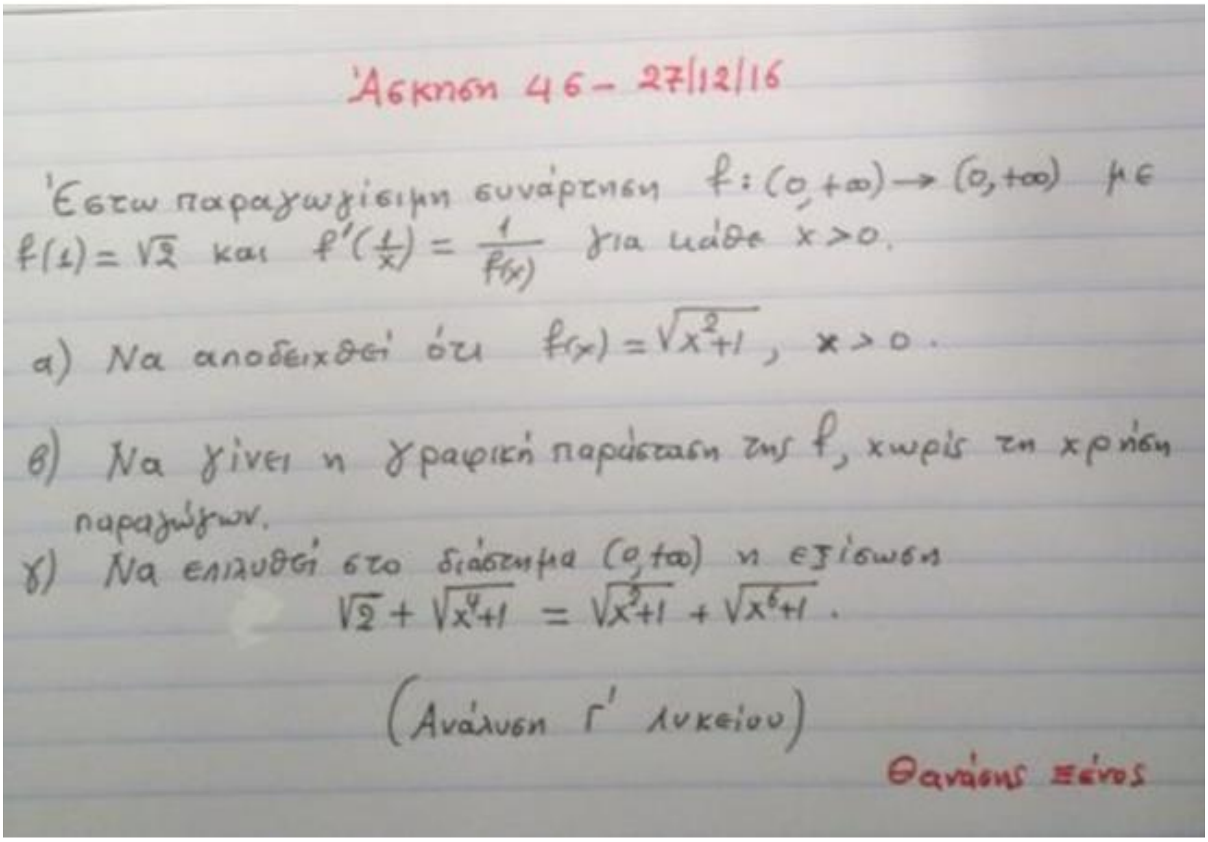


Άσκηση 46 – 27/12/16

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ με $f(1)=\sqrt{2}$ και $f'\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x>0$.

α) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, $x>0$.

β) Να γίνει η γραφική παράσταση της f, χωρίς τη χρήση παραγώγων.

γ) Να επιλυθεί στο διάστημα $(0,+\infty)$ η εξίσωση

$$\sqrt{2}+\sqrt{x^4+1}=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^6+1}.$$

(Ανάλυση Γ' Λυκείου)

Θανάσης Ξένος

**Λύση**

**ΠΡΟΔΡΟΜΟΣ Π. ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ**

**Μυτιλήνη, 27-12-2016**

**α)** Έχουμε: $f'\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}\Rightarrow f(x)f'\left(\frac{1}{x}\right)=1$, **(2)** για κάθε x>0, οπότε:

$$f\left(\frac{1}{x}\right)f'(x)=1, \text{ **(3)** για κάθε } x>0.$$

**Σκεπτικό:** Λόγω των (2), (3) σκεφτόμαστε μήπως είναι δυνατός ο προσδιορισμός μιας αρχικής της συνάρτησης $f\left(\frac{1}{x}\right)f(x)$ στο διάστημα (0,+∞).

Επειδή $\left(f\left(\frac{1}{x}\right)f(x)\right)'=\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)'f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)f'(x)=f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)f'(x)$,

δηλαδή:

$$\left(f\left(\frac{1}{x}\right)f(x)\right)' = -\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)f'(x)$$

εργαζόμαστε ως εξής:

(2)$\Rightarrow$ $-\frac{1}{x^2}f(x)f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$, **(4)** για κάθε x>0.

Από (2),(4) με πρόσθεση κατά μέλη, παίρνουμε:

$-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \left(f\left(\frac{1}{x}\right)f(x)\right)' = \left(x + \frac{1}{x}\right)'$ για κάθε x>0.

Άρα $f\left(\frac{1}{x}\right)f(x) = x + \frac{1}{x} + c$ για κάθε x>0.

Επειδή $f(1) = \sqrt{2}$ παίρνουμε ότι c=0.

Άρα $f\left(\frac{1}{x}\right)f(x) = x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, **(5),** για κάθε x>0.

Από (3),(5) με διαίρεση κατά μέλη, παίρνουμε:

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x}{x^2+1} \Leftrightarrow (\ln f(x))' = \left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right)' \Leftrightarrow (\ln f(x))' = \left(\ln\sqrt{x^2+1}\right)' \Leftrightarrow$

$$\ln f(x) = \ln\sqrt{x^2+1} + c_1$$

Επειδή $f(1) = \sqrt{2}$ παίρνουμε ότι $c_1=0$.

Άρα: $\ln f(x) = \ln\sqrt{x^2+1}$. Επομένως:

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} \text{ για κάθε x>0.}$$

**β)** Για τη γραφική παράσταση της f χωρίς παραγώγους μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής:

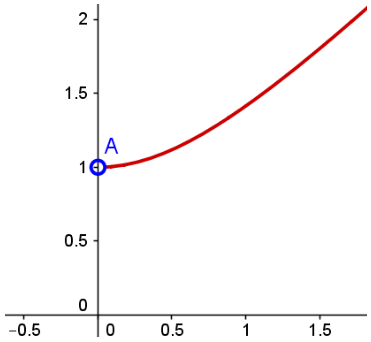
Η γραφική παράσταση της f χωρίς παραγώγους θα μπορούσε να γίνει από έναν μαθητής της Α’ Λυκείου με τη σύνταξη ενός πίνακα τιμών ή, καθ’ υπόδειξη του κ. Ξένου, με ύψωση στο τετράγωνο και των δύο μελών της $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Οπότε θα κατασκευαζόταν από έναν μαθητή της Β’ ή Γ΄ Λυκείου.

αφού:

$f(x)=\sqrt{x^2+1},\ x>0 \Leftrightarrow y=\sqrt{x^2+1}, x,y>0 \Leftrightarrow$

$y^2-x^2=1,\ x,y>0$, οποτε η $C_f$ είναι τμήμα υπερβολής.



Ένας μαθητής της Γ΄ Λυκείου θα μπορούσε να δει την f ως σύνθετη συνάρτηση. Να προσέξει, δηλαδή, ότι η f είναι σύνθεση της συνάρτησης $g(x)=x^2+1$ , x>0 και της $h(x)=\sqrt{x}$, x>1, οπότε για την κατασκευή της $C_f$ θα μπορούσε να ακολουθήσει τα παρακάτω βήματα.

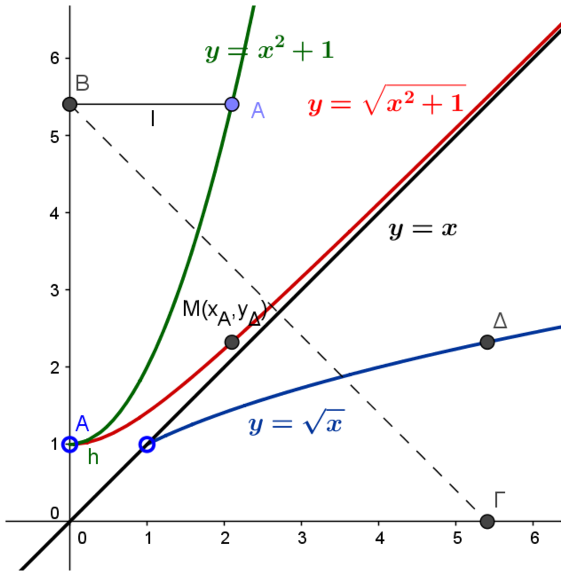
**β1.** Να κατασκευάσει τις γραφικές παραστάσεις των g και h.

**β2.** Να κατασκευάσει την ευθεία y=x.

Να θεωρήσει ένα σημείο Α της $C_g$. Να βρει το σημείο $B(0,y_A)$ και στη συνέχεια το συμμετρικό του Β ως προς την ευθεία y=x, έστω Γ.

Αν φέρει την ευθεία $x=x_Γ$ η οποία τέμνει την $C_h$ έστω στο Δ, τότε το σημείο $M(x_A,y_Δ)$ είναι σημείο της $C_f$.

Αν λοιπόν το Α κινείται στη $C_g$, τότε το αντίστοιχο σημείο Μ θα διαγράφει τη $C_f$.




**γ)** Προφανής ρίζα η x=1 η οποία είναι μοναδική γιατί:

- Αν x>1, τότε:

$1<x^2 \Rightarrow 2<x^2+1 \Rightarrow \sqrt{2}<\sqrt{x^2+1}$ και $x^4+1<x^6+1 \Rightarrow \sqrt{x^4+1}<\sqrt{x^6+1}$, άρα:

$$\sqrt{2}+\sqrt{x^4+1}<\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^6+1}$$

- Αν 0< x<1, τότε:

$x^2<1 \Rightarrow 2>x^2+1 \Rightarrow \sqrt{2}>\sqrt{x^2+1}$ και
$x^4>x^6 \Rightarrow x^4+1>x^6+1 \Rightarrow \sqrt{x^4+1}>\sqrt{x^6+1}$, άρα:

$$\sqrt{2}+\sqrt{x^4+1}>\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^6+1}$$