0, 0)
3. $y=4x^2-4$	Γ. (1, 0)	Η. (0, -1)
4. $y=2x^2$	Δ. (0, 0)	Θ. (0, 6)

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Η συνάρτηση με εξίσωση $y = x^2 - 5x + a$ τέμνει τον άξονα x΄x στο Α(2, 0) .

i) Η τιμή του α είναι:

Α. 2 Β. 3 Γ. 5 Δ. 6 Ε. 0

ii) Σε ποιο από τα παρακάτω σημεία τέμνει τον x΄x

Α. (-2, 0) Β. (-2, 2) Γ. (0, 3) Δ. (3, 0) Ε. (5, 0)

2. Η συνάρτηση με εξίσωση $y = x^2 + 1{,}3x + a$ τέμνει τον άξονα y΄y στο Α(0, 4) .

Η τιμή του α είναι:

Α. 1,3 Β. -1,3 Γ. 1,3 ή -1,3 Δ. 0 Ε. 4

3. Η παραβολή $y = \kappa x^2 + 4x - 11$ παρουσιάζει μέγιστο σε ένα σημείο. Τότε :

Α. κ > 0 Β. κ < 0 Γ. κ = 0 Δ. κ ≠ 0 Ε. δεν ξέρουμε

Ερωτήσεις Ανάπτυξης

1. Σχεδιάστε τις παραβολές με εξίσωση :

α) $y = x^2 - 6x + 8$ β) $y = x^2 - 6x + 9$ γ) $y = x^2 + x + 1$

δ) $y = -x^2 + 6x - 8$ ε) $y = -x^2 + 6x - 9$ στ) $y = -x^2 - x - 1$

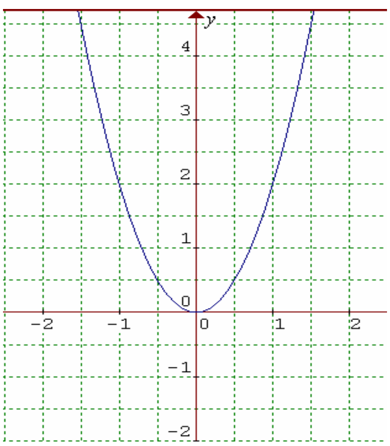
Σημείωση: Αρχικά να αναφέρετε αν παρουσιάζει μέγιστο ή ελάχιστο και αν ναι ποιο είναι αυτό, όπως επίσης και τον άξονα συμμετρίας της.

2. Σχεδιάστε την παραβολή $y = -x^2 + ax + \beta$, αν γνωρίζετε ότι διέρχεται από τα σημεία Α(0, 9) & Β(3, 0).

Σε ποια σημεία τέμνει τους άξονες;

Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές τα σημεία αυτά.

3. Βρείτε την εξίσωση της παραβολής του διπλανού σχήματος



4. Στο παρακάτω πίνακα δίνονται μερικές τιμές δυο ποσών x και y. Να συμπληρώσετε τον πίνακα αν ξέρετε ότι τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα.

x	4	5			40	80
y	10		160			

5. Μια συνάρτηση έχει γραφική παράσταση ευθεία και διέρχεται από τα σημεία Α(0, -1) και Β(3, 2). Βρείτε την εξίσωση της και σχεδιάστε την. Σε ποιο σημείο τέμνει τον άξονα x΄x;

6. Δίνεται η συνάρτηση $y = \lambda x + 2$ και ο παρακάτω πίνακας μερικών τιμών της. Να βρείτε την τιμή του λ και να συμπληρώσετε τον πίνακα

x	-3		-1	0		2	
y		6			1	-2	-4

7. Να αντιστοιχίσετε τις παραβολές

1) $y = x^2 + 3x - 1$ 2) $y = 3x^2 - 4$ 3) $y = x^2 - 5x$ 4) $y = -5x^2$

με τα σημεία Α, Β, Γ, Δ που είναι οι κορυφές τους

Α. (5/2, -25/4) Β. (0, -4) Γ. (-3/2, -13/4) Δ. (0, 0)

8. Να βρείτε την εξίσωση και την γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, αν γνωρίζετε τα σημεία της: Α(2, 1), Β(1, 1) και $\Gamma\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$

9. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή Ο(0, 0) των αξόνων και είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 3x + 10$.

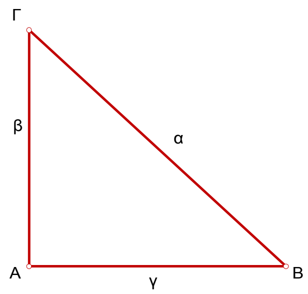
10. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Α(-1, 3) και είναι παράλληλη στην ευθεία $4x - 2y = 3$. Στη συνέχεια να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από την ευθεία και τους άξονες x΄x και y΄y.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

Ημίτονο οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ονομάζουμε τον λόγο της κάθετης πλευράς που βρίσκεται απέναντι από τη γωνία προς την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου. Συμβολίζουμε με ημ. Άρα, για τη γωνία Β θα έχουμε :

$$\eta\mu B = \frac{\alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota \;\; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta \;\; \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}}{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}$$



....

Συνημίτονο οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ονομάζουμε τον λόγο της κάθετης πλευράς που είναι προσκείμενη στη γωνία προς την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου. Συμβολίζουμε με συν. Άρα, για τη γωνία Β θα έχουμε :

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{\pi\rho o\sigma\kappa\acute{\alpha}\mu\varepsilon\nu\eta \;\; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta \;\; \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}}{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

....

Εφαπτομένη οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ονομάζουμε το λόγο της κάθετης πλευράς που βρίσκεται απέναντι από τη γωνία προς την κάθετη πλευρά που πρόσκειται στη γωνία. Συμβολίζουμε με εφ. Άρα, για τη γωνία Β θα έχουμε :

$$\varepsilon\varphi B = \frac{\alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota \;\; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta \;\; \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}}{\pi\rho o\sigma\kappa\acute{\alpha}\mu\varepsilon\nu\eta \;\; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta \;\; \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}} = \frac{\beta}{\gamma}$$

- Το ημίτονο το συνημίτονο και η εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ονομάζονται **τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας**.

- **Ισχύει** $\eta\mu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2 B = 1$ **και** $\varepsilon\varphi B = \frac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B}$

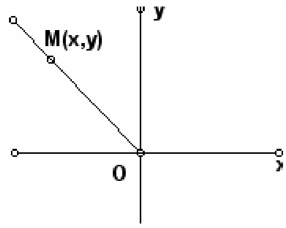
- **Συμπληρωματικές** λέγονται οι γωνίες που έχουν άθροισμα 90^o . Η μια ονομάζεται συμπληρωματική ή συμπλήρωμα της άλλης.
- **Ισχύει ημ(90^o – ω) = συνω και συν(90^o – ω) = ημω**

(το ημίτονο μιας γωνίας είναι ίσο με το συνημίτονο της συμπληρωματικής της και αντίστροφα)

- **Π.χ.:** ημ 30^o = συν(90^o - 30^o) = συν 60^o και συν 60^o = ημ(90^o – 60^o) = ημ 30^o
- **Π.χ.:** ημ 50^o = συν(90^o - 50^o) = συν 40^o και συν 50^o = ημ(90^o – 50^o) = ημ 40^o

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΟΠΟΙΑΣΔΗΠΟΤΕ ΓΩΝΙΑΣ

- ημω = $\frac{y}{\rho}$,
- συνω = $\frac{x}{\rho}$,   όπου *x*, *y* οι συντεταγμένες του σημείου Μ(*x*, *y*) και *ρ* = ΟΜ
- εφ ω = $\frac{y}{x}$
- είναι $\boxed{-1 \le ημω \le 1 \quad και \quad -1 \le συνω \le 1}$



ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ: 0^o , 90^o , 180^o , 270^o

	0^o	90^o	180^o	270^o
ημχ	0	1	0	-1
συνχ	1	0	-1	0
εφχ	0	Δεν ορίζεται	0	Δεν ορίζεται

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

Παραπληρωματικές λέγονται οι γωνίες που έχουν άθροισμα 180^o (ευθεία γωνία)

Ισχύει $\boxed{ημ\,(180^o – ω) = ημω}$ και $\boxed{συν\,(180^o – ω) = -\,συνω}$ και $\boxed{εφ(180^o – ω) = -εφω}$

- **Π.χ.:** ημ 150^o = ημ(180^o - 30^o) = ημ 30^o = $\frac{1}{2}$
- **Π.χ.:** συν 150^o = συν(180^o – 30^o) = -συν30^o = - $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

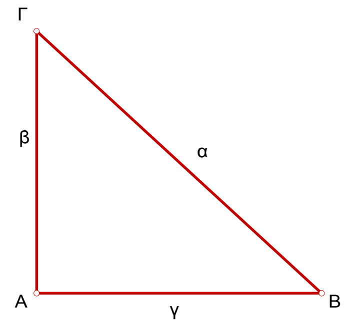
Τεταρτημόρια:	**1^o**	**2^o**	**3^o**	**4^o**
ημχ	+	+	-	-
συνχ	+	-	-	+
εφχ	+	-	+	-

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΜΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ
ΝΟΜΟΣ ΗΜΙΤΟΝΩΝ – ΝΟΜΟΣ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ

- ημ^{2}ω + συν^{2}ω = 1
- εφω = $\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$, συνω $\neq$ 0, δηλ. ω $\neq$ 90^o και ω $\neq$ 270^o

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι παρακάτω ισότητες:

- **Νόμος ημιτόνων:** $\dfrac{\alpha}{\eta\mu \mathrm{A}} = \dfrac{\beta}{\eta\mu \mathrm{B}} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$
- **Νόμος συνημιτόνων :**
- $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu \mathrm{A}$
- $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu \mathrm{B}$
- $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu \Gamma$



Υπενθυμίζουμε ...

Γωνία ω		Χαρακτηριστικοί Τριγωνομετρικοί Αριθμοί			
σε μοίρες	**σε rad**	**ημω**	**συνω**	**εφω**	**σφω**
0^o	**0**	**0**	**1**	**0**	**δεν ορίζεται**
30^o	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45^o	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	**1**	**1**
60^o	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90^o	$\frac{\pi}{2}$	**1**	**0**	**δεν ορίζεται**	**0**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι:

   i) ημ(Α + Β) = ημΓ

   ii) συν (Α+ Β) = -συν Γ

   iii) εφ (Α +Β) = -εφ Γ

   iv) $\eta\mu\frac{\mathrm{A}}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{B}+\Gamma}{2}$

2. Να βρείτε τη γωνία x όταν:

   i) $1-\sqrt{2}\ \eta\mu x=0$

   ii) $3+2\sqrt{3}\ \sigma\upsilon\nu x=0$

   iii) $\sqrt{3}\ \varepsilon\phi x+1=0$

   iv) $2(\eta\mu\omega+1)=3$

3. Να βρεθούν οι υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω όταν γνωρίζουμε:

   i) ημω = $\frac{5}{13}$, $90^o<\omega<180^o$

   ii) ημω = -$\frac{4}{5}$, $270^o<\omega<360^o$

   iii) συνω = - $\frac{2}{3}$, $180^o<\omega<270^o$

   iv) συνω = $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $270^o<\omega<360^o$

   v) ημω = $\frac{12}{13}$, $0^o<\omega<90^o$

   vi) συνω = $\frac{\sqrt{3}}{5}$, $0^o<\omega<90^o$

4. Να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων:

   i) Α = $\varepsilon\phi^2 45^o\cdot\eta\mu 60^o\cdot\varepsilon\phi 30^o\cdot\varepsilon\phi^2 60^o$

   ii) Β = $2\eta\mu 30^o\cdot\sigma\upsilon\nu 30^o\cdot\varepsilon\phi 30^o$

   iii) Γ = $\varepsilon\phi^2 60^o+2\varepsilon\phi^2 45^o$

   iv) Δ = $\eta\mu 40^o\cdot\eta\mu 140^o-\sigma\upsilon\nu 40^o\cdot\sigma\upsilon\nu 140^o$

5. Να αποδείξετε ότι :

i) $\varepsilon\phi^2 45^o = \varepsilon\phi 30^o \cdot \varepsilon\phi 60^o$ και

ii) $\eta\mu^2 60^o + \eta\mu^2 30^o = 1$

iii) $\sigma\upsilon\nu^2 100^o - \sigma\upsilon\nu^2 80^o = 0$

iv) $\eta\mu^2 45^o + \eta\mu^2 135^o = 1$

v) $\eta\mu 120^o + \sigma\upsilon\nu 70^o - \eta\mu 60^o + \sigma\upsilon\nu 110^o = 0$

vi) $\eta\mu(105^o + x) = \eta\mu(75^o - x)$

vii) $\sigma\upsilon\nu(95^o - x) = -\sigma\upsilon\nu(85^o + x)$

viii) $\varepsilon\phi(145^o - x) + \varepsilon\phi(35^o + x) = 0$

6. Να υπολογίσετε τα γινόμενα :

i) $\sigma\upsilon\nu 180^o \cdot \sigma\upsilon\nu 360^o \cdot \eta\mu 90^o \cdot \eta\mu 270^o$.

ii) $\sigma\upsilon\nu 360^o \cdot \sigma\upsilon\nu 180^o \cdot \eta\mu 90^o \cdot \eta\mu 270^o \cdot \eta\mu 180^o$

iii) $(1 + \eta\mu 90^o)(1 + \sigma\upsilon\nu 0^o)$

7. Να αποδείξετε ότι :

i) $\sigma\upsilon\nu^2 120^o + \eta\mu^2 60^o = 1$

ii) $5\eta\mu^2\omega + 5\,\sigma\upsilon\nu^2\omega = 5$

iii) $\sigma\upsilon\nu^2 50^o + \eta\mu^2 130^o = 1$

iv) $\sigma\upsilon\nu^2 100^o + \eta\mu^2 80^o = 1$

8. Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων

$A = 2\eta\mu\, 110^o + 3\eta\mu\, 120^o - 4\sigma\upsilon\nu\, 130^o$

$B = 10\eta\mu\, 60^o - 10\,\eta\mu\, 120^o + \sigma\upsilon\nu\, 360^o$

$\Gamma = \eta\mu 160^o - \sigma\upsilon\nu 115^o - \eta\mu 20^o - \sigma\upsilon\nu 65^o$

9. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παραστάσεων

$A = 2\eta\mu x + 1$

$B = \eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x$

$\Gamma = 4\sigma\upsilon\nu x - 1$

$\Delta = 3\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x$

$E = -3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x$

$Z = 2\sigma\upsilon\nu x - 8\eta\mu x$

$H = 4\eta\mu x + 5\sigma\upsilon\nu y$

10. Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών:

i) 130^o

ii) 200^o

iii) 140^o

iv) 135^o

v) 330^o

vi) 210^o.

11. Να αποδείξετε ότι :

i) $\eta\mu^2 60^0 + \eta\mu^2 120^0 = \frac{3}{2}$

ii) $\sigma\upsilon\nu^2 150^0 + \sigma\upsilon\nu^2 135^0 + \sigma\upsilon\nu^2 45^0 + \sigma\upsilon\nu^2 30^0 = \frac{5}{2}$

12. Να αποδείξετε ότι :

i) $\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu(90^o - x) = 0$

ii) $2\sigma\upsilon\nu x + 3\eta\mu(90^o - x) = 5\sigma\upsilon\nu x$

iii) $\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu(90^o - x) = 3\eta\mu x$

iv) $2\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu(90^o - x) = \sigma\upsilon\nu x$

v) $\eta\mu(130^o - x) = \eta\mu(50^o + x)$

vi) $\varepsilon\phi(15^o + x) = -\varepsilon\phi(165^o - x)$

13.

i) Αν $0^0 \le x \le 180^0$ και $2\eta\mu x = 0{,}16$ να υπολογίσετε τη γωνία x.

ii) Αν $0^0 \le x \le 90^0$ και $\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x = 0$ να υπολογίσετε τη γωνία x.

iii) Αν $0^0 \le x \le 180^0$ και $3\eta\mu x = 012$ να υπολογίσετε τη γωνία x.

iv) Αν $0^0 \le x \le 180^0$ και $3\sigma\upsilon\nu x = -0{,}21$ να υπολογίσετε τη γωνία x.

v) Αν $0^0 \le x \le 180^0$ και $2\varepsilon\phi x = -20$ να υπολογίσετε τη γωνία x

vi) Αν $90^0 \le x \le 180^0$ και $3\eta\mu x = 0{,}9$ να υπολογίσετε τη γωνία x

vii) Αν $0^0 \le x \le 270^0$ και $\sigma\upsilon\nu x + 0{,}8 = 0{,}3$ να υπολογίσετε τη γωνία x

viii) Αν $90^0 \le x \le 180^0$ και $\eta\mu x = 0.5$ να υπολογίσετε τη γωνία x

14. Να αποδείξετε ότι

i) $(3\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x)^2 + (2\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x)^2 = 13$

ii) $\eta\mu(180 - x)\cdot\sigma\upsilon\nu(90 - x) - \eta\mu(90 - x)\cdot\sigma\upsilon\nu(180 - x) = 1$

15. Να αποδείξετε ότι $\frac{2}{\eta\mu\omega} = \frac{\eta\mu\omega}{1+\sigma\upsilon\nu\omega} + \frac{1+\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$

16. Να δείξετε ότι :

i) $1 - \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1+\eta\mu x} = \eta\mu x$

ii) $\frac{\eta\mu^2 x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = 1 - \sigma\upsilon\nu x$

17. Να αποδείξετε ότι : $\frac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$

18. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu x}$

19. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} + \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{\eta\mu x}$

20. Να αποδείξετε ότι: $\varepsilon\phi x + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$

21. Να αποδείξετε ότι: $(1-\sigma\upsilon\nu\alpha)\cdot(1+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha}) = \eta\mu\alpha\cdot\varepsilon\phi\alpha$

22. Να αποδείξετε ότι $\frac{\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta} + \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\alpha-\eta\mu\beta} = 0$

23. Να αποδείξετε ότι : $\eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\phi^2\omega}{1+\varepsilon\phi^2\omega}$ και $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\phi^2\omega}$

24. Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις

$$A = \frac{\eta\mu^2\omega \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2\omega \cdot \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}$$

$$B = \frac{\eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^4 x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}$$

$$\Gamma = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x$$

25. Να βρεθούν οι υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω όταν γνωρίζουμε:

i) $\eta\mu\omega = \frac{12}{13}$, $90^o < \omega < 180^o$

ii) $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{7}{9}$, $180^o < \omega < 270^o$

iii) $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{12}{13}$, $90^o < \omega < 180^o$

iv) $\eta\mu\omega = -\frac{5}{13}$, $270^o < \omega < 360^o$

v) $\eta\mu\omega = \frac{2}{6}$, $90^o < \omega < 180^o$

26. Να υπολογίσετε την τιμή της παραστάσεως: $(x-\sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (x-\eta\mu\omega)^2$, αν $2x^2 = 1$ & $\omega = \frac{\pi}{4}$.

27. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 135^O$, α =10 και β =$5\sqrt{2}$ Να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τριγώνου.

28. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 30^O$, β = 4 και γ = $2\sqrt{3}$ Να υπολογίσετε την πλευρά α και τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

29. Να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ όταν

i) $a = 2\sqrt{3}$, $\beta = 2$ και $\hat{A} = 60^O$

ii) $\beta = 3\sqrt{2}$, $\gamma = 3$ και $\hat{B} = 135^O$

30. Αν σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 30^O$, α = 5 και $\beta = 5\sqrt{3}$ να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.

31. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

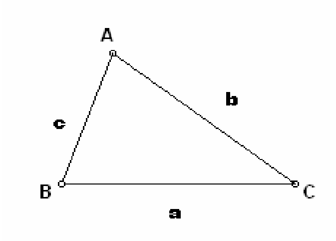
i) $\alpha \cdot (\eta\mu B - \eta\mu\Gamma) + \beta \cdot (\eta\mu\Gamma - \eta\mu A) + \gamma \cdot (\eta\mu A - \eta\mu B) = 0$

ii) $\frac{\sigma\upsilon\nu A}{\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu B}{\beta} + \frac{\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\gamma} = \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2\alpha\beta\gamma}$

ΙΣΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Κύρια στοιχεία τριγώνου:

- πλευρές AB, AC, BC και
- γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$



Είδη τριγώνων ανάλογα με το είδος των πλευρών:

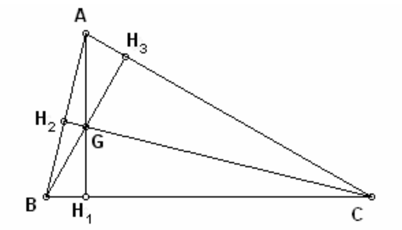
- Σκαληνό: Τρεις άνισες πλευρές
- Ισοσκελές: Δυο ίσες πλευρές
- Ισόπλευρο : Τρεις ίσες πλευρές

Είδη τριγώνων ανάλογα με το είδος των γωνιών:

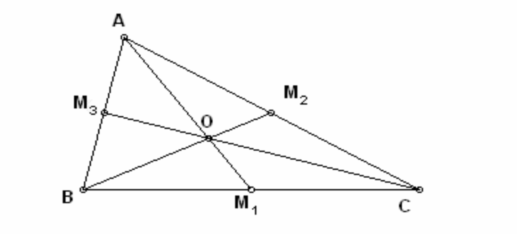
- Οξυγώνιο : Τρεις οξείες γωνίες
- Ορθογώνιο : Μια ορθή και δυο οξείες γωνίες
- Αμβλυγώνιο : Μια αμβλεία γωνία και δυο οξείες γωνίες

Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου:

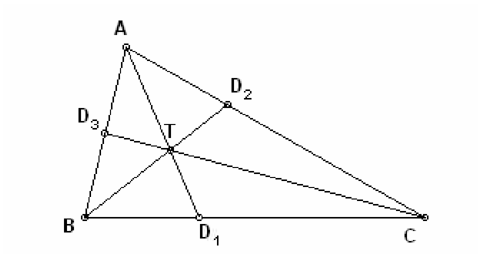
- **Ύψη**: κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από μια κορυφή στην απέναντι πλευρά
  Σημείο τομής G : Ορθόκεντρο



- **Διάμεσοι** : ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς
  Σημείο τομής O : Βαρύκεντρο



- **Διχοτόμοι** : ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μια κορυφή, χωρίζει τη γωνία σε δυο ίσες γωνίες και καταλήγει στην απέναντι πλευρά.
  Σημείο τομής T : Έγκεντρο



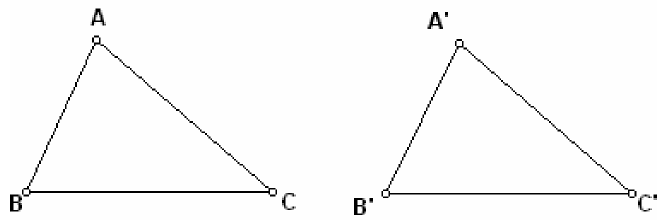
Κριτήρια Ισότητας Τριγώνων

1ο (Π – Γ – Π): Δυο τρίγωνα είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν δυο πλευρές ίσες μια προς μια και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες

$AB = A'B'$

$\hat{A} = \hat{A}'$

$AC = A'C'$

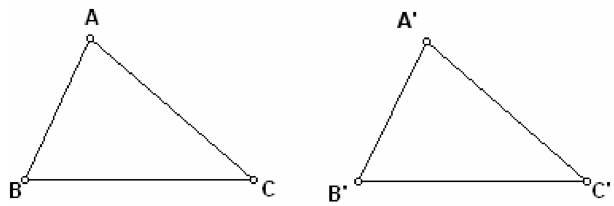


2ο (Γ - Π - Γ) : Δυο τρίγωνα είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτήν γωνίες ίσες μια προς μια.

$AB = A'B'$

$\hat{A} = \hat{A}'$

$\hat{B} = \hat{B}'$

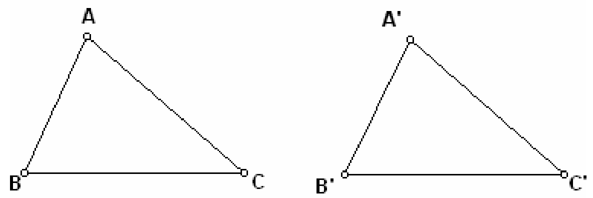


3ο (Π – Π – Π) : Δυο τρίγωνα είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν τις πλευρές τους ίσες μια προς μια.

$AB = A'B'$

$BC = B'C'$

$CA = C'A'$



Πορίσματα

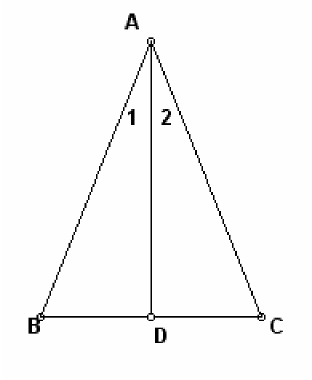
1. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο α) οι γωνίες της βάσης είναι ίσες και

   β) η διχοτόμος, το ύψος και η διάμεσος που φέρνουμε από την κορυφή προς τη βάση του συμπίπτουν, δηλαδή

   i). η διχοτόμος είναι ύψος και διάμεσος

   ii). το ύψος είναι διχοτόμος και διάμεσος

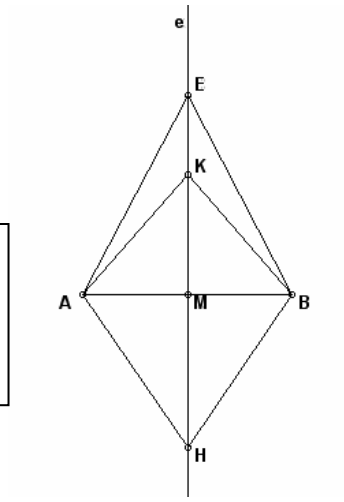
   iii). η διάμεσος είναι ύψος και διχοτόμος



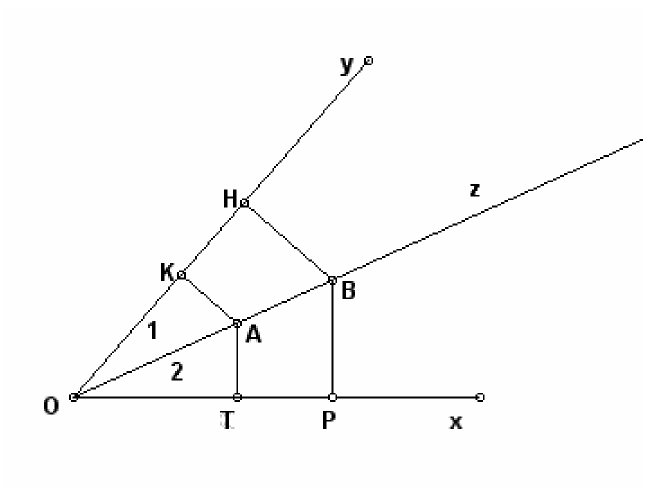
AD Διχοτόμος ($\hat{A}_1 = \hat{A}_2$)
AD Διάμεσος (BD = DC)
AD΄Υψος ($AD \perp BC$)

2. Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του
3. Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι σημείο της μεσοκαθέτου.

KA = KB
EA = EB
HA = HB
AM=MB



4. Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.
5. Κάθε σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές μιας γωνίας είναι σημείο της διχοτόμου της.



KA = AT
HB = BP

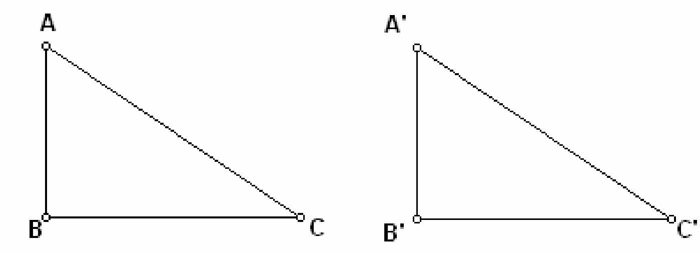
Κριτήρια Ισότητας Ορθογωνίων Τριγώνων

1. Δυο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν 2 πλευρές τους ίσες μία προς μία. (τις κάθετες ή μια κάθετη και την υποτείνουσα)

$AB = A'B'$, $BC = B'C'$ (δύο κάθετες) ή

$AB = A'B'$, $AC = A'C'$ (μία κάθετη & υποτείνουσα) ή

$BC = B'C'$, $AC = A'C'$ (μία κάθετη & υποτείνουσα)

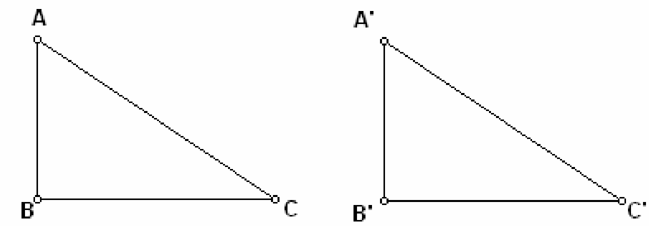


2. Δυο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν μια πλευρά και μια οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες (κάθετη πλευρά & προσκείμενη οξεία γωνία ή
κάθετη πλευρά & απέναντι οξεία γωνία ή
υποτείνουσα & οξεία γωνία).

$AB = A'B'$, $\hat{A} = \hat{A}'$ ή $BC = B'C'$, $\hat{C} = \hat{C}'$ (κάθετη & προσκείμενη)

$AB = A'B'$, $\hat{C} = \hat{C}'$ ή $BC = B'C'$, $\hat{A} = \hat{A}'$ (κάθετη & απέναντι οξεία)

$AC = A'C'$, $\hat{A} = \hat{A}'$ ή $AC = A'C'$, $\hat{C} = \hat{C}'$ (υποτείνουσα & οξεία)



ΛΟΓΟΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

- Ο λόγος ενός ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ συμβολίζεται $\frac{\Gamma\Delta}{AB}$ και είναι ο αριθμός λ για τον οποίο ισχύει $\Gamma\Delta = \lambda AB$
- Ο λόγος δυο ευθυγράμμων τμημάτων είναι ίσος με το λόγο των μηκών τους, εφόσον έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης.
- Τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα β, δ όταν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

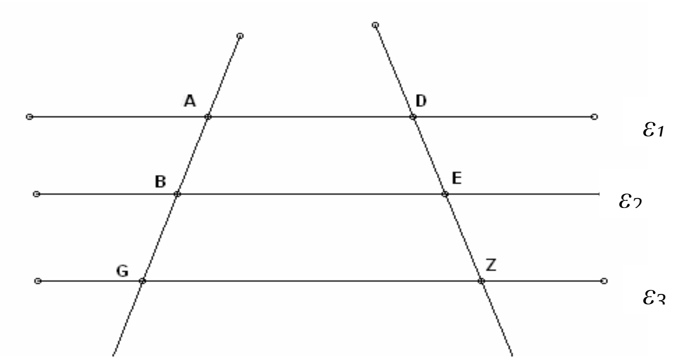
Ιδιότητες αναλογιών

Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\alpha\delta = \beta\gamma$ (ο χιαστί πολλαπλασιασμός δίδει ίσα γινόμενα)

Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ ή $\frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$ (εναλλαγή μέσων ή εναλλαγή άκρων όρων)

Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$ τότε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\alpha+\gamma+\varepsilon}{\beta+\delta+\zeta}$

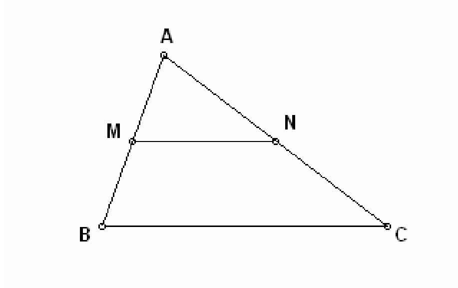
Όταν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει. Δηλ.



$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$ **και** $AB = AG$ **τότε** $DE = EZ$

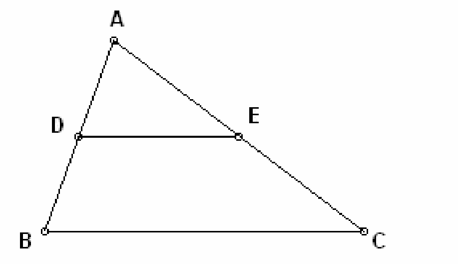
Εφαρμογές

► Αν από το μέσο πλευράς τριγώνου φέρουμε την παράλληλη προς μια πλευρά του, τότε αυτή διέρχεται και από το μέσο της τρίτης πλευράς του.



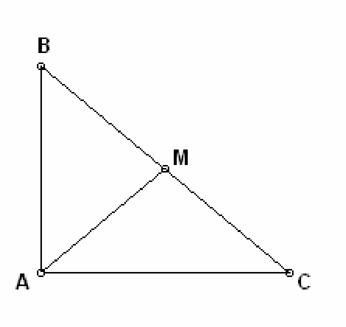
$$\text{Αν } \begin{cases} \text{M μεσο AB} \\ MN \parallel BC \end{cases} \text{ τότε N μέσο AC}$$

► Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.



$$\text{Αν } \begin{cases} \text{D μεσο AB} \\ \text{E μεσο AC} \end{cases} \text{ τότε } \begin{cases} DE \parallel BC \\ DE = \dfrac{BC}{2} \end{cases}$$

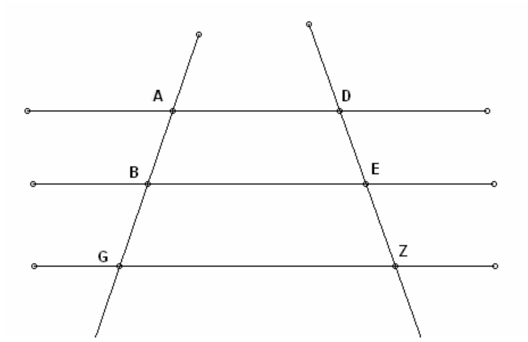
► Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της.



$$\text{Αν } \begin{cases} \hat{A} = 90^{o} \\ \text{M μεσο BC} \end{cases} \text{ τότε } AM = \frac{BC}{2}$$

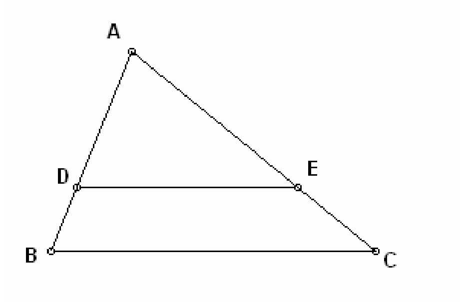
► **Θεώρημα του ΘΑΛΗ** : Όταν παράλληλες ευθείες τέμνουν 2 άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι ανάλογα με τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται στην άλλη. δηλ.:

$$\frac{AB}{DE}=\frac{BG}{EZ}=\frac{AG}{DZ}$$



► **Κάθε παράλληλη προς μια πλευρά τριγώνου χωρίζει τις άλλες πλευρές του σε ίσους λόγους.**

$$\frac{AD}{AE}=\frac{DB}{EC}=\frac{AB}{AC}$$



► **Δυο πολύγωνα είναι όμοια** όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

► **Δυο τρίγωνα είναι όμοια**

- όταν έχουν τις γωνίες τους μια προς μια ίσες
- όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες

► Ο λόγος των εμβαδών ομοίων σχημάτων ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας $\frac{E_1}{E_2}=\lambda^2$

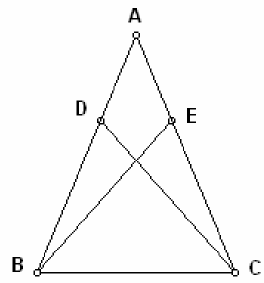
► Ο λόγος των όγκων ομοίων σχημάτων ισούται με το κύβο του λόγου ομοιότητας $\frac{V_1}{V_2}=\lambda^3$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές ή (Λ) αν είναι λάθος

   i) Σε δυο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.
   ii) Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες ίσες μια προς μια και μια πλευρά ίση, τότε είναι ίσα.
   iii) Αν δυο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δυο πλευρές ίσες μια προς μια είναι ίσα.
   iv) Στο ισοσκελές τρίγωνο η ευθεία που ορίζει η διχοτόμος από την κορυφή του είναι μεσοκάθετος της βάσης του.

2. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το ισοσκελές τρίγωνο ABC με βάση BC. Αν AD = AE να δείξετε ότι $B\hat{D}C = B\hat{E}C$



3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ και την προεκτείνουμε κατά τμήμα ΜΔ = ΑΜ. Να αποδείξετε ότι ΑΒ= ΓΔ.

4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφή το σημείο Α. Να δείξετε ότι οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ είναι ίσες.

5. Έστω ένα κύκλος με διάμετρο ΑΒ και οι ίσες χορδές του ΑΓ, ΑΔ εκατέρωθεν της ΑΒ. Να αποδείξετε ότι ΒΓ = ΒΔ.

6. Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ και οι διάμεσοί τους ΑΜ, Α΄Μ΄ . Αν ΑΒ = Α΄Β΄ , ΒΓ = Β΄Γ΄ και ΑΜ = Α΄Μ΄ να αποδείξετε ότι :

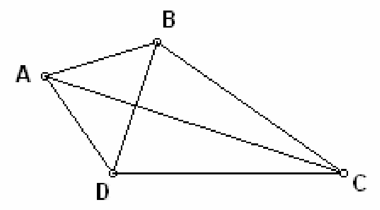
   i. $\hat{B} = \hat{B}'$
   ii. τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα.

7. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ. Στις προεκτάσεις των ΑΒ, ΑΓ παίρνουμε τα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα ώστε ΒΔ = ΓΕ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Ε ισαπέχουν από την ΒΓ

8. Έστω το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφή το Α και διχοτόμο του την ΑΔ. Αν τα σημεία Ε, Ζ ανήκουν στην ΑΔ, να δείξετε ότι $E\hat{B}Z = E\hat{\Gamma}Z$.

9. Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^{O}$) και η διχοτόμος του ΒΔ. Αν η κάθετη από το Δ στη ΒΓ τέμνει την ΒΓ στο Ε, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισοσκελές.

10. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τετράπλευρο ABCD με AB = AD και την AC διχοτόμο της γωνίας $\Delta\hat{A}B$. Να αποδείξετε ότι :



i) το τρίγωνο BCD είναι ισοσκελές

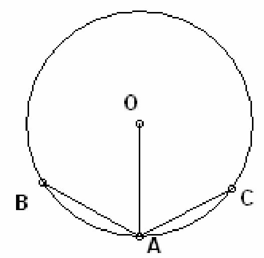
ii) η AC είναι μεσοκάθετος της διαγωνίου BD.

11. Αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν ΑΒ = ΔΕ, $\hat{B} = \hat{E}$, και τα ύψη τους ΒΚ και ΕΛ ίσα, ν’ αποδείξετε ότι :

i) $\hat{A} = \hat{\Delta}$

ii) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.

12. Αν Ο το κέντρο του κύκλου του διπλανού σχήματος και AB= AC ν’ αποδείξετε ότι :



i) η AO διχοτομεί τη γωνία $B\hat{A}C$

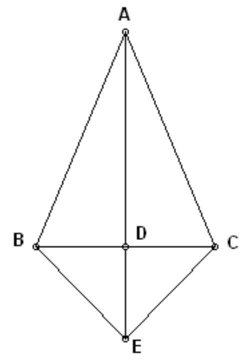
ii) η AO είναι μεσοκάθετος της χορδής BC.

13. Έστω ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν ΑΒ=Α΄Β΄ , ΑΓ=Α΄Γ΄ και τις διαμέσους ΒΜ, Β΄Μ΄ ίσες. Να αποδείξετε ότι

i) $\hat{A} = \hat{A}'$

ii) τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα.

14. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές με βάση BC και η AD διχοτόμος του. Να αποδείξετε ότι :



i) η AD είναι μεσοκάθετος του BC

ii) το τρίγωνο EBC είναι ισοσκελές.

15. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ =ΑΓ). Φέρνουμε τη διχοτόμο ΑΔ. Να δείξετε ότι

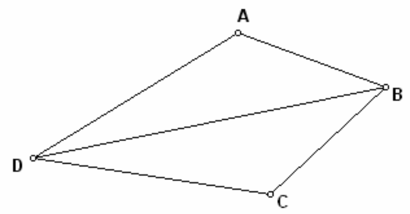
i) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα

ii) Η διχοτόμος ΑΔ είναι και διάμεσος και ύψος

iii) Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ(ΑΒ =ΑΓ) προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ προς το μέρος του Α και παίρνουμε τμήματα ΑΕ, ΑΔ αντίστοιχα ώστε ΑΕ = ΑΔ. Αν Η το μέσο της ΒΓ να δείξετε ότι το τρίγωνο ΔΗΕ είναι ισοσκελές.

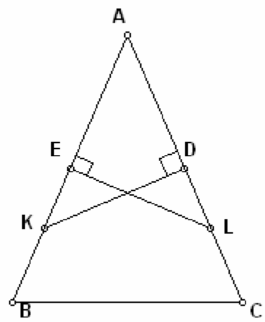
16. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΜ η διάμεσός του. Να αποδείξετε ότι οι κορυφές Β, Γ, ισαπέχουν από την ΑΜ.

17. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τετράπλευρο ABCD με $\hat{A} = \hat{C} = 90^o$ και η BD διχοτόμος τής γωνίας $\hat{B}$. Να αποδείξετε ότι :

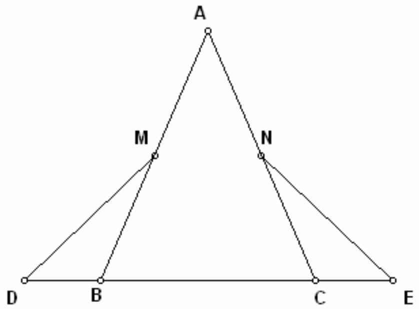


i) το τρίγωνο DAC είναι ισοσκελές
ii) η BD είναι μεσοκάθετος του AC.

18. Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές AE=EB, AD=DC και $KD \perp AC$, $LE \perp AB$. Να δείξετε ότι KD =LE



19. Στο σχήμα της επομένης σελίδος το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές, τα M, N είναι μέσα των AB, AC και DB = CE. Να δείξετε ότι DM = EN.



20. Δυο κύκλοι με κέντρα Ο και Κ τέμνονται στα σημεία Α και Β. Να δείξετε ότι

i) η ΟΚ είναι διχοτόμος των $A\hat{O}B$ και $A\hat{K}B$

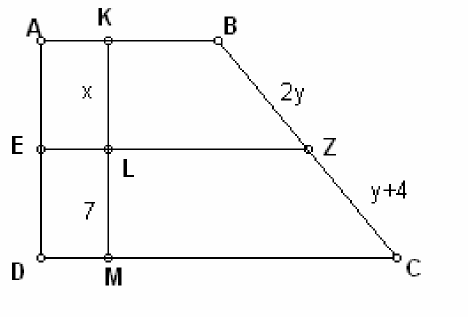
ii) η ΟΚ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ.

21. Να σχεδιάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και έπειτα με κανόνα και διαβήτη να κατασκευάσετε ευθύγραμμα τμήματα ίσα προς $\frac{2}{3}AB$, $\frac{5}{3}AB$

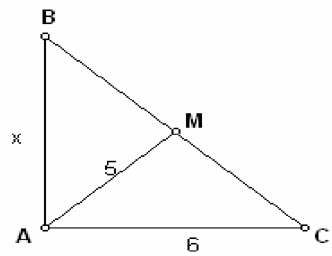
22. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο που έχει κορυφές τα μέσα των πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι επίσης ισοσκελές.

23. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο που έχει κορυφές τα μέσα των πλευρών ισόπλευρου τριγώνου είναι επίσης ισόπλευρο.

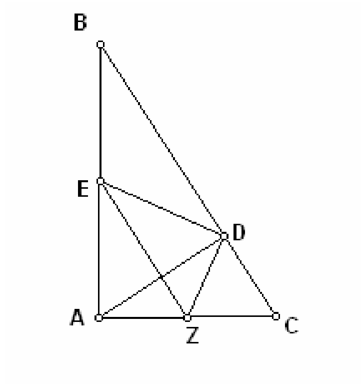
24. Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΕ = ΕD . Να υπολογίσετε το x και το y



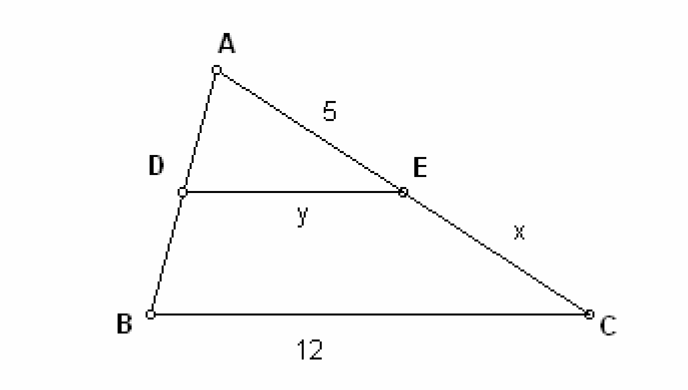
25. Στο παρακάτω σχήμα είναι BM = MC. Να υπολογίσετε το x. (Α=90^0)



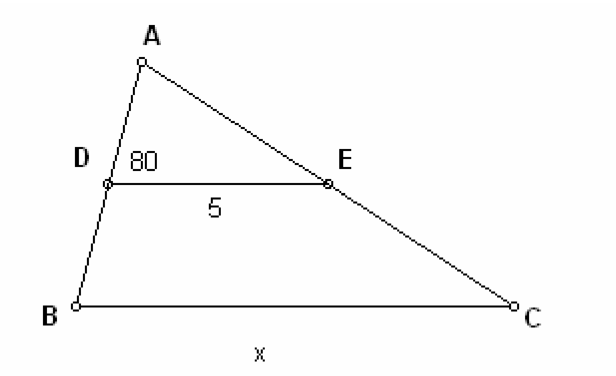
26. Στο παρακάτω σχήμα είναι AE = EB και AZ = ZC και AB=16 και AC=12. Να υπολογίσετε τις πλευρές του τριγώνου DEZ.



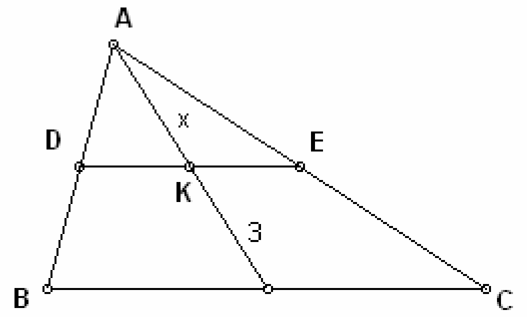
27. Στο παρακάτω σχήμα είναι AD = DB και $\hat{B} = A\hat{D}E$. Να υπολογίσετε το x και το y



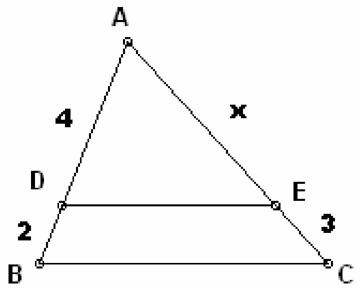
28. Στο παρακάτω σχήμα είναι : AE =EC και AD= DB. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}$ και το x.

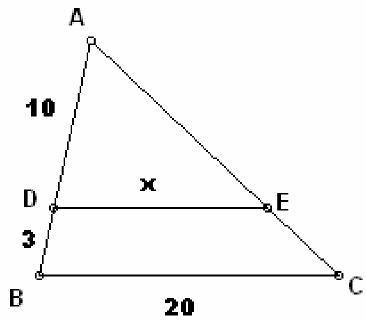


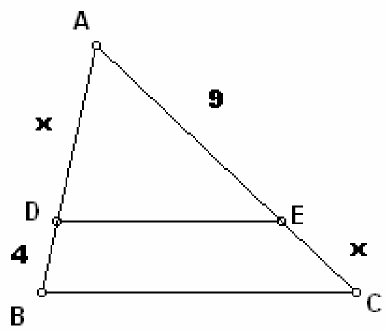
29. Στο παρακάτω σχήμα είναι AE = EC και AD = DB. να υπολογίσετε το x

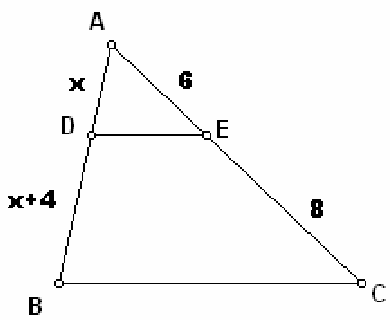


30. Στο τρίγωνο ABC είναι DE // BC. Να υπολογίσετε το x σε κάθε περίπτωση.



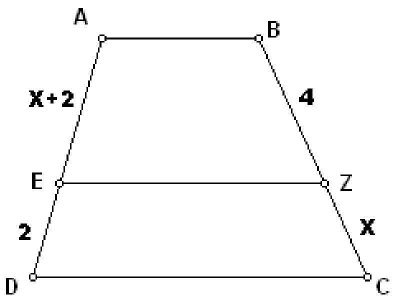






31. Στο παρακάτω τραπέζιο ABCD η EZ είναι παράλληλη στις βάσεις του AB & CD.

Να υπολογίσετε το x.



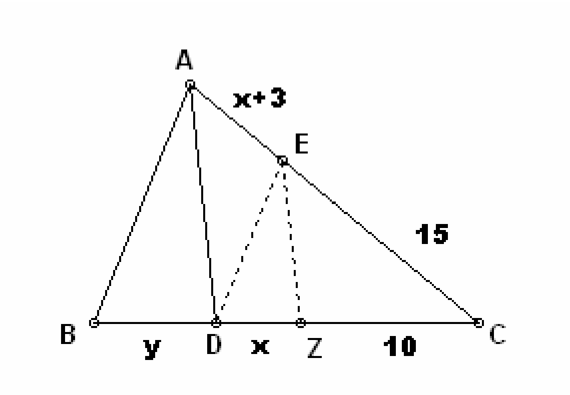
32. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε το ύψος ΑΔ. Να αποδείξετε ότι

i) $AB^2 = B\Delta \cdot B\Gamma$

ii) $A\Gamma^2 = \Delta\Gamma \cdot B\Gamma$

iii) $A\Delta^2 = B\Gamma \cdot B\Delta - B\Delta^2$

33. Στο τρίγωνο ABC είναι ED // AB και EZ // AD. Να υπολογίσετε τα x και y



34. Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) και Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι

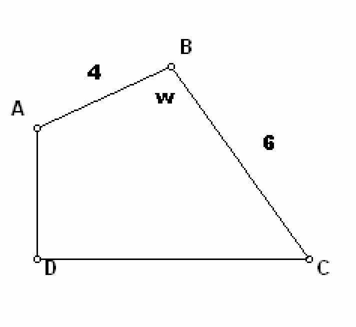
i) Η ΜΝ περνάει από τα μέσα των διαγωνίων του τραπεζίου

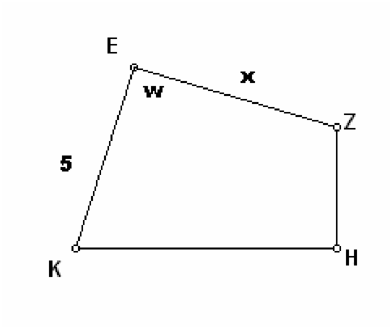
ii) Το τμήμα της ΜΝ που περιέχεται μεταξύ των διαγωνίων είναι ίσο με $\left|\dfrac{AB-\Gamma\Delta}{2}\right|$.

35. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α $=90^o$) με Β $=30^o$. Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ. Να δείξετε ότι ΕΖ= ΑΓ.

36. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ να δείξετε ότι ΜΔ = ΜΕ.

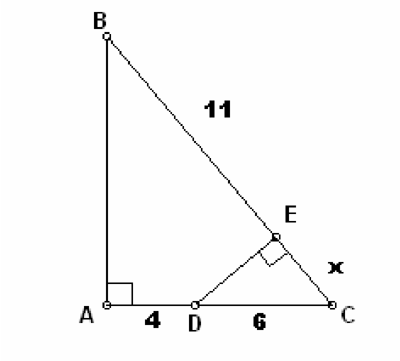
37. Αν τα τετράπλευρα ABCD και EZHK είναι όμοια να βρείτε το x.





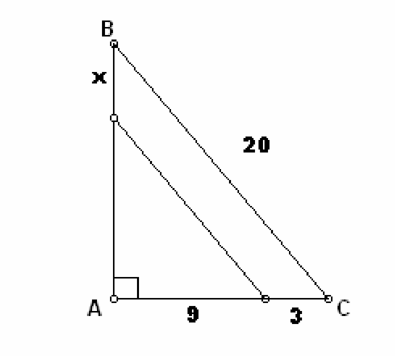
38. Δυο όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ έχουν λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$. Το εμβαδόν τού ΚΛΜ είναι $36\,cm^2$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

39. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABC και DEZ είναι όμοια και να υπολογίσετε το x.

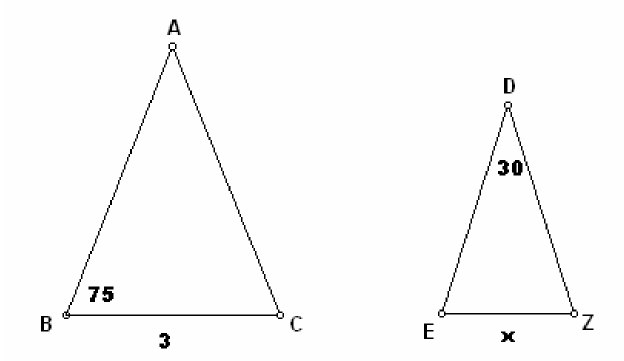


40. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα. Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των όμοιων τριγώνων ΑΒΓ, ΔΕΖ.

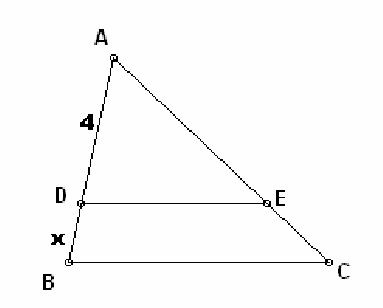
41. Αν DE // BC να υπολογίσετε το x



42. Στο παρακάτω σχήμα είναι AB = AC και DE = EZ και 4 (ΑΒΓ) = 9 (ΔΕΖ). Να υπολογίσετε το x.



43. Στο παρακάτω σχήμα είναι DE // BC και (ADE) = $\frac{16}{25}$(ABC). Να υπολογίσετε το x.



44. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90^o) με ΑΒ =1cm, ΑΓ = 3 cm. Ένα τρίγωνο ΔΕΖ όμοιο με το ΑΒΓ έχει εμβαδόν δεκαπλάσιο από το εμβαδόν του ΑΒΓ. Να βρείτε την υποτείνουσα και τις κάθετες πλευρές του ΔΕΖ.

45. Ο λόγος ομοιότητας δυο κύβων είναι $\frac{2}{3}$. Να βρείτε τη σχέση των όγκων τους.

46. Δυο όμοιοι κύλινδροι έχουν ακτίνες βάσεων 5 cm, 10 cm αντίστοιχα. Αν ο όγκος του πρώτου είναι $V_1 = 320\ cm^3$ να βρείτε τον όγκο του δεύτερου κυλίνδρου.

47. Ο λόγος των εμβαδών δυο σφαιρών είναι $\frac{25}{16}$. Να βρείτε το λόγο των όγκων τους.

48. Ο λόγος των όγκων δυο σφαιρών είναι $\frac{8}{27}$. Αν η επιφάνεια άλλης μικρότερης είναι 100 cm^2 να βρείτε την επιφάνεια της άλλης σφαίρας.

Τέλος & τ. Θ. δ.