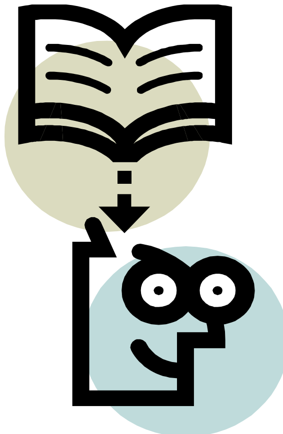
2013

ΘΕΩΡΙΑ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Γ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Η ΤΕΛΕΥΤΑΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

Βαγγέλης Α Νικολακάκης
Μαθηματικός

ΛΙΓΑ ΛΟΓΑ

Η παρούσα εργασία μου δεν στοχεύει απλά στο κυνήγι του 20 , δηλαδή το σύνολο των μονάδων των απολυτήριων εξετάσεων της Γ Γυμνασίου στα Μαθηματικά.

Φιλοδοξεί να φέρει τον μαθητή της Γ Γυμνασίου :

- **Σε επαφή με θέματα που έχουν δοθεί σε εξετάσεις Γυμνασίων.**
- **Σε κατάσταση ετοιμότητας πριν τις εξετάσεις του , λύνοντας και γενικά θέματα ,προετοιμάζοντας έτσι το ''έδαφος'' ….λίγο πριν το Λύκειο.**
- **Σε διαδικασία αυτοαξιολόγησης ,απαντώντας στα διαγωνίσματα της Δ ενότητας.**

Βαγγέλης Α Νικολακάκης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σχόλιο-υπενθύμιση

- Από τα δύο θέματα θεωρίας γράφουμε το ένα και από τα τρία θέματα ασκήσεων γράφουμε τα δύο.
- Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Όλες οι απαντήσεις δίνονται στην κόλλα αναφοράς

Α ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο Αλγεβρικές Παραστάσεις

Α. 1. 2

1. **Τι ονομάζεται αλγεβρική παράσταση;**

- Ονομάζεται αλγεβρική παράσταση κάθε έκφραση που συνδυάζει πράξεις μεταξύ αριθμών και μεταβλητών.

2. **Τι ονομάζεται αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης;**

- Ονομάζεται αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης ο αριθμός που θα προκύψει αν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές της με αριθμούς και εκτελέσουμε τις πράξεις.

3. **Πότε μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται ακέραια;**

Μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται ***ακέραια,*** όταν μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών της είναι φυσικοί αριθμοί.

4. **Τι ονομάζεται μονώνυμο και πια τα μέρη από τα οποία αποτελείται;**

- Ονομάζεται μονώνυμο μια αλγεβρική παράσταση στην οποία σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού μεταξύ αριθμού και μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών.
- Σε ένα μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας που γράφεται πρώτος ονομάζεται συντελεστής του μονωνύμου, ενώ το γινόμενο όλων των μεταβλητών ονομάζεται κύριο μέρος του μονωνύμου.

5. **Ποια μονώνυμα ονομάζονται όμοια;**

- Ονομάζονται όμοια δύο ή περισσότερα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος.

6. **Ποια μονώνυμα ονομάζονται ίσα και ποια αντίθετα;**

- Ονομάζονται ίσα δύο μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή και το ίδιο κύριο μέρος.
- Ονομάζονται αντίθετα δύο μονώνυμα που έχουν αντίθετο συντελεστή και το ίδιο κύριο μέρος.

7. **Τι ονομάζεται βαθμός μονωνύμου ως προς μία μεταβλητή του;**

- Ονομάζεται βαθμός μονωνύμου ως προς μία μεταβλητή του ο εκθέτης της μεταβλητής αυτής.

8. **Τι ονομάζουμε σταθερό και τι μηδενικό μονώνυμο και ποιος ο βαθμός τους;**

- Ονομάζουμε σταθερό μονωνύμο κάθε αριθμό και μηδενικό μονώνυμο τον αριθμό 0.
- Το μηδενικό μονώνυμο δεν έχει βαθμό ενώ όλα τα άλλα σταθερά μονώνυμα είναι μηδενικού βαθμού.

9. **Πως ορίζεται το άθροισμα ομοίων μονωνύμων;**

- Το άθροισμα ομοίων μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο όμοιο με αυτά που έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους.

10. **Τι ονομάζεται αναγωγή ομοίων όρων;**

- Ονομάζεται αναγωγή ομοίων όρων η πρόσθεση ομοίων μονωνύμων.

11. Πως ορίζεται το γινόμενο μονωνύμων;

Το γινόμενο μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο με συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και κύριο μέρος γινόμενο όλων των μεταβλητών τους με εκθέτη κάθε μεταβλητής **το** άθροισμα **των** εκθετών της.

Α. 1. 3

12. Τι ονομάζεται πολυώνυμο;

- Ονομάζεται πολυώνυμο ένα άθροισμα μονωνύμων που δεν είναι όμοια.

13. Τι ονομάζεται βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μία μεταβλητή του;

- Ονομάζεται βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μία μεταβλητή του ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του ως προς την μεταβλητή αυτή.

14. Τι ονομάζουμε σταθερό και τι μηδενικό πολυώνυμο και ποιος ο βαθμός τους;

- Ονομάζουμε σταθερό πολυώνυμο κάθε αριθμό και μηδενικό πολυώνυμο τον αριθμό 0.
- Το μηδενικό πολυώνυμο δεν έχει βαθμό ενώ όλα τα άλλα σταθερά πολυώνυμα είναι μηδενικού βαθμού.

Α. 1. 4

15. Πως πολλαπλασιάζουμε:
α. Μονώνυμο με πολυώνυμο ;

β. Πολυώνυμο με πολυώνυμο ;

Για να πολλαπλασιάσουμε:

α. Μονώνυμο με πολυώνυμο πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου και στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

β. Πολυώνυμο με πολυώνυμο πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με κάθε όρο του άλλου και στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

Α. 1. 5

16. Τι ονομάζεται ταυτότητα;

- Ονομάζεται ταυτότητα κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για κάθε τιμή των μεταβλητών αυτών.

17. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i. $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

ii. $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

iii. $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

iv. $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

v. $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = \alpha^2 - \beta^2$

Απόδειξη

i. $(\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta) = \alpha^2 + \underline{\alpha\cdot\beta} + \underline{\beta\cdot\alpha} + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\cdot\beta + \beta^2$

ii. $(\alpha-\beta)^2 = (\alpha-\beta)\cdot(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \underline{\underline{\alpha\cdot\beta}} - \underline{\underline{\beta\cdot\alpha}} + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\cdot\beta + \beta^2$

iii. $(\alpha+\beta)^3 = (\alpha+\beta)^2\cdot(\alpha+\beta) = (\alpha^2+2\alpha\cdot\beta+\beta^2)\cdot(\alpha+\beta) =$

$\alpha^3 + \underline{2\alpha^2\cdot\beta} + \underline{\underline{\alpha\cdot\beta^2}} + \underline{\beta\cdot\alpha^2} + \underline{\underline{2\alpha\cdot\beta^2}} + \beta^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\cdot\beta + 3\alpha\cdot\beta^2 + \beta^3$

iv. $(\alpha-\beta)^3 = (\alpha-\beta)^2\cdot(\alpha-\beta) = (\alpha^2-2\alpha\cdot\beta+\beta^2)\cdot(\alpha-\beta) =$

$= \alpha^3 - \underline{2\alpha^2\cdot\beta} + \underline{\underline{\alpha\cdot\beta^2}} - \underline{\beta\cdot\alpha^2} + \underline{\underline{2\alpha\cdot\beta^2}} - \beta^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\cdot\beta + 3\alpha\cdot\beta^2 - \beta^3$

v. $(\alpha-\beta)\cdot(\alpha+\beta) = \alpha^2 - \alpha\cdot\beta + \beta\cdot\alpha - \beta^2$

A. 1. 6

18. Τι ονομάζεται παραγοντοποίηση;

- Ονομάζεται παραγοντοποίηση ενός πολυωνύμου ή γενικότερα μιας αλγεβρικής παράστασης η διαδικασία μετατροπής της παράστασης σε γινόμενο.

19. Ποιες είναι οι χαρακτηριστικές περιπτώσεις παραγοντοποίησης;

κοινός παράγοντας

$$\alpha\beta + \alpha\gamma - \alpha\delta = \alpha(\beta+\gamma-\delta)$$

Όταν όλοι οι όροι μιας παράστασης έχουν κοινό παράγοντα, τότε η παράσταση μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα.

ομαδοποίηση

$$\alpha\beta + \alpha\gamma - \delta\beta - \delta\gamma = \alpha(\beta+\gamma) - \delta(\beta+\gamma) = (\beta+\gamma)(\alpha-\delta)$$

Όταν όλοι οι όροι του πολυωνύμου δεν έχουν κοινό παράγοντα, τους χωρίζουμε σε ομάδες έτσι ώστε:

- Κάθε ομάδα που δημιουργούμε να έχει κοινό παράγοντα,
- Οι παραστάσεις που μένουν μετά την εξαγωγή του κοινού παράγοντα να είναι ίδιες

διαφορά τετραγώνων

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$$

Η μέθοδος αυτή παραγοντοποίησης στηρίζεται στην ταυτότητα

$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta),$ στην οποία αν εναλλάξουμε τα μέλη μετατρέπουμε μια διαφορά δύο ***τελείων τετραγώνων*** σε γινόμενο.

άθροισμα ή διαφορά κύβων

Η παραγοντοποίηση του αθροίσματος ή της διαφοράς δύο κύβων βασίζεται στις δύο γνωστές μας ταυτότητες:

$$(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) = \alpha^3-\beta^3$$

$$(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) = \alpha^3+\beta^3$$

$$\alpha^3-\beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$$

$$\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$$

Σε κάθε μια από τις οποίες αν εναλλάξουμε τα μέλη μετατρέπουμε τη διαφορά ή το άθροισμα δύο ***κύβων*** σε γινόμενο.

Ανάπτυγμα τετραγώνου

Αν το πολυώνυμο είναι τριώνυμο και έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \quad ή \quad \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2,$$

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$$
$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$$

τότε θα γίνει αντίστοιχα

$$(\alpha + \beta)^2 \quad ή \quad (\alpha - \beta)^2,$$

που είναι γινόμενα παραγόντων αφού :

$(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta)$ ***και*** $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta)$

Παραγοντοποιήσει τριωνύμου της μορφής $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$

Αν το πολυώνυμο είναι τριώνυμο και έχει τη μορφή $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ έχουμε:

$$x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)\cdot(x + \beta)$$

$x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta =$

$\underline{x^2} + \underline{x\,\alpha} + \underline{x\,\beta} + \underline{\underline{\alpha\beta}} =$ ***Ομαδοποίηση***

$x(x + \alpha) + \beta(x + \alpha) =$ ***Κοινός παράγοντας***

$(x + \alpha)(x + \beta)$

Α. 1. 9

20. Πότε μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται ρητή;

Μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται ρητή όταν είναι κλάσμα με όρους πολυώνυμα.

21. Πότε μια αλγεβρική παράσταση ορίζεται;

Μια αλγεβρική παράσταση ορίζεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών που περιέχει εκτός απ' αυτές που μηδενίζουν τον παρανομαστή αφού όπως γνωρίζουμε δεν ορίζεται κλάσμα με παρονομαστή μηδέν.

22. Πότε μια ρητή αλγεβρική παράσταση μπορεί να απλοποιηθεί;

Όπως μια αριθμητική παράσταση, έτσι και μια ρητή παράσταση, μπορεί να απλοποιηθεί, αν ο αριθμητής και ο παρονομαστής της είναι γινόμενα και έχουν κοινό παράγοντα.

Α. 1. 10

23. Πως κάνουμε πράξεις με ρητές αλγεβρικές παραστάσεις;

Για να κάνουμε πράξεις με ρητές αλγεβρικές παραστάσεις ακολουθούμε τους κανόνες που ισχύουν για τις πράξεις των κλασμάτων.

Δηλαδή: $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\gamma}{\beta} = \dfrac{\alpha + \gamma}{\beta}$ ***και*** $\dfrac{\alpha}{\beta} - \dfrac{\gamma}{\beta} = \dfrac{\alpha - \gamma}{\beta}$

$\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\gamma}{\delta} = \dfrac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\beta\delta}$ ***και*** $\dfrac{\alpha}{\beta} - \dfrac{\gamma}{\delta} = \dfrac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\beta\delta}$ $\quad \beta\delta \neq 0$

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta} \quad \textit{και} \quad \frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma} \quad \beta\gamma\delta\neq 0$$

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}=\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma} \quad \beta\gamma\delta\neq 0$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο} Εξισώσεις Ανισώσεις

Α. 2. 2

24. Τι ονομάζεται εξίσωση 2^{ου} βαθμού, με έναν άγνωστο ;

- Ονομάζεται εξίσωση δευτέρου βαθμού με έναν άγνωστο κάθε ισότητα της μορφής
- $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με α, β, γ πραγματικούς αριθμούς και $\alpha \neq 0$.
- Οι αριθμοί α και β ονομάζονται συντελεστές του δευτεροβαθμίου και πρωτοβαθμίου όρου αντίστοιχα και ο αριθμός γ σταθερός όρος.
- Επίλυση μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού λέγεται η διαδικασία εκείνη με την
- οποία βρίσκουμε τις τιμές του x που την επαληθεύουν.

25. Πότε μία εξίσωση δευτέρου βαθμού:

α. έχει δύο άνισες ρίζες;

β. έχει μια διπλή ρίζα ;

γ. δεν έχει ρίζες;

Η εξίσωση $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ με α, β, γ πραγματικούς αριθμούς, $\alpha \neq 0$ και διακρίνουσα

$$\mathbf{\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma:}$$

α. έχει δύο ρίζες άνισες που δίνονται από τον τύπο $x = \frac{\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, όταν $\mathbf{\Delta > 0}$

β. έχει δύο ρίζες ίσες που δίνονται από τον τύπο $x = \frac{-\beta}{2\alpha}$, όταν $\mathbf{\Delta = 0}$

γ. δεν έχει ρίζες, όταν $\mathbf{\Delta < 0}$

26. Πως παραγοντοποιείται το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ όταν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει λύσεις τις ρ_1, ρ_2;

- Αν $ρ_1$, $ρ_2$ είναι λύσεις της εξίσωσης $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$ το τριώνυμο $αx^2 + βx + γ$ παραγοντοποιείται

  σύμφωνα με τον τύπο:

$$αx^2 + βx + γ = α\cdot(x- ρ_1)\cdot(x-ρ_2)$$

Α. 2. 4

27. Τι ονομάζεται κλασματική εξίσωση και πότε ορίζεται αυτή;

Ονομάζεται κλασματική εξίσωση, κάθε εξίσωση που περιέχει άγνωστο στον παρανομαστή.

Για να ορίζεται μια κλασματική εξίσωση, πρέπει οι παρανομαστές των κλασμάτων της να είναι διάφοροι του μηδενός.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

Α. 3. 2

28. Τι ονομάζεται;
α. Γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y;

β. Λύση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y;

γ. Επίλυση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y;

α. Ονομάζεται γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ένα σύστημα της

μορφής, $\begin{cases} αx + αy = γ \\ α΄x + β΄y = γ΄ \end{cases}$ με ένα τουλάχιστον από τα α, β, α΄, β΄ $\neq 0$.

β. Ονομάζεται λύση του γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y

κάθε ζεύγος (x_0, y_0) που επαληθεύει τις εξισώσεις του.

γ. Ονομάζεται επίλυση του γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y η διαδικασία που ακολουθούμε για να βρούμε κάθε ζεύγος (x_0, y_0) που επαληθεύει τις εξισώσεις του.

29. Πως γίνεται η γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y και πότε αυτό έχει μία λύση, είναι αδύνατο, είναι αόριστο;

Για τη γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες που παριστάνουν τις εξισώσεις του συστήματος και:

- αν τέμνονται το σύστημα έχει ***μία λύση*** τις συντεταγμένες του **κοινού** τους σημείου.
- αν είναι **παράλληλες** δεν έχουν κοινό σημείο, οπότε το σύστημα ***δεν έχει λύση*** **και λέμε ότι** είναι ***αδύνατο.***
- Αν ***συμπίπτουν (ταυτίζονται)*** έχουν όλα τα σημεία τους κοινά και επομένως το σύστημα έχει ***άπειρες λύσεις*** **και** λέμε ότι είναι ***αόριστο.***

Α. 4. 1

30. Τι γνωρίζεται για την συνάρτηση y = αx^2 με α $>$ 0;

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης y = αx^2 με α $>$ 0 είναι μια καμπύλη που ονομάζεται **παραβολή**.
- Η παραβολή που είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης y = αx^2 με α $>$ 0 έχει ***κορυφή*** το σημείο O(0, 0) και βρίσκεται από τον άξονα x΄x και πάνω, που σημαίνει ότι για οποιαδήποτε τιμή του x ισχύει y $\geq$ 0.
- Η συνάρτηση y = αx^2 με α $>$ 0 παίρνει **ελάχιστη *τιμή*** y = 0, όταν x = 0,
- Για αντίθετες τιμές του x αντιστοιχεί η ίδια τιμή του y, που σημαίνει ότι η παραβολή y = αx^2 με α $>$ 0 έχει ***άξονα συμμετρίας*** τον άξονα y΄y.
- Όταν η τιμή του α αυξάνεται, τότε το «άνοιγμα» της παραβολή «κλείνει».

31. Τι γνωρίζεται για την συνάρτηση y = αx^2 με α $<$ 0;

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης y = αx^2 με α $<$ 0 είναι μια καμπύλη που ονομάζεται **παραβολή**.
- Η παραβολή που είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης y = αx^2 με α $<$ 0 έχει ***κορυφή*** το σημείο O(0, 0) και βρίσκεται από τον άξονα x΄x και κάτω, που σημαίνει ότι για οποιαδήποτε τιμή του x ισχύει y $\leq$ 0.
- Η συνάρτηση y = αx^2 με α $>$ 0 παίρνει **μέγιστη *τιμή*** y = 0, όταν x = 0,
- Για αντίθετες τιμές του x αντιστοιχεί η ίδια τιμή του y, που σημαίνει ότι η παραβολή y = αx^2 με α $<$ 0 έχει ***άξονα συμμετρίας*** τον άξονα y΄y.
- Όταν η απόλυτη τιμή του α αυξάνεται, τότε το «άνοιγμα» της παραβολή «κλείνει».

Α. 4. 2

32. Ποια συνάρτηση ονομάζεται τετραγωνική;

Είναι κάθε συνάρτηση της μορφής ψ=αχ^2+βχ+γ

33. Τι γνωρίζεται για τη συνάρτησης ψ=αχ^2+βχ+γ ;

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης y = αx^2 + βx + γ με α $\neq$ 0 είναι παραβολή με:

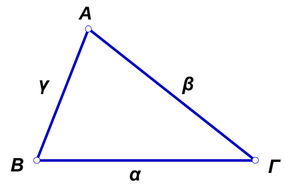
- Κορυφή το σημείο Κ$\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha},\ -\dfrac{\Delta}{4\alpha}\right)$ όπου Δ = β^2 – 4αγ
- Άξονα συμμετρίας την κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την κορυφή Κ και έχει εξίσωση $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$

- Αν $\alpha>0$, η συνάρτηση $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ παίρνει ελάχιστη τιμή $y=-\dfrac{\Delta}{4\alpha}$ όταν $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$
- Αν $\alpha<0$, η συνάρτηση $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ παίρνει μέγιστη τιμή $y=-\dfrac{\Delta}{4\alpha}$ όταν $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο Γεωμετρία

Β. 1. 1

34. Τι ονομάζεται Τρίγωνο και ποια τα κύρια στοιχεία του;

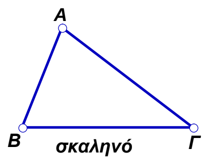


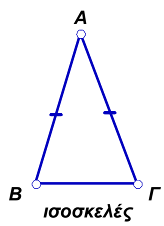
- Ονομάζεται ***τρίγωνο*** το επίπεδο σχήμα που ορίζεται από τρία μη συνευθειακά σημεία τα οποία συνδέονται με ευθύγραμμα τμήματα.
- Τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου είναι, οι πλευρές του και οι γωνίες του
- ***Πλευρές*** του τριγώνου ονομάζονται τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τις κορυφές του.
- ***Γωνίες*** του τριγώνου ονομάζονται οι γωνίες που ορίζονται από τις πλευρές του.

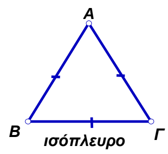
35. Ποια είναι τα είδη των τριγώνων ως προς τις πλευρές, και ως προς τις γωνίες τους;

Ένα τρίγωνο που εξετάζεται ως προς τις πλευρές του λέγεται:

- ***σκαληνό***, αν οι πλευρές του είναι άνισες,
- ***ισοσκελές***, αν δύο πλευρές του είναι ίσες,
- ***ισόπλευρο***, αν και οι τρεις πλευρές του είναι ίσες.

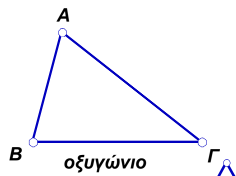


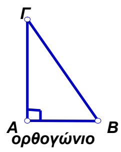


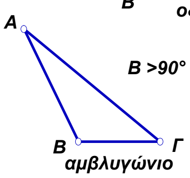


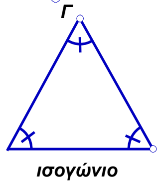
Ένα τρίγωνο που εξετάζεται ως προς τις γωνίες του λέγεται:

- ***οξυγώνιο***, αν όλες του οι γωνίες είναι οξείες,
- ***ορθογώνιο***, αν μία γωνία του είναι ορθή,
- ***αμβλυγώνιο***, αν μία γωνία του είναι αμβλεία.
- ***Ισογώνιο*** αν όλες οι γωνίες του είναι ίσες



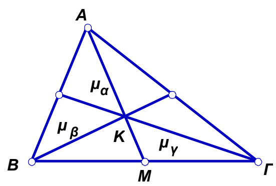




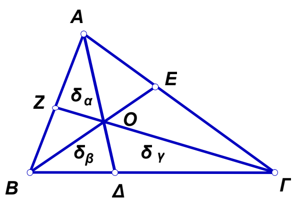


36. Τι ονομάζεται διάμεσος, διχοτόμος, ύψος, τριγώνου.

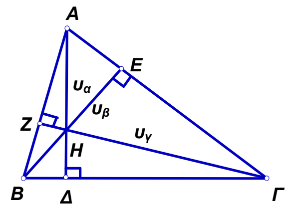
- ***Διάμεσος*** ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει μια κορυφή του με το μέσο της απέναντι πλευράς.Κάθε τρίγωνο ΑΒΓ έχει τρεις διάμεσους που συμβολίζονται μ_α , μ_β , μ_γ αντίστοιχα και διέρχονται το ίδιο σημείο.



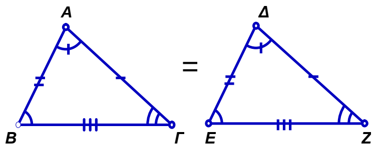
- ***Διχοτόμος*** μιας γωνίας ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει την κορυφή της γωνίας με την απέναντι πλευρά και διχοτομεί τη γωνία αυτή.
  Κάθε τρίγωνο ΑΒΓ έχει τρεις διχοτόμους που συμβολίζονται δ_α, δ_β, δ_γ αντίστοιχα και διέρχονται από το ίδιο σημείο.



- ***Ύψος*** ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από μια κορυφή του κάθετο προς την ευθεία της απέναντι πλευράς. Κάθε τρίγωνο ΑΒΓ έχει τρία ύψη που συμβολίζονται $\boldsymbol{υ_α}$, $\boldsymbol{υ_β}$, $\boldsymbol{υ_γ}$ αντίστοιχα και διέρχονται το ίδιο σημείο.



37. Πότε δύο τρίγωνα λέγονται ίσα ;



Δύο τρίγωνα λέγονται ίσα, όταν έχουν τις γωνίες τους ίσες και τις ομόλογες πλευρές τους (πλευρές απέναντι από ίσες γωνίες) ίσες μία προς μία.

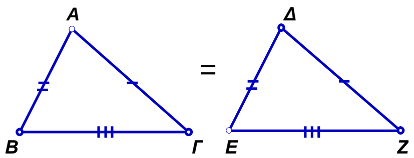
Έτσι αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα τότε: $\left.\begin{matrix}\hat{A}=\hat{\Delta}\\ \hat{B}=\hat{E}\\ \hat{\Gamma}=\hat{Z}\end{matrix}\right\}$ Γωνίες

$\left.\begin{matrix}AB=\Delta E\\ B\Gamma=EZ\\ A\Gamma=\Delta Z\end{matrix}\right\}$ Ομόλογες πλευρές

38. **Πότε δύο τρίγωνα είναι ίσα;** ***(Κριτήρια ισότητας τριγώνων)***

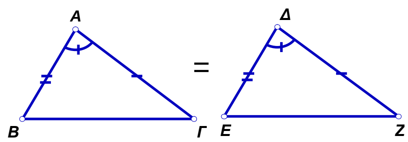
Κριτήριο (Π. Π. Π.)

- Δύο τρίγωνα είναι ίσα, όταν οι τρεις πλευρές του ενός είναι ίσες με τις τρεις πλευρές του άλλου μία προς μία.
- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν:



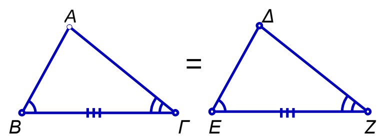
$\left.\begin{matrix}AB=\Delta E\\ B\Gamma=EZ\\ A\Gamma=\Delta Z\end{matrix}\right\}$ οπότε είναι $\overset{\triangle}{AB\Gamma}=\overset{\triangle}{\Delta EZ}$

- ***Κριτήριο (Π. Γ. Π.)***
- Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν οι δύο πλευρές και η περιεχόμενη σ' αυτές γωνία του ενός είναι ίσες με τις δύο πλευρές και την περιεχόμενη σ' αυτές γωνία του άλλου αντίστοιχα.
- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν:



$\left.\begin{matrix}AB=\Delta E\\ A\Gamma=\Delta Z\\ \hat{A}=\hat{\Delta}\end{matrix}\right\}$ οπότε είναι $\overset{\triangle}{AB\Gamma}=\overset{\triangle}{\Delta EZ}$

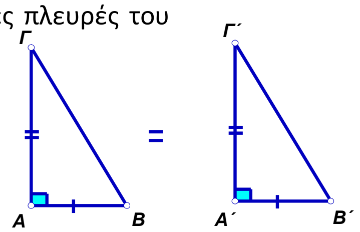
- ***Κριτήριο (Π. Γ. Γ.)***
- Δύο τρίγωνα είναι ίσα, όταν η μία πλευρά και οι προσκείμενες σ' αυτήν γωνίες του ενός είναι ίσες με την μία πλευρά και τις προσκείμενες σ' αυτήν γωνίες του άλλου αντίστοιχα.



- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν: $\left.\begin{array}{l} B\Gamma = EZ \\ \hat{B} = \hat{E} \\ \hat{\Gamma} = \hat{Z} \end{array}\right\}$ οπότε είναι $\overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{\Delta EZ}$

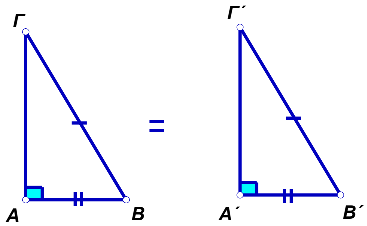
39. Πότε δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα; (Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων)

- Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν οι δύο κάθετες πλευρές του ενός είναι ίσες με τις δύο κάθετες πλευρές του άλλου.
- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν :



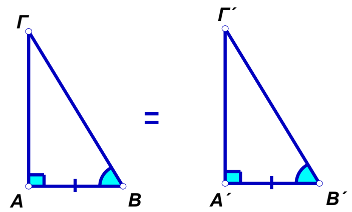
$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ \\ AB = A'B' \\ A\Gamma = A'\Gamma' \end{array}\right\} \text{ οπότε είναι } \overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$$

- Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν η υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά του ενός είναι ίσες με την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά του άλλου.
- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν :



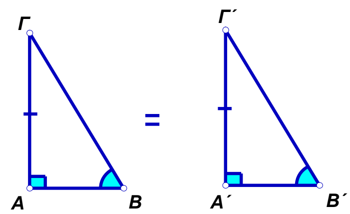
$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ \\ AB = A'B' \\ B\Gamma = B'\Gamma' \end{array}\right\} \text{ οπότε είναι } \overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$$

- Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν η μία κάθετη πλευρά και η προσκείμενη της οξεία γωνία του ενός είναι ίσες με τη μία κάθετη πλευρά και την προσκείμενη της οξεία γωνία του άλλου.
- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν:



$$1 \quad \left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ \\ AB = A'B' \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{array}\right\} \text{ οπότε είναι } \overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$$

- Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν η μία κάθετη πλευρά και η απέναντι της οξεία γωνία του ενός είναι ίσες με την μία κάθετη πλευρά και την απέναντι της οξεία γωνία του άλλου.
- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν:

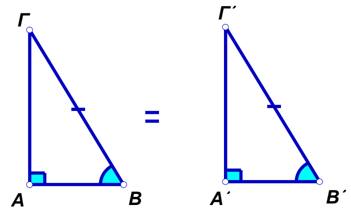


$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ \\ A\Gamma = A'\Gamma' \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{array}\right\} \text{ οπότε είνα } \overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$$

- Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν η υποτείνουσα και μία οξεία γωνία του ενός είναι ίσες με την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία του άλλου.

- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' = 90^o \\ B\Gamma = B'\Gamma' \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{array}\right\} \text{ οπότε είναι } \overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$$



40. Ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος ;

- Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.
- Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος.

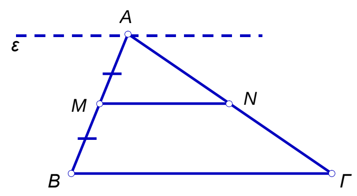
41. Ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου μιας γωνίας;

- Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.
- Κάθε σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές μιας γωνίας είναι σημείο της διχοτόμου της.

42. Να αποδείξετε ότι αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του , αυτή διέρχεται και από το μέσο της τρίτης πλευράς.

Απόδειξη

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και το σημείο Μ μέσο της πλευράς του ΑΒ. Από το Μ φέρουμε παράλληλη προς την ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ν. Θα δείξουμε ότι ΑΝ = ΝΓ. Από το σημείο Α φέρνουμε μια βοηθητική ευθεία ε // ΒΓ. Οι παράλληλες ευθείες ε, ΜΝ και ΒΓ ορίζουν ίσα τμήματα στην ΑΒ, άρα θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ΑΓ. Επομένως ΑΝ = ΝΓ.



Β. 1. 2

43. Τι ονομάζεται λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων και με τι ισούται;

- Λόγος ενός ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, που συμβολίζεται $\frac{\Gamma\Delta}{AB}$, ονομάζεται ο αριθμός λ για τον οποίο ισχύει ΓΔ=λ·ΑΒ.
- Ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων ισούται με το λόγο των μηκών τους *εφόσον* έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης.

44. Πότε τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα β, δ;

Τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα β και δ όταν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

Η ισότητα $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ ονομάζεται **αναλογία** με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα ***α,*** *β,* ***γ, δ.***

Τα ευθύγραμμα τμήματα **α, δ** ονομάζονται ***άκροι όροι,*** ενώ τα ευθύγραμμα τμήματα ***β, γ*** ονομάζονται ***μέσοι όροι*** της αναλογίας.

45. Ποιες είναι οι σημαντικότερες ιδιότητες των αναλογιών ;

Σε μια αναλογία με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα ***α, β, γ, δ*** εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των αναλογιών που ισχύουν και στους αριθμούς χρησιμοποιώντας τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων. **Οι σημαντικότερες από τις ιδιότητες αυτές είναι:**

- Σε κάθε αναλογία το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων.

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma$$

- Σε κάθε αναλογία μπορούμε να εναλλάξουμε τους μέσους ή τους άκρους όρους και να προκύψει πάλι αναλογία.

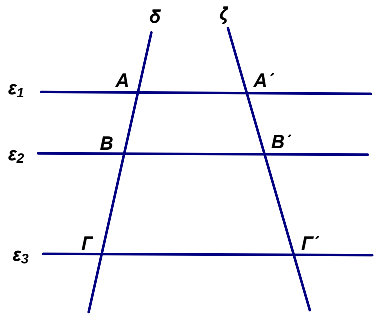
$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta} \text{ ή } \frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$$

- Λόγοι ίσοι μεταξύ τους είναι και ίσοι με το λόγο που έχει αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και παρονομαστή το άθροισμα των παρονομαστών.

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε } \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

Β. 1. 3

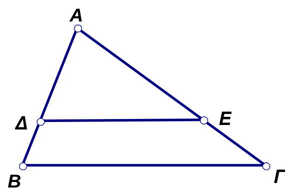
46. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Θαλή και τις πρόταση που προκύπτουν από αυτό για ένα τρίγωνο.



- Όταν παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μια είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα της άλλης.

  Δηλαδή αν $\varepsilon_1 \,//\, \varepsilon_2 \,//\, \varepsilon_3$ τότε $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\dfrac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$

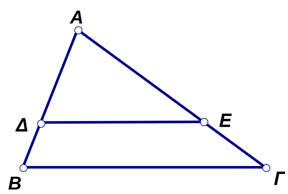
- Κάθε παράλληλη προς μια πλευρά τριγώνου χωρίζει τις άλλες πλευρές του, σε ίσους λόγους.



  Δηλαδή ***αν ΔΕ // ΒΓ τότε*** $\dfrac{A\Delta}{\Delta B}=\dfrac{AE}{E\Gamma}$

Αντίστροφα:

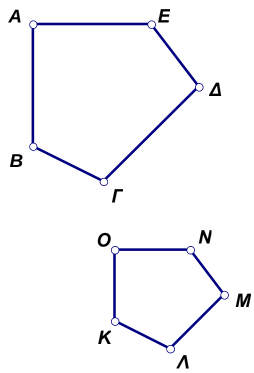
- Αν μια ευθεία που τέμνει δύο πλευρές τριγώνου τις χωρίζει σε ίσους λόγους, είναι παράλληλη προς την τρίτη πλευρά.



  Δηλαδή ***αν*** $\dfrac{A\Delta}{\Delta B}=\dfrac{AE}{E\Gamma}$ ***τότε ΔΕ // ΒΓ***

Β. 1. 4

47. Πότε δύο πολύγωνα λέγονται όμοια;



Δύο πολύγωνα λέγονται ***όμοια***, όταν το ένα είναι ***μεγέθυνση*** ή ***σμίκρυνση*** του άλλου. Αυτό σημαίνει ότι

έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και τις ομόλογες(αντίστοιχες) πλευρές τους ανάλογες.

Έτσι τα πολύγωνα ΑΒΓΔΕ και ΟΚΛΜΝ που έχουν,

$\hat{A} = \hat{O}$, $\hat{B} = \hat{K}$, $\hat{\Gamma} = \hat{\Lambda}$, $\hat{\Delta} = \hat{M}$, $\hat{E} = \hat{N}$

και $\dfrac{AB}{OK} = \dfrac{B\Gamma}{K\Lambda} = \dfrac{\Gamma\Delta}{\Lambda M} = \dfrac{\Delta E}{MN} = \dfrac{EA}{NO} = \lambda$ είναι όμοια.

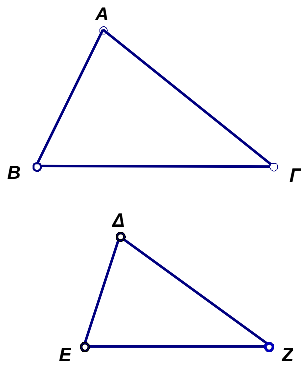
Το λ ονομάζεται λόγος ομοιότητας.

48. Ποιες προτάσεις προκύπτουν από τον ορισμό της ομοιότητα δύο πολυγώνων;

Από τον ορισμό της ομοιότητας δύο πολυγώνων προκύπτουν οι επόμενες προτάσεις.

- Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια μεταξύ τους.
- Δύο ίσα πολύγωνα είναι και όμοια, με λόγο ομοιότητας 1.
- Κάθε πολύγωνο είναι όμοιο με τον εαυτό του.
- Δύο πολύγωνα όμοια προς τρίτο είναι και όμοια μεταξύ τους.

49. Πότε δύο τρίγωνα λέγονται όμοια;



- Δύο τρίγωνα λέγονται ***όμοια*** όταν έχουν τις γωνίες τους ***ίσες*** μία προς μία και τις ***ομόλογες*** (αντίστοιχες) πλευρές τους ανάλογες. Δηλαδή

  αν $\triangle AB\Gamma \sim \triangle \Delta EZ$, τότε $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$

  και $\dfrac{AB}{\Delta E} = \dfrac{B\Gamma}{EZ} = \dfrac{A\Gamma}{\Delta Z}$ Ο λόγος των αντιστοίχων (ομολόγων) πλευρών

τους ονομάζεται λόγος ομοιότητας και συμβολίζεται με λ.

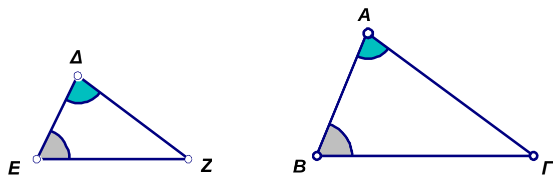
50.* Πότε δύο τρίγωνα είναι όμοια;** ***(Κριτήριο ομοιότητας τριγώνων)

Δύο τρίγωνα είναι όμοια, όταν δύο γωνίες του ενός είναι ίσες με δύο γωνίες του άλλου μία προς μία.

Αν δηλαδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν

$\hat{A} = \hat{\Delta}$, $\hat{B} = \hat{E}$, τότε $\triangle AB\Gamma \sim \triangle \Delta EZ$,,

και επομένως $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$ και $\dfrac{AB}{\Delta E} = \dfrac{B\Gamma}{EZ} = \dfrac{A\Gamma}{\Delta Z}$



Β. 1. 5Με τι ισούται ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων;

- Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο} Τριγωνομετρία

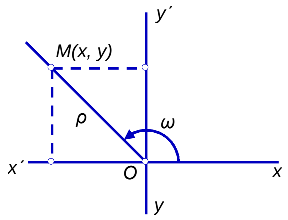
Β. 2. 1

51. Πως ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οποιασδήποτε γωνίας;

- Έστω ω ($0° \leqq \omega \leqq 180°$)η γωνία που παράγεται από τον ημιάξονα Οx, όταν αυτός στραφεί κατά τη θετική φορά.

- Αν πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο Μ(x, y) με $x\hat{O}M$ = ω και ΟΜ = ρ = $\sqrt{x^2 + y^2}$ τότε ορίζουμε:

- $ημω = \frac{y}{ρ}$
- $συνω = \frac{x}{ρ}$
- $εφω = \frac{y}{x}$

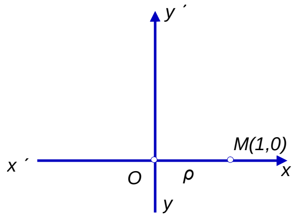


- Το ημω και συνω παίρνουν τιμές από το – 1 έως το +1.
- Είναι δηλαδή $-1 \leqq ημω \leqq 1$ και $-1 \leqq συνω \leqq 1$
- Η εφω παίρνει οποιαδήποτε τιμή.
- Αν το Μ(x, y) βρίσκεται στο 1^{ο} τεταρτημόριο, τότε ημω> 0, συνω>0, εφω>0
- Αν το Μ(x, y) βρίσκεται στο 2^{ο} τεταρτημόριο, τότε ημω> 0, συνω<0, εφω<0

52. Ποιοι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας ω = 0° ή ω = 90° ή ω = 180°;

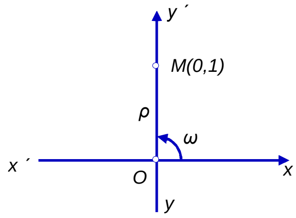
Αν το Μ είναι σημείο του ημιάξονα Οx π.χ. το Μ(1,0), τότε ω = $x\hat{O}M$ = 0° και ρ = ΟΜ=1 οπότε έχουμε:

- ημ0° = $\frac{y}{ρ} = \frac{0}{1} = 0$
- συν0° = $\frac{x}{ρ} = \frac{1}{1} = 1$
- $εφ0° = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$



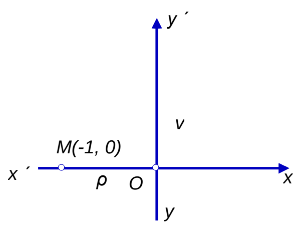
Αν το Μ είναι σημείο του ημιάξονα Οy π.χ. το Μ(0, 1), τότε ω = $x\hat{O}M$ = 90° και ρ = ΟΜ=1 οπότε έχουμε:

- ημ90° = $\frac{y}{ρ} = \frac{1}{1} = 1$
- συν90° = $\frac{x}{ρ} = \frac{0}{1} = 0$
- εφ90° δεν ορίζεται, αφού x = 0



Αν το Μ είναι σημείο του ημιάξονα Οx΄ π.χ. το σημείο Μ(–1, 0), τότε ω = $x\hat{O}M$ = 180° και ρ = ΟΜ = 1 οπότε έχουμε:

- ημ180° = $\frac{y}{ρ} = \frac{0}{1} = 0$
- συν180° = $\frac{x}{ρ} = \frac{-1}{1} = 1$
- $εφ180° = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$



53. Ποιες σχέσεις συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς δύο παραπληρωματικών γωνιών;

Για δύο παραπληρωματικές γωνίες ω και 180° - ω ισχύουν:

- ημ(180° – ω) = ημω
- συν(180° – ω) = –συνω
- εφ(180° – ω) = –εφω

54. Να αποδείξετε ότι για μια οποιαδήποτε γωνία ω ισχύουν οι τύποι:

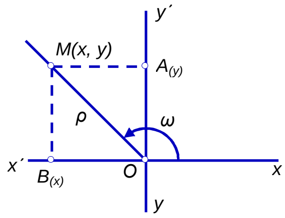
α. $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ **και** **β.** $εφω = \frac{ημω}{συνω}$

Απόδειξη α.

$$ημ^2ω + συν^2ω = \left(\frac{y}{ρ}\right)^2 + \left(\frac{x}{ρ}\right)^2 = \frac{y^2}{ρ^2} + \frac{x^2}{ρ^2} =$$

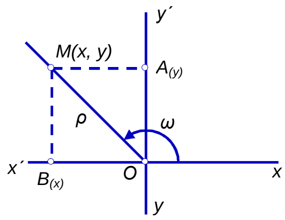
$$\frac{y^2 + x^2}{ρ^2} = \frac{|y|^2 + |x|^2}{ρ^2} = \frac{OA^2 + OB^2}{ρ^2}$$

$$\frac{OA^2 + AM^2}{ρ^2} = \frac{OM^2}{ρ^2} = \frac{ρ^2}{ρ^2}$$



Απόδειξη β.

$$\frac{ημω}{συνω} = \frac{\frac{y}{ρ}}{\frac{x}{ρ}} = \frac{y \cdot ρ}{x \cdot ρ} = \frac{y}{x} = εφω$$



55. Να διατυπώσετε τον νόμο των ημιτόνων.

- Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\frac{α}{ημA} = \frac{β}{ημB} = \frac{γ}{ημγ}$

56. Να διατυπώσετε τον νόμο των συνημιτόνων.

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι σχέσεις

- $α^2 = β^2 + γ^2 – 2βγσυνA$
- $β^2 = γ^2 + α^2 – 2γασυνB$
- $γ^2 = α^2 + β^2 – 2αβσυνΓ$

Β ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ... από εξετάσεις

ΑΛΓΕΒΡΑ

1. 1.Να αποδείξετε την ταυτότητα (α - β) (α + β) = $α^2 – β^2$

2.Να χαρακτηρίσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις παρακάτω ισότητες

α) $(α + β)^2 = α^2 + β^2 + 2αβ$

β) $(α - β)^2 = α^2 – β^2 + 2αβ$

γ) $(α + β)^3 = α^3 + 3αβ^2 +3 α^2β +β^3$

δ) $(α + β)^3 = α^3 – 3 α^2β -3 αβ^2 + β^3$

2. Α) Να αποδείξετε την ταυτότητα $(α+β)^2 = α^2 + 2αβ + β^2$.

Β) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) $(α – β)^2 = α^2 – β^2$

β) $(α – β)^3 = α^3 + 3α^2β + 3αβ^2+β^3$

γ) Η εξίσωση $x^2 – α = 0$ έχει δυό λύσεις $x = \sqrt{α}$ ή $x = - \sqrt{α}$

δ) Αν Δ η διακρίνουσα της εξίσωσης $αx^2 + βx + γ = 0$, $α \neq 0$
τότε αν Δ = 0, η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις .

3. **Α.** Να αποδείξετε την ταυτότητα $\left(α-β\right)^2 = α^2\text{-}2αβ + β^2$.

Β. Να συμληρώσετε τις παρακάτω ταυτότητες.

α) $α^2 - 2αβ + β^2 =$........ δ) $(α - β)^2 =$.......

β) $α^2 + 2αβ + β^2 =$........ ε) $(α + β)(α - β) =$....

γ) $(α - β)^3 =$.....

4. **α**.Να αποδείξετε την ταυτότητα :$(α\text{-}β)^2=α^2\text{-}2αβ+β^2$.

β.Να χαρακτηρίσετε ως σωστες η λάθος τις παρακατω προτάσεις:

1.το κλάσμα Α= $\dfrac{x^2 + 2012}{x^2 - 4}$,ορίζεται για καθε χ≠2 και χ≠-2 οπου χ πραγματικός αριθμός.

2.ισχυει :$(-2χ)^3=8χ^3$.

3.ισχυει $\dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

4.αν $Α(χ)=χ^3 - x^2 + 2012$,τότε $Α(-χ)= -x^3 + x^2 + 2012$.

5.ισχύει :$(-χ-3)^2 = (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$.

5. **Α.** Να αποδείξετε ότι: $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$.

Β. Έστω η εξίσωση 2^{ου} βαθμού $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ (\alpha\neq 0)$ και Δ η διακρίνουσά της. Στον παρακάτω πίνακα να αντιστοιχίσεις καθεμιά από τις περιπτώσεις της **Στήλης Α**, με ένα μόνο συμπέρασμα της **Στήλης Β.**

ΣΤΗΛΗ Α	**ΣΤΗΛΗ Β**
α. $\Delta>0$	**1.** Η (1) έχει μία τουλάχιστον λύση
β. $\Delta=0$	**2.** Η (1) έχει δύο άνισες λύσεις
γ. $\Delta<0$	**3.** Η (1) έχει μία διπλή λύση
δ. $\Delta\geq 0$	**4.** Η (1) δεν έχει πραγματικές λύσεις

Γ. Να χαρακτηρίσεις τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας **στο φύλλο των απαντήσεών σου**, την λέξη **Σωστό ή Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

1. Ισχύει $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$ για κάθε τιμή των πραγματικών α και β.
2. Η ισότητα $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2$ ισχύει για κάθε τιμή των πραγματικών α και β.
3. Η ευθεία $\varepsilon:\psi=3x-5$ παριστάνει ευθεία που δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
4. Αν $a>\beta$ και $\gamma<0$, τότε $\alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\gamma$.
5. Αν οι εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος παριστάνονται από δύο ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ οι οποίες ταυτίζονται, τότε το σύστημα αυτό θα είναι αόριστο.

6. **Α)** Πότε μια ισότητα ονομάζεται ταυτότητα;

Β) Να αποδείξετε την ταυτότητα $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

Γ) Τι ονομάζουμε μονώνυμο ;

Δ) Σε κάθε γινόμενο της Α στήλης να αντιστοιχίσετε ένα μόνο ανάπτυγμα από την Β στήλη, ώστε να προκύψουν ταυτότητες.

Α ΣΤΗΛΗ	**Β ΣΤΗΛΗ**
1) $(\alpha+\beta)^2$ 2) $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ 3) $(\beta-\alpha)^3$ 4) $(-\alpha+\beta)^2$	i) $\alpha^2-\beta^2$ ii) $\alpha^2+\beta^2$ iii) $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ iv) $\beta^3-3\beta^2\alpha+3\beta\alpha^2-\alpha^3$ v) $\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$ vi) $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

7. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστή» ή «Λάθος» καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις :

1. Η αλγεβρική παράσταση $(+3)\alpha\beta^2$ είναι **μονώνυμο**
2. Το πολυώνυμο $2\alpha x^2-5\alpha^3x+6\alpha x^4$ είναι 5^{ου} βαθμού ως προς **α και x**
3. Τα μονώνυμα $5xy^2$ και $-5yx^2$ είναι **αντίθετα**
4. Το πολυώνυμο $9\alpha^2+4\beta^2+12\alpha\beta$ αποτελεί **ανάπτυγμα τετραγώνου**
5. Η αλγεβρική παράσταση $6\alpha x^{-3}$ είναι **ρητή**

8. Α. Να αντιστοιχίσετε όσα μονώνυμα υπάρχουν στη ΣΤΗΛΗ 1 με τα όμοιά τους στη ΣΤΗΛΗ 2.

ΣΤΗΛΗ 1	ΣΤΗΛΗ 2
1. $2x^2$	Α. $2x^3$
2. $5\frac{x^3}{3}$	Β. $\left(-3x\right)^2$
3 $2xy$	Γ. $-2x^3y$
4. $-x^{-3}y$	Δ. $4x^{-3}y$
5. $2x^0$	Ε $-xy$
	Ζ. - 7

Β. Να χαρακτηρίσετε σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις

1. Η ισότητα $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$ ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό α, β	Σ	Λ
2. Δύο αντίθετα μονώνυμα είναι πάντα όμοια μεταξύ τους.	Σ	Λ
3. Η διαίρεση δύο μονώνυμων είναι πάντα μονώνυμο	Σ	Λ
4. Μπορούμε να προσθέσουμε μόνο όμοια μονώνυμα	Σ	Λ

9. Α. Τι ονομάζεται παραγοντοποίηση

Β Ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι γινόμενο παραγόντων;

i)3χ(ψ+2) ii)3χψ+2 iii) 3(χ-ψ)(χ+ψ)

Γ. Τι ονομάζουμε μονώνυμο και τι ταυτότητα ; Ποιά από τα παρακάτω μονώνυμα είναι όμοια;

α) $2xy^3$ β) $-2x^3y$ γ) $\frac{xy^3}{2}$ δ) $\sqrt{2}y^3x$

Δ. Να συμπληρώσετε στην κόλλα σας τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε αλγεβρική παράσταση της στήλης Α με την ίση της στην στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
α. (α+β)(α-β)	1. $\alpha^2+\beta^2$
β . $(1-\chi)^2$	2. $25+\chi^2$
γ. $(-\chi-1)^2$	3. $\chi^2-2\chi+1$
δ. (5-χ)(5+χ)	4. $\alpha^2-\beta^2$
ε . $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$	5. $\chi^2+2\chi+1$
	6. $25-\chi^2$
	7. 2

10. **Α**. Τι ονομάζουμε μονώνυμο και τι πολυώνυμο; (Δώστε από ένα παράδειγμα)

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες

1. Η παράσταση $\left(2-\sqrt{3}\right)x^2y^5\omega$ είναι μονώνυμο
2. $\left(\alpha-\beta\right)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$
3. Κάθε γινόμενο δύο όμοιων μονωνύμων είναι πάντα ένα μονώνυμο όμοιο με τα αρχικά.

11. **Α)** Να μεταφέρετε στην κόλλα απαντήσεων και να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις ώστε να εκφράζουν ταυτότητες:

$$\alpha^2-\beta^2=\ldots$$

$$(\alpha-\beta)^3=\ldots$$

$$\ldots=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$$

$$\ldots=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$$

Β) Να αποδείξετε ότι $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$.

Γ) Στην κόλλα απαντήσεών σας να γράψετε κάθε αριθμό της στήλης Α και δίπλα το αντίστοιχο γράμμα της στήλης Β, ώστε να ισχύουν οι ισότητες, όπως προκύπτουν με βάση τις ταυτότητες:
(προφανώς κάποιες από τις επιλογές-απαντήσεις της στήλης Β περισσεύουν και δεν θα επιλεγούν)

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $(x+2)^2=\ldots$	α. x^2+4-4x
2. $(x-2)^2=\ldots$	β. $4-x^2$
3. $(x-2)\cdot(x+2)=\ldots$	γ. $x^3+12x-6x^2-8$
4. $(x+2)^3=\ldots$	δ. x^2+4x+4
5. $(x-2)^3=\ldots$	ε. $x^3-6x^2+8-12x$
	στ. x^2-4x-4
	ζ. $x^3+8+12x+6x^2$
	η. x^2-4

12. **Α.** (α) Ποια αλγεβρική παράσταση λέγεται *μονώνυμο* ;
(β) Ποια αλγεβρική παράσταση λέγεται *πολυώνυμο* ;
(γ) Πότε δύο μονώνυμα λέγονται όμοια ; Να γράψετε και ένα παράδειγμα.
(δ) Πότε δύο μονώνυμα λέγονται αντίθετα ; Να δώσετε και ένα παράδειγμα .

Β. Να χαρακτηρίσετε ως σωστές **(Σ)** ή λανθασμένες **(Λ)** τις παρακάτω προτάσεις :
(α) Κάθε σταθερό μονώνυμο είναι μηδενικού βαθμού .
(β) Το άθροισμα δύο ομοίων μονωνύμων είναι μονώνυμο όμοιο με αυτά .
(γ) Το πηλίκο δύο μονωνύμων είναι πάντα μονώνυμο .

Γ. Το αποτέλεσμα των πράξεων στην παράσταση $(\chi+\psi)^2-(\chi-\psi)^2$ είναι μονώνυμο ή πολυώνυμο ; Ποιος ο βαθμός του ως προς τη μεταβλητή χ ;

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

14. Α. Να γράψετε τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

Β. Να απαντήσετε **Σωστό** ή **Λάθος** στις παρακάτω προτάσεις:

α. Αν σε ένα τρίγωνο δύο γωνίες του είναι ίσες τότε είναι ισοσκελές.

β. Σε κάθε τρίγωνο η διάμεσος είναι και ύψος.

γ. Αν δύο τρίγωνα έχουν δυο πλευρές ίσες μια προς μια και μια γωνία τους ίση τότε είναι πάντα ίσα.

δ. Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν τις γωνίες τους ίσες μια προς μια.

ε. Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.

15. α.Πότε δυο τρίγωνα είναι όμοια;

β.Να συμπληρώσετε τα παρακατω κενά:

1.Καθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας .... απο τις πλευρες της γωνίας.

2.Σε καθε ισοσκελές τρίγωνο οι γωνίες της βάσης του ειναι ....

3.Αν δυο τρίγωνα εχουν δυο πλευρές .... μια προς μια και την ....γωνία τους ιση, τοτε ειναι ισα.

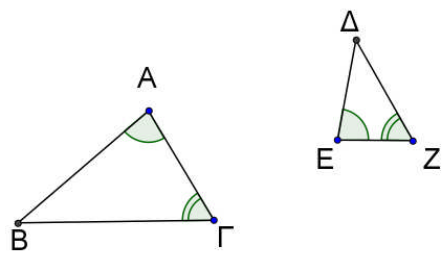
4.Καθε σημειο της .... ενος ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει απο τα ακρα του

5.Αν δυο τρίγωνα εχουν μια πλευρα ιση και τις .... στην πλευρά αυτη γωνίες .... μια προς μια,τοτε ειναι ισα..

16.

Α.Να γράψετε τους ίσους λόγους των πλευρών των παρακάτω δύο όμοιων τριγώνων.

Δίνεται ότι $\hat{A} = \hat{E}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$.



Β.Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

α) Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια οξεία γωνία ίση τότε είναι όμοια.

β) Αν δύο ισοσκελή τρίγωνα έχουν μια γωνία ίση τότε είναι σίγουρα όμοια.

γ) Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε είναι απαραίτητα και ίσα.

δ) Δύο τετράγωνα είναι σχήματα όμοια.

Γ.Να συμπληρώσετε τα κενά ώστε να προκύπτουν αληθείς προτάσεις.

α) Δύο πολύγωνα είναι όμοια , αν έχουν τις πλευρές τους .....(1)....... και τις αντίστοιχες γωνίες τους .....(2).......

β) Αν δύο όμοια τρίγωνα έχουν λόγο ομοιότητας λ =1 τότε είναι .....(3).......

γ) Αν διπλασιάσουμε κάθε πλευρά ενός ισόπλευρου τριγώνου τότε η περίμετρος του θα γίνει .....(4)....... φορές μεγαλύτερη και το εμβαδόν του θα γίνει .....(5)....... φορές μεγαλύτερο.

δ) Δύο όμοια πολύγωνα έχουν λόγο περιμέτρων ίσο με 9.
Ο λόγος ομοιότητας του μικρού πολυγώνου προς το μεγάλο είναι .....(6).......

17. **α.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες:

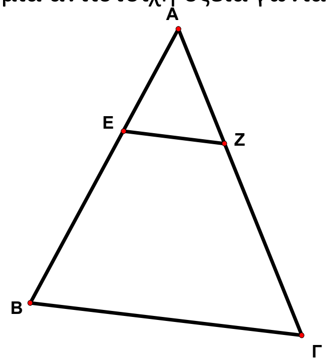
1) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
2) Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση, είναι ίσα.

β. Πότε δύο πολύγωνα είναι όμοια; (Διατύπωση)

γ. Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα **όμοια** τρίγωνα

Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

$\frac{AB}{AE} = \frac{\ldots}{AZ} = \frac{B\Gamma}{\ldots}$ και $\ldots = A\hat{E}Z, \quad \hat{\Gamma} = \ldots$



18. **Α.** Να διατυπωθεί το δεύτερο κριτήριο ισότητας τριγώνων (Γ-Π-Γ).

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες

1. Κάθε ύψος ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι και διάμεσός του.
2. Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν 2 πλευρές ίσες μία προς μία, είναι πάντοτε ίσα.
3. Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι πάντοτε ίσα.

19. α)Πότε δύο τρίγωνα λέγονται όμοια;

β) Αν ΑΒΓ τρίγωνο όμοιο με ΕΖΔ τρίγωνο με γωνίες Α=Δ Β=Ε Γ=Ζ να γραφούν οι ίσοι λόγοι των πλευρών

20.

Α) Τι πρέπει να ισχύει ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα α,β να είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα γ,δ;

Β) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις ώστε να προκύψουν γνωστές προτάσεις της Γεωμετρίας:

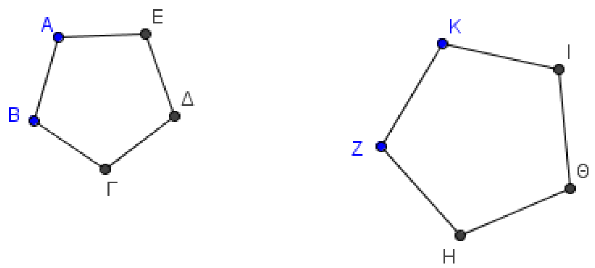
i) Αν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε ……………………………

ii) Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε αυτή θα διέρχεται από ……………………………….

iii) Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι …………. προς την ……………………….. και ίσο με το ………….της.

(Τα κενά μπορούν να συμπληρωθούν με μια ή περισσότερες λέξεις)

Γ)



Τα δύο πεντάγωνα στο παραπάνω σχήμα είναι κανονικά. Να αναφέρετε την πρόταση της θεωρίας που δικαιολογεί γιατί είναι όμοια και να γράψετε τις αναλογίες μεταξύ των πλευρών και τις ισότητες μεταξύ των γωνιών τους.

21.

Α. Να διατυπώσεις τα δύο κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.

Β. Να αποδείξεις ότι για οποιαδήποτε γωνία ω με $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$ ισχύει ότι $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$.

Γ. Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα μίας πλευράς ενός τριγώνου, είναι πάντοτε σημείο της διχοτόμου της απέναντι γωνίας του.

Δ. Να χαρακτηρίσεις τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας **στο φύλλο των απαντήσεών σου**, την λέξη **Σωστό ή Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

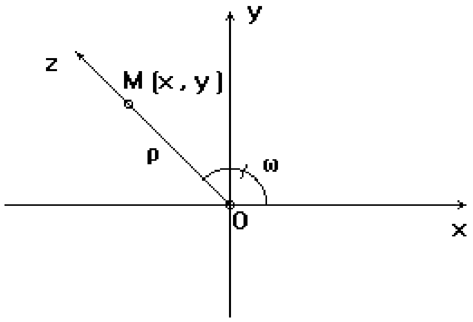
1. Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν δύο πλευρές του ίσες μία προς μία, και την περιεχόμενη σε αυτές τις πλευρές γωνία ίση.

2. Για κάθε γωνία ω ισχύει ότι $(1-\eta\mu\omega)\cdot(1+\eta\mu\omega) = \sigma\upsilon\nu^2\omega$.

3. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ, οποιαδήποτε διχοτόμος του, είναι και διάμεσος και ύψος.

4. Για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύει ότι $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1$.

22.Α) Σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα να ορίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{\omega}$ (δηλαδή ημω , συνω , εφω) και να υποδείξετε ότι $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$.



$\widehat{xOz} = \hat{\omega}$

$OM = \rho$

$M(x, y)$

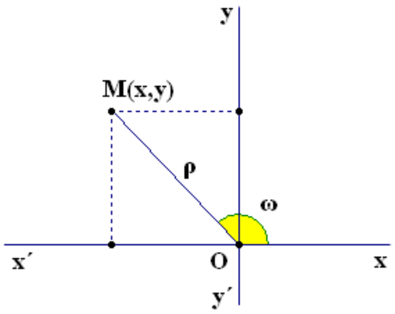
Β) Να συμπληρώσετε στην κόλλα σας τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό της στήλης Α τον ίσο του στην στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α . $\eta\mu(180^o-\omega)$	1 . ημω
β. $\eta\mu(90^o-\omega)$	2. - ημω
γ . $\sigma\upsilon\nu(180^o-\omega)$	3. συνω
δ . $\eta\mu 90^o$	4. - συνω
ε . $\eta\mu 0^o$	5 . 0
στ. $\sigma\upsilon\nu 180^o$	6 . 1
	7. -1

α	β	γ	δ	ε	στ

Γ) Υπάρχει γωνιά ω για την οποία ισχύει ταυτόχρονα $\eta\mu\omega = \dfrac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{1}{2}$; Δικαιολογήστε την απάντηση σας.

23.(α) Χρησιμοποιώντας το παρακάτω σχήμα



να συμπληρώσετε τις ισότητες :

ρ =

ημω =

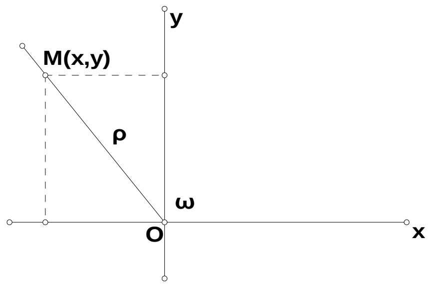
συνω =

εφω =

(β) Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστή» ή «Λάθος» καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις :

1. Η εφ90° δεν ορίζεται
2. Ισχύει $ημ^2 40° + συν^2 40° = 1$
3. Το γινόμενο συν126°·εφ132° είναι αρνητικός αριθμός
4. Ισχύει εφ70° =
5. Ισχύει συν148° = συν32°

24. Στο διπλανό ορθοκανονικό σύστημα αξόνων είναι σχεδιασμένη μια γωνία ω. Το σημείο Μ(x,y) είναι ένα τυχαίο σημείο της τελικής πλευράς της γωνίας ω.



Να **συμπληρωθούν** τα παρακάτω κενά.

α) Η απόσταση ρ=ΟΜ δίνεται από τον τύπο ρ=………………

$$ημω = \frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$$

$$συνω = \frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$$

$$εφω = \frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$$

β) $ημ90^0$=…… , $συν180^0$=………… , $εφ0^0$=…..

γ) Αν η γωνία ω είναι αμβλεία τότε να συμπληρώσετε με το σύμβολο < ή > ή =

τα εξής: (i) ημω….0 (ii) συνω…..0 (iii) εφω…..0

25. Α) Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.

Β) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ) , αν είναι λανθασμένες:

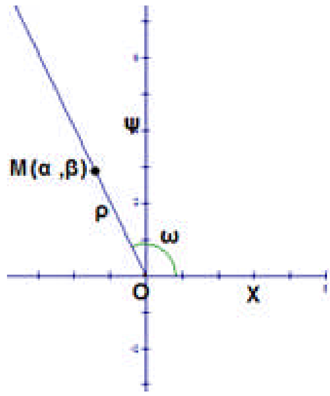
α) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία,τότε είναι ίσα.

β) Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.

γ) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία ,τότε θα έχουν και την τρίτη τους γωνία ίση.

δ) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία ,τότε θα έχουν και την τρίτη τους πλευρά ίση.

26. Α. Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος να δώσετε τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας ω.



Β. Με τη βοήθεια του ορισμού να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 180^0.

Γ. Αν $90^0 < ω < 180^0$ να χαρακτηρίσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

28.Α. Να αντιστοιχήσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της π στήλης με τους αριθμούς της δεύτερης.

α) $ημ45^0$	i) $\frac{1}{2}$
β) $συν60^0$	ii) 1
γ) $ημ30^0$	iii) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
δ) $εφ30^0$	iv) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
ε) $εφ45^0$	

Β. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες.

α) $ημ^2ω + συν^2ω = ...$

β) $εφω = \frac{ημω}{.....}$

Γ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΑΛΓΕΒΡΑ

1. Δίνονται οι παραστάσεις $A = x^2 - 4$ και $B = x^2 - 13x + 22$

Α. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις Α και Β

Β. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{B}{A} + \frac{5}{4} = -1$

2. α)Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - 8x + 15 = 0$
β)Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις
$A = x^2 - 8x + 15$ και $B = 3x^2 - 27$
γ) Να απλοποιήστε το κλάσμα $\frac{x^2 - 8x + 15}{3x^2 - 27}$

3. Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{2x}{x-2} - \frac{2x+3}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$, $x \neq \pm 2$

4. Α)Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $χ^3$-16χ μέχρις ότου οι παράγοντες του γινομένου να είναι πολυώνυμα πρώτου βαθμού.
Β) Να λύσετε την εξίσωση: $χ^3$-16χ=0

5. Δίνονται οι παραστάσεις $Α = (2χ - 1)^2$ και $Β = (χ + 2)^2$

α) Να βρείτε τα αναπτύγματα.

β) Να λύσετε την εξίσωση Α = Β

γ) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο Α – Β

6. α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 3x - 4 = 0$.

β) Να λύσετε την παρακάτω εξίσωση και να εξετάσετε αν έχει τις ίδιες λύσεις με την παραπάνω εξίσωση.

$$\frac{x-1}{x} - \frac{2}{x+1} = \frac{x+3}{x(x+1)}$$

7. **Α.** Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

$A = x^2 - x$ $\qquad B = x^2 - 3x + 2$ $\qquad \Gamma = x^2 + 4x + 4$

Β. Αν Α, Β και Γ οι παραστάσεις του ερωτήματος Α, να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{3x+6}$ έχει λύσεις τις $x_1 = -1$ και $x_2 = 4$.

Γ. Αν α η θετική ρίζα της παραπάνω εξίσωσης και β η αρνητική της ρίζα, να λυθεί το σύστημα

$$(\Sigma): \quad \begin{cases} 2x + \beta y = -3 \\ x - 2\alpha y = \alpha + \beta \end{cases}.$$

8. Ο κ. Γιώργος έφερε από το σπίτι την εξίσωση $\frac{x-5}{x+5}+\frac{x+5}{x-5}-\frac{20x}{25-x^2}=-2x+\frac{20}{x-5}$

Α. Η κ. Μαρία μόλις την είδε ρώτησε ποιες τιμές δεν επιτρέπεται να πάρει ο x;
Απαντήστε με αιτιολόγηση στο ερώτημά της.

Β. Ο κ.Νίκος πήρε το 1^{o} μέλος της εξίσωσης, το ονόμασε $A=\frac{x-5}{x+5}+\frac{x+5}{x-5}-\frac{20x}{25-x^2}$ και κάνοντας τις κατάλληλες πράξεις απέδειξε ότι η παράσταση $A=\frac{2(x+5)}{x-5}$.

Αποδείξτε τον ισχυρισμό του κάνοντας κι εσείς τις πράξεις.

Γ. Βοηθήστε τώρα τον κ. Γιώργο να λύσει επιτέλους την εξίσωση $A=-2x+\frac{20}{x-5}$

9. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = 2x^2-2$, $B = x^2+x-2$

$\Gamma = x^2+2x+1$

i) Να λυθεί η εξίσωση B=0
ii) Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις Α, Β, Γ
iii) Να λυθεί η εξίσωση $\frac{A}{B}=3$

10. **Α.** Να παραγοντοποιήσετε τις ποσότητες : α) x^2-9 β) x^2-3x γ) x^2+3x

Β. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{x+1}{x^2-9}+\frac{3}{x^2-3x}=-\frac{1}{x^2+3x}$

11. **Α.** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A=\frac{x^2-3x+2}{x^2-1} \quad \text{και} \quad B=\frac{2x^2-2x+1-x}{(x-1)^2}$$

Β. Να λύσετε την εξίσωση $A+B=\frac{-2x^2+2x+2}{x^2-1}$

12. Δίνονται οι παραστάσεις $A=\frac{X^2-7X+10}{X-5}$ με $X\neq 5$ και $B=\frac{X^3-2X^2-9X+18}{9-X^2}$ με $X\neq 3,-3$

Α) Να λυθεί η εξίσωση $X^2-7X+10=0$ και να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο $X^2-7X+10$.
Β) Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις Α και Β .
Γ) Για $X=\sqrt{2}$ να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης A^2-B^2 .

13. Δίνονται οι παραστάσεις : $A(x)=3(x-2)^2-2(1-2x)(1+2x)-8x^2-5(3-2x)+4$ και

$$B(x)=(x-2)^3+x^2(5-x)+9-12x$$

α.Να αποδείξετε οτι : $A(\chi)=3x^2-2x-1$ και $B(x)=1-x^2$.

β.Να λυθεί η εξίσωση : $A(x)=0$. Στη συνέχεια να παραγοντοποιήσετε τις παραστασεις $A(x)$ και $B(x)$.

γ.Να βρείτε για ποιες τιμές του χ ορίζεται το κλάσμα : $\frac{A(x)}{B(x)}$ και στη συνέχεια να το απλοποιήσετε.

14. Δίνονται οι παραστάσεις $A = 2x^2-3x-5$, $B = x^2-1$ και $\Gamma = x^2-2x+1$

i) Να λύσετε την εξίσωση Α = 0
ii) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις Α , Β και Γ.
iii) Να υπολογίσετε το γινόμενο $\frac{\Gamma}{B}\cdot\frac{A}{x-1}$ εκτελώντας όλες τις δυνατές απλοποιήσεις.

15. Δίνονται τα πολυώνυμα $A(x)=(3x+2)^2-5(x-2)^2-4(8x-3)$ και

$$B(x)=x^3-x^2+2x-2$$

α) Να δείξετε ότι $A(x)=4x^2-4$

β) Να παραγοντοποιηθεί το πολυώνυμο $B(x)$

γ) Για ποιές τιμές του x ορίζεται το κλάσμα $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ και στη συνέχεια να απλοποιηθεί.

16. α) Να λυθεί η εξίσωση $\dfrac{3x-18}{x^2-5x-6}=1-\dfrac{1}{x+1}$

β) Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \dfrac{3x-y}{2}-\dfrac{x-y}{8}=1-y \\ 3(2x-1)+2(y+2)=9 \end{cases}$

17. Δίνονται οι παραστάσεις: $\mathrm{A}=x(x+2)-(x+1)(x-1)-2(x-2)$, $\mathrm{B}=(2x-3)^2-2x(x-3)-2(x^2-3x+5)$

α. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A}=5$ και $\mathrm{B}=-1$.

β. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} 2x-y=\mathrm{A} \\ x+3y=\mathrm{B} \end{cases}$

18. **Α.** Να παραγοντοποιήσετε τις ποσότητες : α) x^2-x , β) x^2-1.

Β. Να βρείτε τις τιμές του x που ορίζονται οι παραστάσεις:

α) $\dfrac{1}{x}$ β) $\dfrac{2x}{(x-1)(x+1)}$ γ) $\dfrac{2x-1}{x^2-x}$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{2x-1}{x^2-x}-\dfrac{2x}{x^2-1}+\dfrac{1}{x}=0$

19. **Α.**Να λυθεί η εξίσωση $2x^2-2x-12=0$.

Β. Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης, με $x_1<x_2$, τότε να λύσετε ως προς α και β

το σύστημα $\begin{cases} x_1\cdot\alpha+x_2\cdot\beta-1=0 \\ \dfrac{-x_1\cdot\alpha-3\cdot\beta}{2}=3\alpha \end{cases}$

20. Δίνεται το σύστημα : $\begin{cases} 2\alpha+\beta=9 \\ 3\alpha-2\beta=-4 \end{cases}$

(α) Να λυθεί το σύστημα (με οποιαδήποτε μέθοδο) και να δείξετε ότι η λύση του είναι το ζεύγος (α,β) = (2,5)

(β) Να λυθεί η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x-3=0$

όπου (α,β) είναι η λύση του παραπάνω συστήματος.

21. Α) Να αποδείξετε ότι η λύση του συστήματος $\begin{cases} \beta=18-\alpha \\ \alpha+5\beta=50 \end{cases}$ είναι (α,β) = (10,8)

Β) Αν τα α, β είναι οι αριθμοί που βρήκατε στο Α) ερώτημα, να αποδείξετε ότι η αλγεβρική παράσταση $(x-\alpha)^2-(x-\beta)(x+\beta)+20x$ είναι σταθερό πολυώνυμο.

22. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} 2(2x-y)-5=3(x-y-1) \\ \dfrac{x-1}{3}-\dfrac{y+2}{6}=1 \end{cases}$

Α. Να αποδείξετε ότι το παραπάνω σύστημα παίρνει την μορφή $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=10 \end{cases}$

Β. Να λύσετε το παραπάνω σύστημα .

23. **Α.** Να λύσετε το σύστημα (**Σ$_1$**): $\begin{cases} 3x-y=3 \\ 2x+y=7 \end{cases}$

Β. Αν το σύστημα (**Σ$_2$**): $\begin{cases} 2\alpha x-\beta y=-10 \\ \alpha x+3\beta y=16 \end{cases}$ έχει ως λύση, τη λύση του συστήματος (**Σ$_1$**), να βρείτε τις τιμές των αριθμών α και β.

$$\begin{cases} 2(x-1)-3y=-2(y-1)-1 \\ 3(y-2)-2(2-x)=1-x-2y \end{cases}$$

24. Δίνονται τα συστήματα:

$$(\Sigma_1)\begin{cases} 3(2x-y)-2x-3(y-1)=-1 \\ 5x-2y=4x-2 \end{cases} \quad , \quad (\Sigma_2)\begin{cases} 1006x-2012y=-2012 \\ 1008x-2y=2012 \end{cases} .$$

Α. Να λύσετε το (Σ_1).

Β. Να εξετάσετε αν η λύση του (Σ_1) είναι και λύση του (Σ_2).

25. Α) Να λυθεί η παρακάτω κλασματική εξίσωση : $\dfrac{X+1}{X^2+2X}+\dfrac{X-3}{X^2-2X}=\dfrac{4}{X^2-4}$

Β) Αν α η μεγαλύτερη λύση της παραπάνω εξίσωσης και β η μικρότερη λύση της να λυθεί το σύστημα :

$$\begin{Bmatrix} \alpha x+\beta y=4 \\ x-\alpha\beta y=1 \end{Bmatrix}$$

Γ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x,y)$, όπου (x,y) η λύση του παραπάνω συστήματος και είναι παράλληλη στον άξονα y'y .

26. Δινεται το σύστημα : $\begin{cases} 3x-3(x-y)=5+xy-x(y+1) \\ x-\dfrac{y}{2}=-2 \end{cases}$

α.Να αποδείξετε οτι το παραπάνω συστημα (αφου κανετε τις πραξεις) ειναι ισοδύναμο με το σύστημα $\begin{cases} \chi+3\psi=5 \\ x-\dfrac{y}{2}=-2 \end{cases}$

β.Να λύσετε το σύστημα .

27. Εστω η παράσταση Α= $(2x-1)^2-2x(x-1)-5$

Ι) Να γίνουν οι πράξεις και να δείξετε ότι Α= $2x^2-2x-4$

ΙΙ) Να λυθεί η εξίσωση Α=0

ΙΙΙ) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση Α

28. Δίνονται οι παραστάσεις $A=\left(\frac{x}{y}-1\right)\left(\frac{x}{y}+1\right)$ και $B=\frac{x^2}{x^2-y^2}-1$

Α.Να γράψετε τις συνθήκες στα x, y ,ώστε να ορίζονται οι παραστάσεις.

Β. Να αποδείξετε ότι Α.Β=1

29. Δίνεται η συνάρτηση $y=x^2+3x+\lambda$, όπου λ πραγματικός αριθμός.

i) Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε το σημείο $A(1,6)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης.

ii) Αν $\lambda=2$, να βρείτε την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, και έπειτα να την σχεδιάσετε.

30. Να λυθεί το σύστημα:

3(χ -2) – 4(ψ + 1) = 5

χ + 2ψ = -15

31. Α) Εστω το πολυωνυμο $P(x)=x^3+\beta x+\alpha$

ι. Αν P(0)=1 να βρείτε το α

ιι.Αν P(2) - P(1)=5 να βρείτε το β

Β)Για α=1 και β= -2 να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases}\alpha x+\beta y=-3\\ (\alpha-3)x+2\beta y=-18\end{cases}$

32. Δινεται το σύστημα : 3χ-3(χ-ψ)=5+χψ-χ(ψ+1)

$X-\frac{\psi}{2}=-2$

α.Να αποδείξετε οτι το παραπάνω συστημα (αφου κανετε τις πραξεις) ειναι ισοδύναμο με το σύστημα χ+3ψ=5

2χ-ψ=-4

β.Να λύσετε το σύστημα .

33. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases}x-2y=6\\ 3x-5y=16\end{cases}$

Α) με τη μέθοδο της αντικατάστασης

Β) με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών

34. Δίνεται η εξίσωση: $1-\frac{x+2}{x-2}+\frac{x+2}{x}=\frac{x-10}{x^2-2x}$

Α) Να βρείτε το ΕΚΠ (Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο) των παρονομαστών της.

Β) Να βρείτε ποιοι περιορισμοί πρέπει να ισχύουν για το x, ώστε να έχει νόημα η παραπάνω εξίσωση.

Γ) Να αποδείξετε ότι, εφόσον ισχύουν οι παραπάνω περιορισμοί, η παραπάνω εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $x^2-5x+6=0$.

Δ) Να λύσετε την εξίσωση $x^2-5x+6=0$.

Ε) Ποιες από τις λύσεις της εξίσωσης του (Δ) ερωτήματος είναι λύσεις και της αρχικής κλασματικής εξίσωσης;

35. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} 3(x+2y)-2(x-1)=-7 \\ \dfrac{x-1}{3}-\dfrac{3-y}{4}=-\dfrac{7}{12} \end{cases}$.

Α) Να αποδείξετε ότι το παραπάνω σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\begin{cases} x+6y=-9 \\ 4x+3y=6 \end{cases}.$$

Β) Να λύσετε το παραπάνω σύστημα.

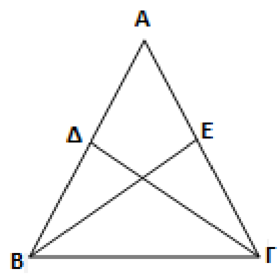
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

1. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓ είναι ισοσκελές τρίγωνο με ΑΒ =ΑΓ

και ΒΕ, ΓΔ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ αντίστοιχα.

α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΓΔΒ είναι ίσα.

β) Να δείξετε ότι οι διχοτόμοι ΒΕ και ΓΔ είναι ίσες.

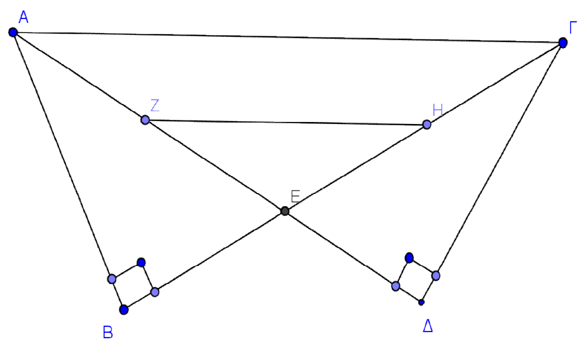


2. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^{o}$) είναι ΑΒ =6 cm και ΒΓ =10 cm και ΑΔ είναι το ύψος.

Α.Να υπολογίσετε τους λόγους α) $\dfrac{AB}{B\Gamma}$, β) $\dfrac{A\Gamma}{B\Gamma}$, γ) $\dfrac{AB}{A\Gamma}$

Β.Να υπολογίσετε τα μήκη α) $A\Delta$, β) $B\Delta$, γ) $B\Gamma$

3. Στο διπλανό σχήμα θεωρούμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ και Ε το σημείο τομής των ΒΓ και ΔΑ. Αν Ζ το μέσο της ΑΕ και Η το μέσο της ΕΓ και ΑΒ = ΔΓ:



Α. Να αποδείξεις ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ κα ΓΔΕ είναι ίσα.

Β. Να αποδείξεις ότι το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές, και επιπλέον ότι το τμήμα ΖΗ είναι παράλληλο στο ΑΓ.

Γ. Αν επιπλέον τα μήκη ΒΖ = 10 cm και ΑΓ = 20 cm, να βρείτε την περίμετρο του τετραπλεύρου ΑΖΗΓ.

4. Αν στο διπλανό σχήμα είναι ΑΒ=ΒΓ και ΑΜ=ΝΓ

Α. Εξηγήστε γιατί Α = Γ

Β. Να αποδείξετε ότι ΒΜ=ΒΝ

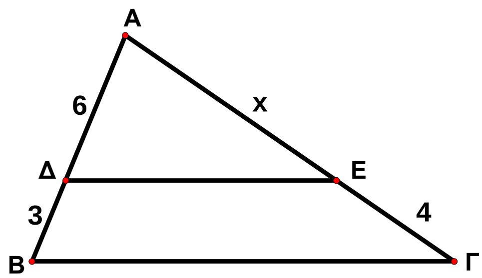
Γ. Δείξτε ότι ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΝΒ και ΒΜΓ είναι λ=1.

5. Στο διπλανό σχήμα είναι ΔΕ//ΒΓ.

Α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια.

Β. Να αποδείξετε ότι $x = 8$.

Γ. Αν το τρίγωνο ΑΔΕ έχει εμβαδόν $20\,cm^2$, τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

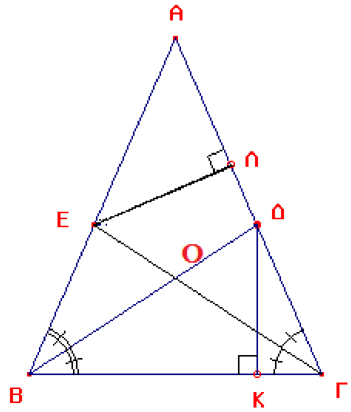


6. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ, οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$, ΒΔ και ΓΕ αντίστοιχα, τέμνονται στο σημείο Ο. Αν $\Delta K \perp B\Gamma$ και $E\Lambda \perp A\Gamma$ τότε:

Α) Να δειχτεί ότι τα τρίγωνα ΒΔΓ=ΒΕΓ είναι ίσα.

Β) Να δειχτεί ότι τα τρίγωνα ΒΔΚ=ΓΕΛ είναι ίσα.

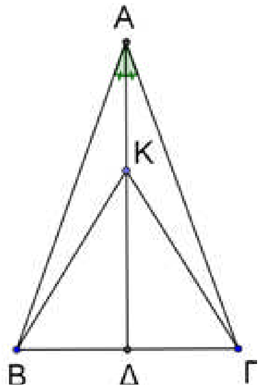
Γ) Να δειχτεί ότι τα τρίγωνα ΕΒΟ και ΕΒΓ είναι όμοια.



7. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ και η ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Αν Κ τυχαίο σημείο πάνω στην ΑΔ,

i) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΑΚΓ είναι ίσα.

ii) Να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΒΚΓ είναι ισοσκελές.

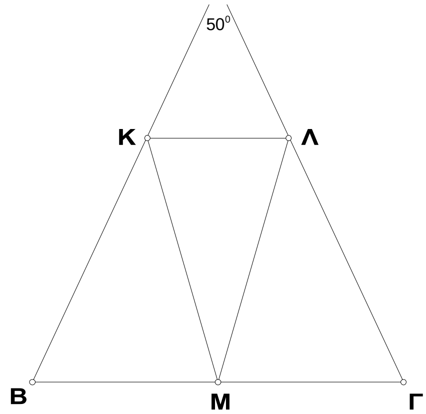


9. Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ=10 cm και $\hat{A} = 50^0$.Στις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε σημεία Κ και Λ ώστε ΑΚ=ΑΛ=4 cm καιΜ είναι το μέσο της ΒΓ.

α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΚΒΜ και ΛΜΓ είναι ίσα.

β) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΚΛ και ΑΒΓ είναι όμοια και να βρεθεί ο λόγος ομοιότητας τους.

γ) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ έχει εμβαδό 50 cm^2 να υπολογισθεί το εμβαδό του τριγώνου ΑΚΛ.



10. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ να φέρεται τα ύψη ΒΔ και ΓΕ.

Α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.

Β) Χρησιμοποιώντας στοιχεία από την ισότητα των τριγώνων του ερωτήματος Α, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΒΕΓ είναι ίσα.

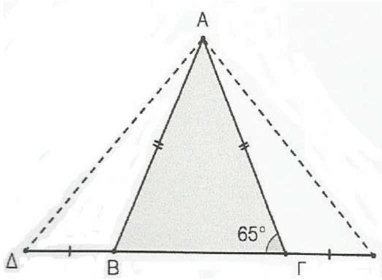
Γ) Να αποδείξετε ότι ΒΕ=ΓΔ, $B\hat{\Gamma}E = \Gamma\hat{B}\Delta$ και ΑΕ=ΑΔ

11. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ=ΑΓ) και $\widehat{\Gamma}=65^0$.Προεκτείνουμε την βάση κατά τα τμήματα ΒΔ=ΓΕ.

Α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.

Β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

Γ) Αν $\widehat{A\Delta B}=47^0$,να υπολογίσετε την γωνία $\widehat{\Delta AB}$.

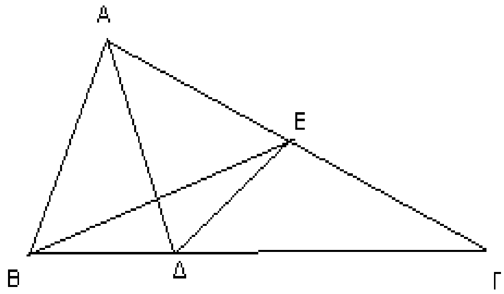


12. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ είναι η διχοτόμος του. Στην πλευρά ΑΓ παίρνουμε τμήμα ΑΕ τέτοιο ώστε ΑΕ=ΑΒ

Α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ είναι ίσα.

Β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΒΕ είναι ισοσκελές.

Γ. Να αποδείξετε ότι η $A\Delta \perp BE$

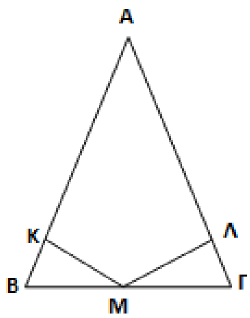


13. Έστω τρίγωνο ισοσκελές ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και Μ μέσον της ΒΓ.

Αν ΜΚ και ΜΛ κάθετες στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα ,

να δείξετε ότι :

α) ΜΚ=ΜΛ β) ΑΚ=ΑΛ.



<u>Σχόλιο</u>

Σχεδόν ίδιο με το θέμα 13 και με το ίδιο σχήμα είναι και το θέμα 14 που δόθηκε σε άλλο Γυμνάσιο.

14. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και Μ μεσον της ΒΓ.Αν ΜΚ,ΜΛ τα κάθετα τμήματα προς τις πλευρές ΑΒ,ΑΓ αντίστοιχα,να αποδείξετε οτι:

α.Τα τρίγωνα ΒΜΚ,ΓΜΛ ειναι ισα.

β.Το τρίγωνο ΜΚΛ ειναι ισοσκελές.

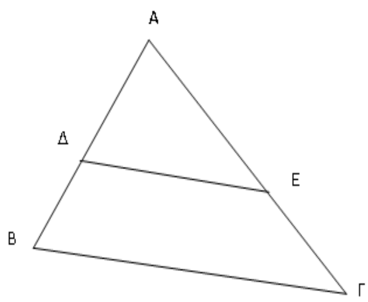
γ.Να δείξετε ότι η ΑΜ διχοτόμος της γωνίας Α και μεσοκάθετος της ΚΛ

15. Στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΔΕ//ΒΓ

και ΑΔ = 6 , ΔΒ = 4 , ΔΕ = 9 και ΒΓ = x + 1

(α) Να δειχθεί ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια

(β) Να υπολογιστεί το x

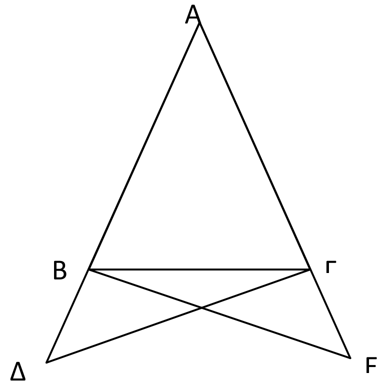


16. Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (με $AB = A\Gamma$) και στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών του ΑΒ και ΑΓ, προς το μέρος των Β και Γ, παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ, που είναι ίσα: $B\Delta = \Gamma E$.

Α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι ίσα.

Β) Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta} = \hat{E}$ και $BE = \Gamma\Delta$.

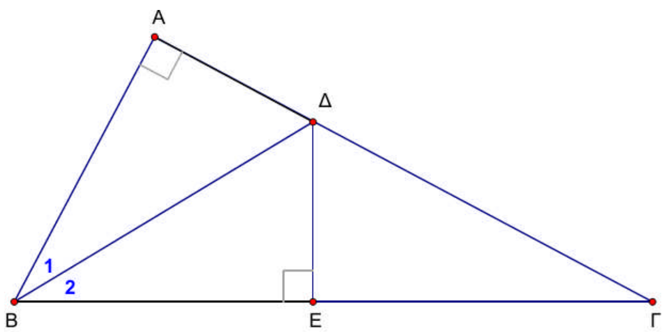
Γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΒΓΕ είναι ίσα.



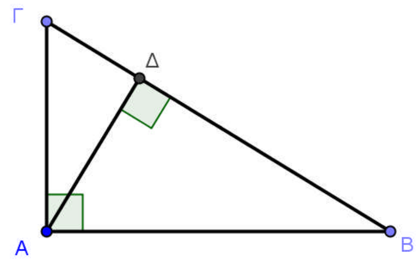
17. Δίνεται τρίγωνο ορθογώνιο ΑΒΓ με ορθή την γωνία Α. Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Δ. Από το Δ φέρνουμε την ΔΕ κάθετη στην ΒΓ που την τέμνει στο Ε.(όπως στο σχήμα)

I. Να δείξεις ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΒΔ είναι ίσα

II. Να δείξεις ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ είναι όμοια και να συμπληρώσεις την ισότητα $\frac{AB}{\quad} = \frac{\quad}{\Gamma\Delta} = \frac{A\Gamma}{\quad}$

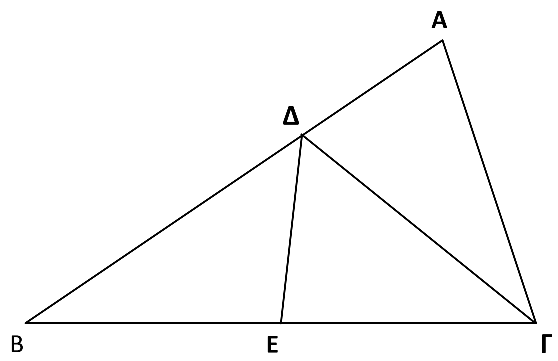


18. Στο παρακάτω σχήμα είναι : ΓΒ = 10cm , ΑΒ = 8 cm.
α) δείξτε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΓ είναι όμοια και βρείτε τον λόγο ομοιότητας τους,
β)αν (ΑΒΔ) = 15,36cm^2 , υπολογίστε το (ΑΒΓ).



19.

Δεδομένα	**Ζητούμενα**
ΓΔ διχοτόμος της $A\hat{\Gamma}B$	$A\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma = \Delta\overset{\Delta}{E}\Gamma$
Ε μέσο του ΒΓ	



20. Δίδεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, με ΑΒ = ΑΓ. Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ και Ε έτσι ώστε ΑΔ = ΑΕ . Αν τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΕ και ΓΔ τέμνονται στο σημείο Η, να δείξετε ότι,

(α) ΓΔ = ΒΕ

(β) Το τρίγωνο ΗΒΓ είναι ισοσκελές.

21. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ, το ύψος ΑΔ και τυχαίο σημείο Μ του ΑΔ. Να αποδείξετε:

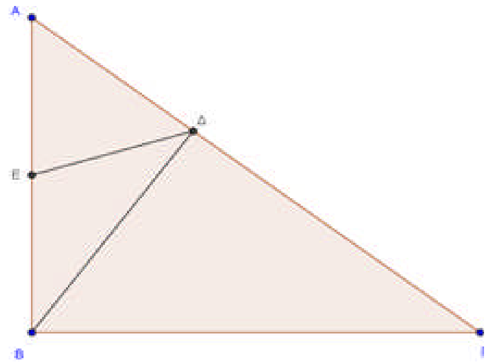
(α) $M\hat{B}A = M\hat{\Gamma}A$

(β) το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές

22. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισοσκελές.

23.

Δεδομένα	**Ζητούμενα**
$\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ ορθογώνιο τρίγωνο	AB
($\hat{B} = 90^\circ$)	$A\Gamma$
$B\Delta$ ύψος	
$\Delta E = 4\ cm$	
ΔE διάμεσος του $\overset{\Delta}{AB\Delta}$	
$\hat{A} = 60^\circ$	



24. Α. Αν $0^\circ < \omega < 180^\circ$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$, να υπολογισθούν:

α. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω.

β. Η τιμή της παράστασης $A = \frac{5\eta\mu\omega - 3\varepsilon\varphi\omega}{10\sigma\upsilon\nu\omega} + \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2(180^0 - \omega)$.

Β. Έστω οι παραστάσεις $A = \eta\mu 32^\circ - \varepsilon\varphi 124^\circ$ και $B = \frac{(2-\eta\mu\omega)\cdot\eta\mu 111^\circ}{(\sigma\upsilon\nu\omega - 3)^3}$.

α. Να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης Α είναι θετική.

β. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε γωνία ω, ισχύει ότι $A > B$.

25. Αν για την οξεία γωνία ω ισχυει ότι $(ημω-4)^2+συν^2ω=13$

α) Να βρείτε το ημω.

β) Αν το ημίτονο της γωνίας ω είναι $ημω=\frac{1}{2}$

ι. να βρείτε το συνω και την εφω

ιι να βρείτε την τιμή της παράστασης $Κ= 2ημ(180-ω)+\frac{4}{\sqrt{3}}συνω- \sqrt{3}\ εφ(180-ω)$

26. Αν γνωρίζετε ότι $90^0 < ω < 180^0$ και $ημω = \frac{1}{3}$, τότε:

Α. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

Β. Να αποδείξετε ότι: $4\sqrt{2} \cdot εφω + 2συν^2ω + 2ημ^2ω = συν90^0$.

27. Αν η γωνία ω είναι αμβλεία και $ημω = \frac{12}{13}$,

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $συνω = -\frac{5}{13}$, $εφω = -\frac{12}{5}$.

(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)

Γ2. Να συμπληρώσετε τα κενά : $ημ\left(180^\circ - ω\right) = \ldots$, $συν\left(180^\circ - ω\right) = \ldots$

Γ3. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\dfrac{εφω \cdot συν\left(180^\circ - ω\right)}{εφ135^\circ \cdot ημ\left(180^\circ - ω\right)}$

Δ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ

Διαγώνισμα Προσομοιωσης - 1^0

ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^0

Α) Τι λέγεται ταυτότητα ;

Β) Να αποδείξετε την ταυτότητα : $(α + β)(α – β) = α^2 – β^2$.

Γ**)** Να μεταφέρετε στο γραπτό σας συμπληρωμένο τον πίνακα:

αντιστοιχίζοντας κάθε ταυτότητα της στήλης Α με το ανάπτυγμά της από την στήλη Β .

α	β	γ	δ

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α. $(α + β)^2 =$	1. $α^3+3α^2β+3αβ^2+β^3$
β. $(α – β)^3 =$	2. $α^2 + 2αβ + β^2$
γ. $(α – β)^2 =$	3. $α^3-3α^2β+3αβ^2- β^3$
δ. $(α + β)^3 =$	4. $α^2 – 2αβ + β^2$

ΘΕΜΑ 2^0

Α) Να διατυπώσετε δυο (2) κριτήρια ισότητας τριγώνων .

Β) Για τις παρακάτω προτάσεις να γράψεις στην κόλλα σου δίπλα από τον αριθμό της κάθε μιας το γράμμα (Σ) , αν η πρόταση είναι σωστή ή το γράμμα (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη .

(1) Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες ίσες μια προς μια τότε θα έχουν και την τρίτη τους γωνία ίση .

(2) Αν δυο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και μια γωνία ίση αντίστοιχα τότε θα είναι ίσα .

(3) Δυο ισοσκελή τρίγωνα είναι όμοια .

(4) Δυο ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα είναι όμοια .

(5) Αν δυο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια οξεία γωνία ίση , είναι όμοια .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^0

Δίνεται το πολυώνυμο $P(\chi) = (2\chi + 1)^2 - 3\chi(\chi + 1) - 7$

α) Να αποδείξετε ότι $P(\chi) = \chi^2 + \chi - 6$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(\chi) = 0$

γ) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $P(\chi) = \chi^2 + \chi - 6$.

ΘΕΜΑ 2^0

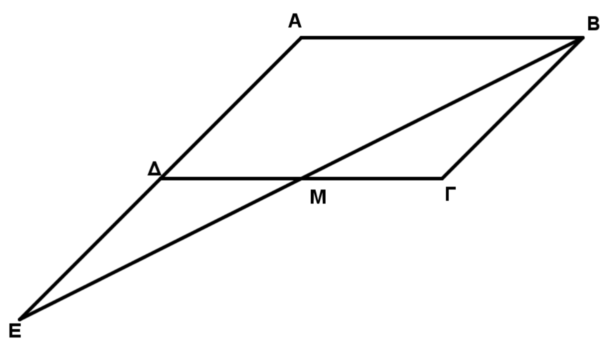
Δίνεται το σύστημα : $\begin{cases} 2(3\chi - 1) - (4\psi - 11) = -5 \\ \dfrac{2\chi + 1}{3} = \chi + \dfrac{3\psi - 2}{6} \end{cases}$

Να αποδείξετε ότι το σύστημα παίρνει τη μορφή : $\begin{cases} 6\chi - 4\psi = -14 \\ 2\chi + 3\psi = 4 \end{cases}$

Να λύσετε το παραπάνω σύστημα .

ΘΕΜΑ 3^0

Στο σχήμα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και Μ το μέσο της ΔΓ. Αν ΑΔ=ΔΕ να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΕΔΜ και ΒΓΜ είναι ίσα (Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας).



Καλη επιτυχια

Διαγώνισμα Προσομοιωσης - 2^0

ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^0

Δίνεται η εξίσωση $αx^2+βx+γ=0$, $α \neq 0$

α) Πως ονομάζεται αυτή η εξίσωση;

β) Ποιος αριθμός ονομάζεται διακρίνουσα αυτής της εξίσωσης;

γ) Πότε αυτή η εξίσωση είναι αδύνατη;

δ) Πότε αυτή η εξίσωση έχει μια ρίζα; Ποια είναι αυτή;

ε) Πότε αυτή η εξίσωση έχει δυο ρίζες; Ποιες είναι αυτές

ΘΕΜΑ 2^0

α) Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι λάθος;

$Π_1$: Δυο ισόπλευρα τρίγωνα είναι ίσα

$Π_2$: Δυο ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια

$Π_3$: Δυο ισοσκελή τρίγωνα με μια γωνία τους ίση είναι όμοια

β) Να συμπληρώσετε τις προτάσεις:

$Π_1$: Όταν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα πάνω σε μια ευθεία που τις τέμνει τότε ……………..

$Π_2$: Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών ενός τριγώνου ……………..

$Π_3$: Αν από το μέσο πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε παράλληλη προς μια πλευρά του τότε ……………..

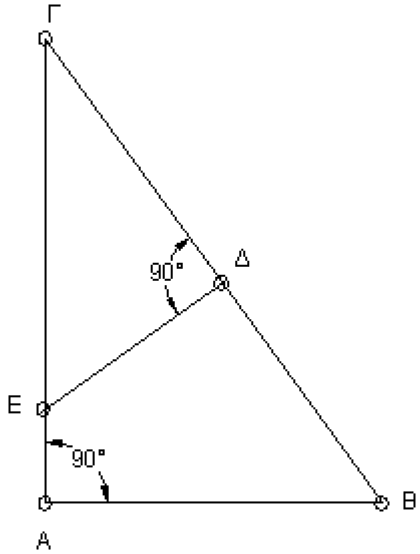
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^0

Να λύσετε την εξίσωση $(x-2)(x^2-4x+3)=0$

ΘΕΜΑ 2^0

Να αποδείξετε ότι τα παρακάτω τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια. Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα.



ΘΕΜΑ 3^0

Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -x^2 - 2x + 3$, όταν $-4 \leq χ \leq 2$. Να βρείτε το μέγιστο ή το ελάχιστο της συνάρτησης και τον άξονα συμμετρίας της παραβολής

Καλη επιτυχια