ΠΡΟΔΡΟΜΟΣ Π. ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ

Μυτιλήνη, 11-12-2016

Με αφορμή το ΘΕΜΑ 3ο Πανελλαδικών εξετάσεων 2003

Συνέχεια αντίστροφης συνάρτησης

ΘΕΜΑ 3ο Πανελλαδικών εξετάσεων 2003

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5+x^3+x$.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση $x=3$.

Ερώτηση

Θα μπορούσε η απόδειξη της συνέχειας της f^{-1} να γίνει στα πλαίσια της σχολικής ύλης;

Η απάντηση είναι καταφατική.

Απόσπασμα από το άρθρο:

«Σύνθεση συναρτήσεων, αντίστροφες συναρτήσεις, συναρτησιακές σχέσεις και συναρτήσεις που ορίζονται πεπλεγμένα (ύπαρξη και κατασκευή). 2η Έκδοση. Μυτιλήνη, 24/10/2016»

http://blogs.sch.gr/symath/

1.2.10. Θεώρημα

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ και η παράγωγός της έχει κάτω φράγμα θετικό ή άνω φράγμα αρνητικό, τότε υπάρχει θ>0 τέτοιο ώστε για κάθε $x_1,x_2\in\Delta$ να ισχύει:

$$|f(x_1)-f(x_2)|\geq\theta|x_1-x_2| \quad (1)$$

Η απόδειξη της συνέχειας της f^{-1} με f(x)= x^5+x^3+x γίνεται σε τρία βήματα:

<u>Βήμα 1</u>

Αποδεικνύουμε ότι:

Για κάθε $x_1,x_2\in IR$ ισχύει: $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\geq\left|x_1-x_2\right|$, (1).

Απόδειξη

Έχουμε:

- Αν $x_1=x_2$, τότε η σχέση $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\geq\left|x_1-x_2\right|$ ισχύει ως ισότητα.
- Αν $x_1<x_2$, τότε, επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο IR, από Θ.Μ.Τ στο $[x_1,x_2]$, παίρνουμε:

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(\xi)=5\xi^4+3\xi^2+1\geq 1\ ,\ \xi\in(x_1,x_2)$$

Άρα: $\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|\geq 1\Rightarrow\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\geq\left|x_1-x_2\right|$.

- Αν $x_2<x_1$, τότε: $\left|f(x_2)-f(x_1)\right|\geq\left|x_2-x_1\right|\Rightarrow\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\geq\left|x_1-x_2\right|$.

<u>Βήμα 2</u>

Αποδεικνύουμε ότι:

Για κάθε $y,y_o\in IR$ ισχύει $\left|y-y_o\right|\geq\left|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_o)\right|$

Απόδειξη

Είναι f(IR)=IR, γιατί η f είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$,

οπότε για κάθε $y,y_o\in IR$, υπάρχουν $x_1,x_2\in IR$, ώστε να ισχύει $x_1=f^{-1}(y)$ και $x_2=f^{-1}(y_o)$, οπότε, λόγω της (1), έχουμε:

$$\left|y-y_o\right|\geq\left|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_o)\right|,\ (2)$$

<u>Βήμα 3</u>

Αποδεικνύουμε ότι: $\lim\limits_{y\to y_o}f^{-1}(y)=f^{-1}(y_o)$.

Απόδειξη

Έχουμε, λόγω της (2), ότι:

$$-\left|y-y_o\right|\leq f^{-1}(y)-f^{-1}(y_o)\leq\left|y-y_o\right|$$

και επειδή: $\lim\limits_{y\to y_o}\left(-\left|y-y_o\right|\right)=\lim\limits_{y\to y_o}\left|y-y_o\right|=0$,σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, προκύπτει ότι: $\lim\limits_{y\to y_o}f^{-1}(y)=f^{-1}(y_o)$.