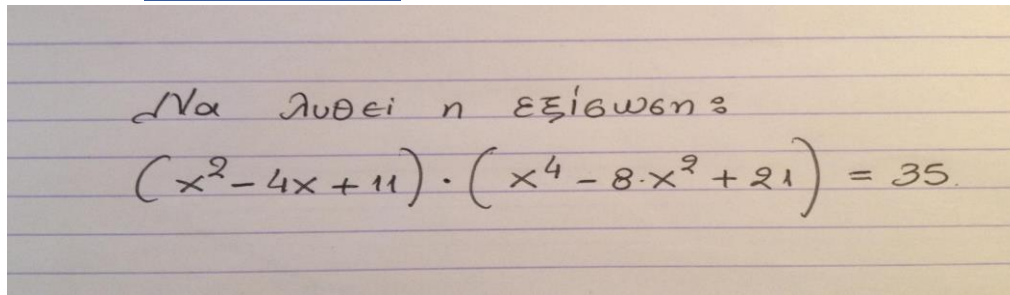


ΑΣΚΗΣΗ Dimitris Plakakis



Να λυθεί η εξίσωση

$$(x^2 - 4x + 11) \cdot (x^4 - 8x^2 + 21) = 35.$$

Λύση

ΠΡΟΔΡΟΜΟΣ Π. ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ

Μυτιλήνη, 15-12-2016

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=x^2-4x+11$ και $g(x)=x^4-8x^2+21$.

Η δοσμένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x)g(x)=35$.

Με τη βοήθεια του διαφορικού λογισμού ή αλλιώς, για παράδειγμα, δείτε Παύλος Τρύφων

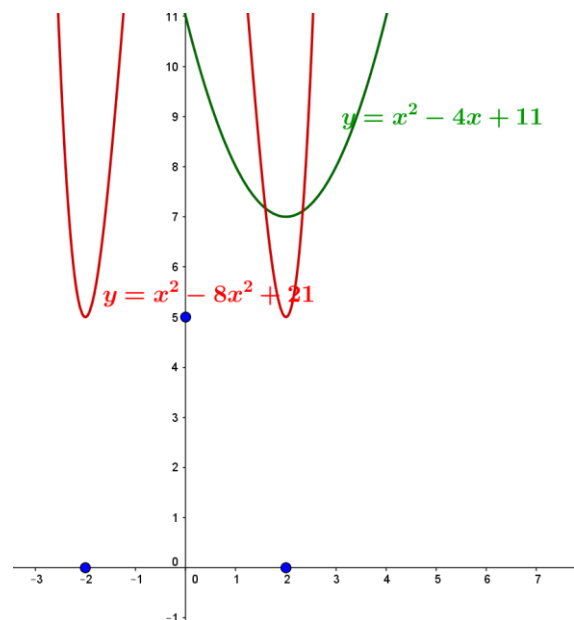
<https://www.facebook.com/photo.php?fbid=10211268913949342&set=p.10211268913949342&type=3&theater>,

βρίσκουμε την ελάχιστη τιμή της f και της g . Είναι $\min f=7$ και $\min g=5$.

Έχουμε:

- $f(x) \geq 7$ η ισότητα ισχύει μόνο αν $x=2$.
- $g(x) \geq 5$ η ισότητα ισχύει μόνο αν $x=2$ ή $x=-2$

Άρα η ισότητα $f(x)g(x)=35$ είναι αληθής μόνο για $x=2$.



Σχόλιο

Μπορούμε να κατασκευάσουμε και να επιλύσουμε εξισώσεις της μορφής:

$$f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots f_n(x) = \alpha,$$

όπου όλες οι συναρτήσεις να έχουν σε ένα τουλάχιστον σημείο x_0 ελάχιστη τιμή η οποία να είναι θετική και να ισχύει:

$$\min f_1 \cdot \min f_2 \cdot \cdots \cdot \min f_n = \alpha$$

Για παράδειγμα:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 3 - \frac{x + \ln x}{x^2}$ (Χαράλαμπος Στεργίου-Χρήστος Νάκης Μαθηματικά Γ2 σελ17).

Το $f(1) = 2$ είναι η ελάχιστη τιμή της.

Θεωρούμε μια συνάρτηση g η οποία στο $x_0 = 1$ να παίρνει επίσης ελάχιστη τιμή.

Προφανώς υπάρχουν πολλές επιλογές για την g .

Ας επιλέξουμε ως g την $g(x) = 4 - \sin(\pi(x+1))$.

Η g για $x=1$ και γενικότερα για $x=2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, παίρνει επίσης ελάχιστη τιμή. Η ελάχιστη τιμή της g είναι το 3.

Οπότε κατασκευάζουμε την παρακάτω άσκηση:

Άσκηση

Να λυθεί ή εξίσωση:

$$\left(3x^2 - x - \ln x\right)\left(4 - \sin(\pi(x+1))\right) = 6x^2, \quad (1)$$

Υπόδειξη

Η εξίσωση ορίζεται στο $(0, +\infty)$. $(1) \Leftrightarrow \left(3 - \frac{x + \ln x}{x^2}\right)\left(4 - \sin(\pi(x+1))\right) = 6$