

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ
ΜΕ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΟΥΣ

Μπάμπης Στεργίου - Μαθηματικός

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $3\alpha + 6\beta$ β) $2x - 8$ γ) $8\omega^2 + 6\omega$ δ) $-9x^2 - 6x$ ε) $8\alpha^2\beta + 4\alpha\beta^2$
 στ) $2x^2 - 2xy + 2x$ ζ) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha\beta$ η) $2\alpha^3 - 4\alpha^2 + 6\alpha^2\beta$ θ) $\sqrt{2}xy - \sqrt{18}y + \sqrt{8}y^2$

ΛΥΣΗ

Η παραγοντοποίηση γίνεται με τη **μέθοδο του κοινού παράγοντα**.

α) $3\alpha + 6\beta = 3(\alpha + 2\beta)$ β) $2x - 8 = 2(x - 4)$
 γ) $8\omega^2 + 6\omega = 2\omega(4\omega + 3)$ δ) $-9x^2 - 6x = -3x(3x + 2)$
 ε) $8\alpha^2\beta + 4\alpha\beta^2 = 4\alpha\beta(2\alpha + \beta)$ στ) $2x^2 - 2xy + 2x = 2x(x - y + 1)$
 ζ) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha\beta = \alpha\beta(\alpha + \beta - 1)$ η) $2\alpha^3 - 4\alpha^2 + 6\alpha^2\beta = 2\alpha^2(\alpha - 2 + 3\beta)$
 θ) $\sqrt{2}xy - \sqrt{18}y + \sqrt{8}y^2 = \sqrt{2}xy - \sqrt{9 \cdot 2}y + \sqrt{4 \cdot 2}y^2 = \sqrt{2}xy - 3\sqrt{2}y + 2\sqrt{2}y^2 = \sqrt{2}y(x - 3 + 2y)$

2. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x(\alpha - \beta) + y(\alpha - \beta)$ β) $\alpha(x + y) + \beta(x + y)$ γ) $(3x - 1)(x - 2) - (x + 4)(x - 2)$
 δ) $\alpha^2(\alpha - 2) - 3(2 - \alpha)$ ε) $4x(x - 1) - x + 1$ στ) $2x^2(x - 3) - 6x(x - 3)^2$

ΛΥΣΗ

Πρόκειται για πολύ βασικές ασκήσεις. Βασίζονται στη **μέθοδο του κοινού παράγοντα**.

α) $x(\alpha - \beta) + y(\alpha - \beta) = (\alpha - \beta)(x + y)$
 β) $\alpha(x + y) + \beta(x + y) = (x + y)(\alpha + \beta)$
 γ) $(3x - 1)(x - 2) - (x + 4)(x - 2) = (x - 2)(3x - 1) - (x + 4)(x - 2) = (x - 2)(3x - 1 - x - 4) =$
 $= (x - 2)(2x - 5)$
 δ) $\alpha^2(\alpha - 2) - 3(2 - \alpha) = \alpha^2(\alpha - 2) + 3(\alpha - 2) = (\alpha - 2)(\alpha^2 + 3)$
 ε) $4x(x - 1) - x + 1 = 4x(x - 1) - (x - 1) = (x - 1)(4x - 1)$

$$\begin{aligned} \sigma\tau) 2x^2(x-3) - 6x(x-3)^2 &= 2x(x-3)[x-3(x-3)] = 2x(x-3)(x-3x+9) = \\ &= 2x(x-3)(-2x+9) \end{aligned}$$

3. i) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$x^2 + x, 2y^2 - 5y, \omega(\omega - 3) - 2(3 - \omega), \alpha(3\alpha + 1) - 4\alpha$$

ii) Να επιλύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) x^2 + x = 0$$

$$\beta) 2y^2 = 5y$$

$$\gamma) \omega(\omega - 3) - 2(3 - \omega) = 0$$

$$\delta) \alpha(3\alpha + 1) = 4\alpha$$

ΛΥΣΗ

Εργαζόμαστε με **κοινό παράγοντα** και βρίσκουμε αντίστοιχα:

$$i) \alpha) x^2 + x = x(x + 1)$$

$$\beta) 2y^2 - 5y = y(2y - 5)$$

$$\gamma) \omega(\omega - 3) - 2(3 - \omega) = \omega(\omega - 3) + 2(\omega - 3) = (\omega - 3)(\omega + 2)$$

$$\delta) \alpha(3\alpha + 1) - 4\alpha = \alpha(3\alpha + 1 - 4) = \alpha(3\alpha - 3) = 3\alpha(\alpha - 1)$$

ii) Γνωρίζουμε ότι αν $\alpha\beta = 0$, τότε: $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$.

Επομένως, σύμφωνα και με το i) είναι:

$$\alpha) x^2 + x = 0 \text{ ή } x(x + 1) = 0 \text{ ή } (x = 0 \text{ ή } x + 1 = 0) \text{ ή } (x = 0 \text{ ή } x = -1)$$

$$\beta) 2y^2 = 5y \text{ ή } 2y^2 - 5y = 0 \text{ ή } y(2y - 5) = 0 \text{ ή } (y = 0 \text{ ή } 2y - 5 = 0) \text{ ή } (y = 0 \text{ ή } y = \frac{5}{2})$$

$$\gamma) \omega(\omega - 3) - 2(3 - \omega) = 0 \text{ ή } (\omega - 3)(\omega + 2) = 0 \text{ ή } (\omega - 3 = 0 \text{ ή } \omega + 2 = 0) \text{ ή } (\omega = 3 \text{ ή } \omega = -2)$$

$$\delta) \alpha(3\alpha + 1) = 4\alpha \text{ ή } \alpha(3\alpha + 1) - 4\alpha = 0 \text{ ή } 3\alpha^2 + \alpha - 4\alpha = 0 \text{ ή } 3\alpha(\alpha - 1) = 0, \text{ οπότε:}$$

$$(\alpha = 0 \text{ ή } \alpha - 1 = 0), \text{ δηλαδή } (\alpha = 0 \text{ ή } \alpha = 1)$$

4. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) x^2 + xy + ax + ay$$

$$\beta) x^3 - x^2 + x - 1$$

$$\gamma) x^3 - 5x^2 + 4x - 20$$

$$\delta) 2x^3 - 3x^2 + 4x - 6$$

$$\epsilon) 4x^2 - 8x - ax + 2a$$

$$\sigma\tau) 9\alpha\beta - 18\beta^2 + 10\beta - 5\alpha$$

$$\zeta) 12x^2 - 8xy - 15x + 10y$$

$$\eta) x^3 + \sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2}$$

$$\theta) \sqrt{6}x^2 + 2\sqrt{2}x - \sqrt{3}x - 2$$

ΛΥΣΗ

Θα χρησιμοποιήσουμε τη **μέθοδο παραγοντοποίησης με ομάδες**.

$$\alpha) x^2 + xy + ax + ay = (x^2 + xy) + (ax + ay) = x(x + y) + a(x + y) = (x + y)(x + a)$$

$$\beta) x^3 - x^2 + x - 1 = (x^3 - x^2) + (x - 1) = x^2(x - 1) + (x - 1) = (x - 1)(x^2 + 1)$$

$$\gamma) \quad x^3 - 5x^2 + 4x - 20 = (x^3 - 5x^2) + (4x - 20) = x^2(x - 5) + 4(x - 5) = (x - 5)(x^2 + 4)$$

$$\delta) \quad 2x^3 - 3x^2 + 4x - 6 = (2x^3 - 3x^2) + (4x - 6) = x^2(2x - 3) + 2(2x - 3) = (2x - 3)(x^2 + 2)$$

$$\epsilon) \quad 4x^2 - 8x - \alpha x + 2\alpha = (4x^2 - 8x) - \alpha x + 2\alpha = 4x(x - 2) - \alpha(x - 2) = (x - 2)(4x - \alpha)$$

$$\sigma\tau) \quad 9\alpha\beta - 18\beta^2 + 10\beta - 5\alpha = (9\alpha\beta - 18\beta^2) + (10\beta - 5\alpha) = 9\beta(\alpha - 2\beta) + 5(2\beta - \alpha) = \\ = 9\beta(\alpha - 2\beta) - 5(\alpha - 2\beta) = (\alpha - 2\beta)(9\beta - 5)$$

$$\zeta) \quad 12x^2 - 8xy - 15x + 10y = (12x^2 - 8xy) - 15x + 10y = 4x(3x - 2y) - 5(3x - 2y) = (3x - 2y)(4x - 5)$$

$$\eta) \quad x^3 + \sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = (x^3 + \sqrt{2}x^2) + (x + \sqrt{2}) = x^2(x + \sqrt{2}) + (x + \sqrt{2}) = (x + \sqrt{2})(x^2 + 1)$$

$$\theta) \quad \sqrt{6}x^2 + 2\sqrt{2}x - \sqrt{3}x - 2 = (\sqrt{6}x^2 + 2\sqrt{2}x) - \sqrt{3}x - 2 = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{2}x) - \sqrt{3}x - 2 = \\ = \sqrt{2}x(\sqrt{3}x + 2) - (\sqrt{3}x + 2) = (\sqrt{3}x + 2)(\sqrt{2}x - 1)$$

5. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \quad 7\alpha^2 + 10\alpha\beta + 3\beta^2$$

$$\beta) \quad 5x^2 - 8xy + 3y^2$$

$$\gamma) \quad 3x^2 - xy - 2y^2$$

ΛΥΣΗ

Διασπάμε το μεσαίο όρο, ώστε οι συντελεστές των καινούριων όρων που προέκυψαν να είναι ή ίσοι ή πολλαπλάσια των συντελεστών των άκρων όρων.

$$\alpha) \quad 7\alpha^2 + 10\alpha\beta + 3\beta^2 = 7\alpha^2 + (7\alpha\beta + 3\alpha\beta) + 3\beta^2 = (7\alpha^2 + 7\alpha\beta) + (3\alpha\beta + 3\beta^2) = 7\alpha(\alpha + \beta) + 3\beta(\alpha + \beta) = \\ = (\alpha + \beta)(7\alpha + 3\beta)$$

$$\beta) \quad 5x^2 - 8xy + 3y^2 = 5x^2 - 5xy - 3xy + 3y^2 = 5x(x - y) - 3y(x - y) = (x - y)(5x - 3y)$$

$$\gamma) \quad 3x^2 - xy - 2y^2 = 3x^2 - 3xy + 2xy - 2y^2 = 3x(x - y) + 2y(x - y) = (x - y)(3x + 2y)$$

6. α) Να αναλύσετε σε γινόμενο παραγόντων την παράσταση: $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha - \beta$.

β) Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει: $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha + \beta$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α, β είναι αντίθετοι ή αντίστροφοι.

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha - \beta = \alpha\beta(\alpha + \beta) - (\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)(\alpha\beta - 1).$$

β) Έχουμε: $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha + \beta$ ή $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha - \beta = 0$ ή (σύμφωνα με το α' ερώτημα)

$$(\alpha + \beta)(\alpha\beta - 1) = 0 \quad \text{ή} \quad (\alpha + \beta = 0 \quad \text{ή} \quad \alpha\beta - 1 = 0) \quad \text{ή} \quad (\alpha = -\beta \quad \text{ή} \quad \alpha\beta = 1)$$

- Αν $\alpha = -\beta$, τότε οι α, β είναι αντίθετοι.
- Αν $\alpha\beta = 1$, τότε οι α, β είναι αντίστροφοι.

7. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $2\alpha^2 - 2\alpha + \alpha\beta - \beta + \alpha x - x$

β) $2\alpha\beta - 4\beta + 5\alpha - 10 + 2\alpha\gamma - 4\gamma$

ΛΥΣΗ

α) $2\alpha^2 - 2\alpha + \alpha\beta - \beta + \alpha x - x = (2\alpha^2 - 2\alpha) + (\alpha\beta - \beta) + (\alpha x - x) = 2\alpha(\alpha - 1) + \beta(\alpha - 1) + x(\alpha - 1) =$
 $= (\alpha - 1)(2\alpha + \beta + x)$

β) $2\alpha\beta - 4\beta + 5\alpha - 10 + 2\alpha\gamma - 4\gamma = (2\alpha\beta - 4\beta) + (5\alpha - 10) + (2\alpha\gamma - 4\gamma) =$
 $2\beta(\alpha - 2) + 5(\alpha - 2) + 2\gamma(\alpha - 2) = (\alpha - 2)(2\beta + 5 + 2\gamma)$

Άλλος τρόπος:

$2\alpha\beta - 4\beta + 5\alpha - 10 + 2\alpha\gamma - 4\gamma = (2\alpha\beta + 5\alpha + 2\alpha\gamma) + (-4\beta - 10 - 4\gamma) = \alpha(2\beta + 5 + 2\gamma) - 2(2\beta + 5 + 2\gamma) =$
 $= (2\beta + 5 + 2\gamma)(\alpha - 2)$

8. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2 - 9$

β) $16x^2 - 1$

γ) $\alpha^2 - 9\beta^2$

δ) $\alpha^2\beta^2 - 4$

ε) $36\omega^2 - (\omega + 5)^2$

στ) $4(x + 1)^2 - 9(x - 2)^2$

ζ) $\frac{1}{x^2} - 16$

η) $x^2 - 3$

θ) $x^2 - 2y^2$

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$.

α) $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3)$

β) $16x^2 - 1 = (4x)^2 - 1^2 = (4x - 1)(4x + 1)$

γ) $\alpha^2 - 9\beta^2 = \alpha^2 - (3\beta)^2 = (\alpha - 3\beta)(\alpha + 3\beta)$

δ) $\alpha^2\beta^2 - 4 = (\alpha\beta)^2 - 2^2 = (\alpha\beta - 2)(\alpha\beta + 2)$

ε) $36\omega^2 - (\omega + 5)^2 = (6\omega)^2 - (\omega + 5)^2 = [6\omega - (\omega + 5)] \cdot [6\omega + (\omega + 5)] =$
 $= (6\omega - \omega - 5)(6\omega + \omega + 5) = (5\omega - 5)(7\omega + 5) = 5(\omega - 1)(7\omega + 5)$

στ) $4(x + 1)^2 - 9(x - 2)^2 = [2(x + 1)]^2 - [3(x - 2)]^2 = [2(x + 1) - 3(x - 2)][2(x + 1) + 3(x - 2)] =$
 $= (2x + 2 - 3x + 6)(2x + 2 + 3x - 4) = (-x + 8)(5x - 2)$

ζ) $\frac{1}{x^2} - 16 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 4^2 = \left(\frac{1}{x} - 4\right)\left(\frac{1}{x} + 4\right)$

η) $x^2 - 3 = x^2 - (\sqrt{3})^2 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

$$\theta) x^2 - 2y^2 = x^2 - (\sqrt{2}y)^2 = (x - \sqrt{2}y)(x + \sqrt{2}y)$$

9. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $2x^2 - 32$

β) $28 - 7y^2$

γ) $2x^3 - 2x$

δ) $5ax^2 - 80a$

ε) $2(x-1)^2 - 8$

ΛΥΣΗ

Με τη μέθοδο του κοινού παράγοντα και της διαφοράς τετραγώνων, παίρνουμε αντίστοιχα:

α) $2x^2 - 32 = 2(x^2 - 16) = 2(x^2 - 4^2) = 2(x-4)(x+4)$

β) $28 - 7y^2 = 7(4 - y^2) = 7(2^2 - y^2) = 7(2-y)(2+y)$

γ) $2x^3 - 2x = 2x(x^2 - 1) = 2x(x^2 - 1^2) = 2x(x-1)(x+1)$

δ) $5ax^2 - 80a = 5a(x^2 - 16) = 5a(x^2 - 4^2) = 5a(x-4)(x+4)$

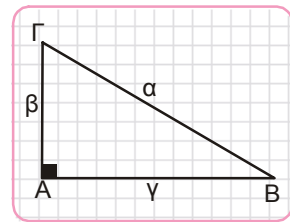
ε) $2(x-1)^2 - 8 = 2[(x-1)^2 - 4] = 2[(x-1)^2 - 2^2] = 2(x-1-2)(x-1+2) = 2(x-3)(x+1)$

10. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, να υπολογίσετε την πλευρά

γ, όταν:

α) $\alpha = 53, \beta = 28$ β) $\alpha = 0,37, \beta = 0,12$

γ) $\alpha = 26\lambda, \beta = 10\lambda$



ΛΥΣΗ

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ισχύει το Πυθαγόρειο

θεώρημα: $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$ ή $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$.

α) Για $\alpha = 53, \beta = 28$ είναι:

$$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 53^2 - 28^2 = (53 - 28)(53 + 28) = 25 \cdot 81.$$

Επομένως: $\gamma^2 = 25 \cdot 81$, οπότε:

$$\gamma = \sqrt{25 \cdot 81} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{81} = 5 \cdot 9 = 45$$

β) Για $\alpha = 0,37, \beta = 0,12$ είναι:

$$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = (0,37)^2 - (0,12)^2 = (0,37 - 0,12)(0,37 + 0,12) = 0,25 \cdot 0,49.$$

Επομένως: $\gamma^2 = 0,25 \cdot 0,49$, οπότε:

$$\gamma = \sqrt{0,25 \cdot 0,49} = \sqrt{0,25} \cdot \sqrt{0,49} = 0,5 \cdot 0,7 = 0,35$$

γ) Για $\alpha = 26\lambda, \beta = 10\lambda$ είναι:

$$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = (26\lambda)^2 - (10\lambda)^2 = (26\lambda - 10\lambda)(26\lambda + 10\lambda) = 16\lambda \cdot 36\lambda = 16 \cdot 36\lambda^2.$$

Επομένως: $\gamma^2 = 16 \cdot 36\lambda^2$, οπότε:

$$\gamma = \sqrt{16 \cdot 36\lambda^2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{36} \cdot \sqrt{\lambda^2} = 4 \cdot 6 \cdot |\lambda| = 24\lambda$$

γιατί $\lambda > 0$ (αφού $\alpha, \beta > 0$) και έτσι $|\lambda| = \lambda$.

11. Να επιλύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 - 49 = 0$

β) $9x^3 - 4x = 0$

γ) $x(x+1)^2 = 4x$

δ) $(x+2)^3 = x+2$

ΛΥΣΗ

Με τη μέθοδο της παραγοντοποίησης βρίσκουμε αντίστοιχα.

α) $x^2 - 49 = 0$ ή $(x^2 - 7^2) = 0$ ή $(x-7)(x+7) = 0$, οπότε: $(x-7=0$ ή $x+7=0)$, δηλαδή

$$(x=7 \text{ ή } x=-7)$$

β) $9x^3 - 4x = 0$ ή $x(9x^2 - 4) = 0$ ή $x(3x-2)(3x+2) = 0$, οπότε: $(x=0$ ή $3x-2=0$ ή $3x+2=0)$,

$$\text{δηλαδή } (x=0 \text{ ή } x=\frac{2}{3} \text{ ή } x=-\frac{2}{3})$$

γ) $x(x+1)^2 = 4x$ ή $x(x+1)^2 - 4x = 0$ ή $x[(x+1)^2 - 4] = 0$ ή $x[(x+1)^2 - 2^2] = 0$ ή

$$x(x+1-2)(x+1+2) = 0 \text{ ή } x(x-1)(x+3) = 0, \text{ οπότε: } (x=0 \text{ ή } x-1=0 \text{ ή } x+3=0), \text{ δηλαδή}$$

$$(x=0 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-3)$$

δ) $(x+2)^3 = x+2$ ή $(x+2)^3 - (x+2) = 0$ ή $(x+2)[(x+2)^2 - 1] = 0$ ή

$$(x+2)(x+2-1)(x+2+1) = 0 \text{ ή } (x+2)(x+1)(x+3) = 0, \text{ οπότε:}$$

$$(x+2=0 \text{ ή } x+1=0 \text{ ή } x+3=0), \text{ δηλαδή } (x=-2 \text{ ή } x=-1 \text{ ή } x=-3)$$

12. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^3 - 27$

β) $y^3 + 8$

γ) $\omega^3 + 64$

δ) $8x^3 - 1$

ε) $27y^3 + 1$

ΛΥΣΗ

Με βάση τις ταυτότητες: $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$, $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$ παίρνουμε:

α) $x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x-3)(x^2 + x \cdot 3 + 3^2) = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$

β) $y^3 + 8 = y^3 + 2^3 = (y+2)(y^2 - y \cdot 2 + 2^2) = (y+2)(y^2 - 2y + 4)$

γ) $\omega^3 + 64 = \omega^3 + 4^3 = (\omega+4)(\omega^2 - \omega \cdot 4 + 4^2) = (\omega+4)(\omega^2 - 4\omega + 16)$

δ) $8x^3 - 1 = (2x)^3 - 1^3 = (2x-1)[(2x)^2 + 2x \cdot 1 + 1^2] = (2x-1)(4x^2 + 2x + 1)$

ε) $27y^3 + 1 = (3y)^3 + 1^3 = (3y+1)[(3y)^2 - 3y \cdot 1 + 1^2] = (3y+1)(9y^2 - 3y + 1)$

13. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $3x^3 - 24$

β) $16a^4 + 2a$

γ) $\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi \rho^3$

δ) $a^4\beta + a\beta^4$

ΛΥΣΗ

Με τη μέθοδο του κοινού παράγοντα και του αθροίσματος ή της διαφοράς κύβων παίρνουμε αντίστοιχα.

α) $3x^3 - 24 = 3(x^3 - 8) = 3(x^3 - 2^3) = 3(x-2)(x^2 + x \cdot 2 + 2^2) = 3(x-2)(x^2 + 2x + 4)$

β) $16a^4 + 2a = 2a(8a^3 + 1) = 2a[(2a)^3 + 1^3] = 2a(2a+1)[(2a)^2 - 2a \cdot 1 + 1^2] =$
 $= 2a(2a+1)(4a^2 - 2a + 1)$

γ) $\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi \rho^3 = \frac{4}{3}\pi(R^3 - \rho^3) = \frac{4}{3}\pi(R-\rho)(R^2 + R\rho + \rho^2)$

δ) $a^4\beta + a\beta^4 = \alpha\beta(\alpha^3 + \beta^3) = \alpha\beta(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

14. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $x^3 - \dots = (x-3)(\dots + \dots + 9)$

β) $\dots + y^3 = (2x+y)(4x^2 - \dots + \dots)$

γ) $a^3 - \dots = (a-2\beta)(\dots + \dots + 4\beta^2)$

δ) $a^3 + \dots = (a+5\beta)(\dots - \dots + 25\beta^2)$

ΛΥΣΗ

Στηριζόμαστε στις ταυτότητες: $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$, $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

α) $x^3 - 27 = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$

β) $8x^3 + y^3 = (2x+y)(4x^2 - 2xy + y^2)$

γ) $a^3 - 8\beta^3 = (a-2\beta)(a^2 + 2a\beta + 4\beta^2)$

δ) $a^3 + 125\beta^3 = (a+5\beta)(a^2 - 5a\beta + 25\beta^2)$

Σχόλιο:

α) Από τον παράγοντα $(x-3)$ του β' μέλους $(x-3)\dots + \dots + 9$ καταλαβαίνουμε ότι το α' μέλος είναι: $x^3 - 3^3 = x^3 - 27$. Έτσι ο δεύτερος παράγοντας του β' μέλους συμπληρώνεται εύκολα.

β,γ,δ) Όμοια σκεφτόμαστε και για τα άλλα ερωτήματα.

15. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2 - 2x + 1$

β) $y^2 + 4y + 4$

γ) $\omega^2 - 6\omega + 9$

δ) $a^2 + 10a + 25$

ε) $1 - 4\beta + 4\beta^2$

στ) $9x^4 + 6x^2 + 1$

ζ) $4y^2 - 12y + 9$

η) $16x^2 + 8xy + y^2$

θ) $25a^2 - 10a\beta + \beta^2$

ι) $(a + \beta)^2 - 2(a + \beta) + 1$

ια) $\frac{y^2}{9} - 2y + 9$

ιβ) $x^2 + x + \frac{1}{4}$

ΛΥΣΗ

Πρόκειται για το **ανάπτυγμα ταυτοτήτων της μορφής $(\alpha - \beta)^2$ και $(\alpha + \beta)^2$** . Έτσι, έχουμε:

$$\alpha) \quad x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = (x - 1)^2$$

$$\beta) \quad y^2 + 4y + 4 = y^2 + 2 \cdot y \cdot 2 + 2^2 = (y + 2)^2$$

$$\gamma) \quad \omega^2 - 6\omega + 9 = \omega^2 - 2 \cdot \omega \cdot 3 + 3^2 = (\omega - 3)^2$$

$$\delta) \quad \alpha^2 + 10\alpha + 25 = \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot 5 + 5^2 = (\alpha + 5)^2$$

$$\epsilon) \quad 1 - 4\beta + 4\beta^2 = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot \beta + (2\beta)^2 = (1 - 2\beta)^2$$

$$\sigma\tau) \quad 9x^4 + 6x^2 + 1 = (3x^2)^2 + 2 \cdot 3x^2 \cdot 1 + 1^2 = (3x^2 + 1)^2$$

$$\zeta) \quad 4y^2 - 12y + 9 = (2y)^2 - 2 \cdot 2y \cdot 3 + 3^2 = (2y - 3)^2$$

$$\eta) \quad 16x^2 + 8xy + y^2 = (4x)^2 + 2 \cdot 4x \cdot y + y^2 = (4x + y)^2$$

$$\theta) \quad 25\alpha^2 - 10\alpha\beta + \beta^2 = (5\alpha)^2 - 2 \cdot 5\alpha \cdot \beta + \beta^2 = (5\alpha - \beta)^2$$

$$\iota) \quad (\alpha + \beta)^2 - 2(\alpha + \beta) + 1 = (\alpha + \beta)^2 - 2(\alpha + \beta) \cdot 1 + 1^2 = (\alpha + \beta - 1)^2$$

$$\kappa\alpha) \quad \frac{y^2}{9} - 2y + 9 = \left(\frac{y}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{y}{3} \cdot 3 + 3^2 = \left(\frac{y}{3} - 3\right)^2$$

$$\kappa\beta) \quad x^2 + x + \frac{1}{4} = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

16. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \quad 3x^2 + 24x + 48$$

$$\beta) \quad -y^2 + 4y - 4$$

$$\gamma) \quad 2\alpha^2 - 8\alpha\beta + 8\beta^2$$

$$\delta) \quad 4\alpha^3 + 12\alpha^2 + 9\alpha$$

ΛΥΣΗ

Με τη μέθοδο του κοινού παράγοντα και του αναπτύγματος τέλειου τετραγώνου παίρνουμε:

$$\alpha) \quad 3x^2 + 24x + 48 = 3(x^2 + 8x + 16) = 3(x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2) = 3(x + 4)^2$$

$$\beta) \quad -y^2 + 4y - 4 = -(y^2 - 4y + 4) = -(y^2 - 2 \cdot y \cdot 2 + 2^2) = -(y - 2)^2$$

$$\gamma) \quad 2\alpha^2 - 8\alpha\beta + 8\beta^2 = 2(\alpha^2 - 4\alpha\beta + 4\beta^2) = 2[\alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot 2\beta + (2\beta)^2] = 2(\alpha - 2\beta)^2$$

$$\delta) \quad 4\alpha^3 + 12\alpha^2 + 9\alpha = \alpha(4\alpha^2 + 12\alpha + 9) = \alpha[(2\alpha)^2 + 2 \cdot 2\alpha \cdot 3 + 3^2] = \alpha(2\alpha + 3)^2$$

17. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

$$\alpha) \quad x^2 + 3x + 2$$

$$\beta) \quad y^2 - 4y + 3$$

$$\gamma) \quad \omega^2 + 5\omega + 6$$

$$\delta) \quad \alpha^2 + 6\alpha + 5$$

$$\epsilon) \quad x^2 - 7x + 12$$

$$\sigma\tau) \quad y^2 - y - 12$$

$$\zeta) \quad \omega^2 - 9\omega + 18$$

$$\eta) \quad \alpha^2 + 3\alpha - 10$$

ΛΥΣΗ

Θα χρησιμοποιήσουμε τις ταυτότητες:

$$x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)(x + \beta) \text{ και } x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x - \alpha)(x - \beta)$$

α) $x^2 + 3x + 2 = x^2 + (1 + 2)x + 1 \cdot 2 = (x + 1)(x + 2)$

Άλλος τρόπος: Δύο αριθμοί με άθροισμα 3 και γινόμενο 2 είναι οι 1 και 2.

Επομένως: $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$

β) $y^2 - 4y + 3 = y^2 - (3 + 1)y + 3 \cdot 1 = (y - 3)(y - 1)$

Άλλος τρόπος: Δύο αριθμοί με άθροισμα -4 και γινόμενο 3 είναι οι -1 και -3 .

Επομένως: $y^2 - 4y + 3 = (y - 1)(y - 3)$

γ) $\omega^2 + 5\omega + 6 = \omega^2 + (2 + 3)\omega + 2 \cdot 3 = (\omega + 2)(\omega + 3)$

δ) $\alpha^2 + 6\alpha + 5 = \alpha^2 + (5 + 1)\alpha + 5 \cdot 1 = (\alpha + 5)(\alpha + 1)$

ε) $x^2 - 7x + 12 = x^2 - (4 + 3)x + 4 \cdot 3 = (x - 4)(x - 3)$

στ) Εδώ είναι $\alpha + \beta = -1$ και $\alpha\beta = -12$.

Άρα: $\alpha = -4$ και $\beta = 3$, οπότε: $y^2 - y - 12 = (y - 4)(y + 3)$

ζ) $\omega^2 - 9\omega + 18 = \omega^2 - (6 + 3)\omega + 6 \cdot 3 = (\omega - 6)(\omega - 3)$

Άλλος τρόπος: Δύο αριθμοί με άθροισμα -9 και γινόμενο 18 είναι οι αριθμοί -3 και -6 .

Επομένως: $\omega^2 - 9\omega + 18 = (\omega - 3)(\omega - 6)$

η) Δύο αριθμοί με άθροισμα 3 και γινόμενο -10 είναι οι 5 και -2 .

Επομένως: $\alpha^2 + 3\alpha - 10 = (\alpha + 5)(\alpha - 2)$

18. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

α) $x^2 + (2 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3}$

β) $x^2 + (2\alpha + 3\beta)x + 6\alpha\beta$

γ) $x^2 + (3 - \sqrt{2})x - 3\sqrt{2}$

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με την ταυτότητα $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)(x + \beta)$ παίρνουμε:

α) $x^2 + (2 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = (x + 2)(x + \sqrt{3})$ (Εδώ είναι $\alpha = 2$ και $\beta = \sqrt{3}$)

β) $x^2 + (2\alpha + 3\beta)x + 6\alpha\beta = x^2 + (2\alpha + 3\beta)x + 2\alpha \cdot 3\beta = (x + 2\alpha)(x + 3\beta)$

γ) $x^2 + (3 - \sqrt{2})x - 3\sqrt{2} = x^2 + (3 - \sqrt{2})x + 3 \cdot (-\sqrt{2}) = (x + 3)(x - \sqrt{2})$

19. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $2\omega^2 + 10\omega + 8$

β) $3\alpha^2 - 12\alpha - 15$

γ) $\alpha x^2 - 7\alpha x + 6\alpha$

ΛΥΣΗ

α) $2\omega^2 + 10\omega + 8 = 2(\omega^2 + 5\omega + 4)$.

Δύο αριθμοί με άθροισμα 5 και γινόμενο 4 είναι οι 1 και 5.

Επομένως: $\omega^2 + 5\omega + 4 = (\omega + 1)(\omega + 4)$ και έτσι: $2\omega^2 + 10\omega + 8 = 2(\omega + 1)(\omega + 4)$

Άλλος τρόπος:

$2\omega^2 + 10\omega + 8 = 2(\omega^2 + 5\omega + 4) = 2[\omega^2 + (4 + 1)\omega + 4 \cdot 1] = 2(\omega + 4)(\omega + 1)$.

β) $3\alpha^2 - 12\alpha - 15 = 3(\alpha^2 - 4\alpha - 5)$

Δύο αριθμοί με άθροισμα -4 και γινόμενο -5 είναι οι -5 και 1 . Έτσι:

- $\alpha^2 - 4\alpha - 5 = (\alpha - 5)(\alpha + 1)$

- $3\alpha^2 - 12\alpha - 15 = 3(\alpha^2 - 4\alpha - 5) = 3(\alpha - 5)(\alpha + 1)$

γ) $\alpha x^2 - 7\alpha x + 6\alpha = \alpha(x^2 - 7x + 6)$

Δύο αριθμοί με άθροισμα -7 και γινόμενο 6 είναι οι -1 και -6 . Άρα:

- $x^2 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 6)$

- $\alpha x^2 - 7\alpha x + 6\alpha = \alpha(x^2 - 7x + 6) = \alpha(x - 1)(x - 6)$

20. Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις χωρίς να χρησιμοποιήσετε υπολογιστή τσέπης.

α) $1453 \cdot 1821 - 1453 \cdot 821$

β) $801^2 + 199 \cdot 801$

γ) $998^2 - 4$

δ) $999 \cdot 1001 + 1$

ε) $999^2 + 2 \cdot 999 + 1$

στ) $97^2 + 6 \cdot 97 + 9$

ΛΥΣΗ

Θα προσπαθήσουμε να παραγοντοποιήσουμε τις αριθμητικές παραστάσεις για να έχουμε πιο «εύκολους» αριθμούς.

α) $1453 \cdot 1821 - 1453 \cdot 821 = 1453(1821 - 821) = 1453 \cdot 1000 = 1453 \cdot 10^3$

β) $801^2 + 199 \cdot 801 = 801 \cdot (801 + 199) = 801 \cdot 1000 = 801000 (= 801 \cdot 10^3)$

γ) $998^2 - 4 = 998^2 - 2^2 = (998 - 2)(998 + 2) = 996 \cdot 1000 = 996000$

δ) $999 \cdot 1001 + 1 = (1000 - 1)(1000 + 1) + 1 = 1000^2 - 1^2 + 1 = 1000^2 = (10^3)^2 = 10^6$

ε) $999^2 + 2 \cdot 999 + 1 = (999 + 1)^2 = 1000^2 = (10^3)^2 = 10^6$

στ) Αν θέσουμε $\alpha = 97$, τότε:

$$97^2 + 6 \cdot 97 + 9 = \alpha^2 + 6\alpha + 9 = \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot 3 + 3^2 = (\alpha + 3)^2 = (97 + 3)^2 = 100^2 = (10^2)^2 = 10^4$$

21. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2y^2 - 4y^2 - x^2 + 4$	β) $x^4 - 1 + x^3 - x$	γ) $x^3(x^2 - 1) + 1 - x^2$
δ) $(x^2 + 9)^2 - 36x^2$	ε) $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha + \beta$	στ) $x^2 - 2xy + y^2 - \omega^2$
ζ) $1 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2$	η) $y^2 - x^2 - 10y + 25$	θ) $2(x-1)(x^2-4) - 5(x-1)(x-2)^2$
ι) $(y^2 - 4)^2 - (y+2)^2$	ια) $(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2$	ιβ) $(x^2 + 9)(\alpha^2 + 4) - (\alpha x + 6)^2$

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} \alpha) \quad x^2y^2 - 4y^2 - x^2 + 4 &= (x^2y^2 - 4y^2) - x^2 + 4 = y^2(x^2 - 4) - (x^2 - 4) = (x^2 - 4)(y^2 - 1) = \\ &= (x-2)(x+2)(y-1)(y+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) \quad x^4 - 1 + x^3 - x &= (x^4 - 1) + (x^3 - x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1) + x(x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x^2 + 1 + x) = \\ &= (x-1)(x+1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma) \quad x^3(x^2 - 1) + 1 - x^2 &= x^3(x^2 - 1) - (x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x^3 - 1) = (x-1)(x+1)(x-1)(x^2 + x + 1) = \\ &= (x-1)^2(x+1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta) \quad (x^2 + 9)^2 - 36x^2 &= (x^2 + 9)^2 - (6x)^2 = (x^2 + 9 - 6x)(x^2 + 9 + 6x) = (x^2 + 3^2 - 2 \cdot x \cdot 3)(x^2 + 3^2 + 2 \cdot x \cdot 3) \\ &= (x-3)^2(x+3)^2 \end{aligned}$$

$$\epsilon) \quad \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha + \beta = (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) - \alpha + \beta = (\alpha - \beta)^2 - (\alpha - \beta) = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta - 1)$$

$$\sigma\tau) \quad x^2 - 2xy + y^2 - \omega^2 = (x^2 - 2xy + y^2) - \omega^2 = (x - y)^2 - \omega^2 = (x - y - \omega)(x - y + \omega)$$

$$\begin{aligned} \zeta) \quad 1 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 &= 1 - (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) = 1^2 - (\alpha - \beta)^2 = (1 - (\alpha - \beta))(1 + (\alpha - \beta)) = \\ &= (1 - \alpha + \beta)(1 + \alpha - \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta) \quad y^2 - x^2 - 10y + 25 &= (y^2 - 10y + 25) - x^2 = (y^2 - 2 \cdot y \cdot 5 + 5^2) - x^2 = (y - 5)^2 - x^2 = \\ &= (y - 5 - x)(y - 5 + x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta) \quad 2(x-1)(x^2-4) - 5(x-1)(x-2)^2 &= 2(x-1)(x-2)(x+2) - 5(x-1)(x-2)^2 = \\ &= (x-1)(x-2)[2(x+2) - 5(x-2)] = (x-1)(x-2)(2x+4-5x+10) = \\ &= (x-1)(x-2)(-3x+14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iota) \quad (y^2 - 4)^2 - (y+2)^2 &= (y+2)^2 \cdot (y-2)^2 - (y+2)^2 = (y+2)^2 \cdot [(y-2)^2 - 1] = \\ &= (y+2)^2 \cdot (y-2-1) \cdot (y-2+1) = (y+2)^2 \cdot (y-3) \cdot (y-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ια)} \quad & (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2 - (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - 2\alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + 2\alpha\beta) = \\
 & = [(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) - \gamma^2] \cdot [(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta) - \gamma^2] = [(\alpha - \beta)^2 - \gamma^2] \cdot [(\alpha + \beta)^2 - \gamma^2] = \\
 & = (\alpha - \beta - \gamma)(\alpha - \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha + \beta + \gamma)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ιβ)} \quad & (x^2 + 9)(\alpha^2 + 4) - (\alpha x + 6)^2 = x^2\alpha^2 + 4x^2 + 9\alpha^2 + 36 - (\alpha^2x^2 + 12\alpha x + 36) = \\
 & = x^2\alpha^2 + 4x^2 + 9\alpha^2 + 36 - \alpha^2x^2 - 12\alpha x - 36 = 4x^2 + 9\alpha^2 - 12\alpha x = (2x)^2 + (3\alpha)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3\alpha = \\
 & = (2x - 3\alpha)^2
 \end{aligned}$$

Σημείωση

Οι παραπάνω ασκήσεις είναι επιλεγμένες από το σχολικό βιβλίο.