

**ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΚΥΡΙΑΚΗ 6 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2014
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Να αποδείξετε ότι αν:

- Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) = \eta.$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

A2. Πότε θα λέμε ότι μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο;

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1, τότε για κάθε πραγματικό αριθμό y η εξίσωση $f(x) = y$ έχει κατ' ανάγκη ακριβώς μια λύση ως προς x .
- Αν f, g είναι δυο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε η $g \circ f$ ορίζεται όταν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

- γ. Κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.
- δ. Αν η f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx$ μόνο όταν $\alpha < \beta < \gamma$.
- ε. Αν η ευθεία $x=x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ ή } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται ένας πραγματικός αριθμός α και η εξίσωση $z^2 + \alpha z + \alpha^2 = 0$ της οποίας οι ρίζες είναι οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 με $\text{Im}(z_1) \neq \text{Im}(z_2)$.

B1. α) Να αποδείξετε ότι $\alpha \neq 0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

β) Αν $\frac{z_1}{\alpha} = w$, τότε να αποδείξετε ότι $w^3 = 1$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

B2. Αν επιπλέον ισχύει $z_1^3 + z_2^3 = 16$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

β) Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 .

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

B3. Αν $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ και $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$ τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών u για τους οποίους ισχύει:

$$|u - z_1|^2 + |u - z_2|^2 \leq 8.$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

B4. Να αποδείξετε ότι για τους μιγαδικούς u του ερωτήματος **B3** ισχύουν:

α) $|u+1| \leq 1$

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

β) $|u^2 + 2u + 4| \leq 4.$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) = (e^x - 1) \cdot \ln x$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Γ2. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Γ3. α) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα στο διάστημα $[1, +\infty)$ (**μονάδες 3**) και να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο της $A(1, f(1))$ (**μονάδες 2**).

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει $\frac{e^x - 1}{e - 1} > \frac{x - 1}{\ln x}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ για το οποίο ισχύει:

$$e^{x_0} \cdot \ln(e \cdot x_0) = 1.$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω k πραγματικός αριθμός και f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο \mathbb{R} για την οποία ισχύουν:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = k$.
- $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- $f'(x) + \frac{2x}{x^2 + 1} = 2x[f(x) + \ln(x^2 + 1)] + k$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δίνονται επιπλέον οι συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x f(t) dt, \quad x \geq \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad G(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x (tf(t)) dt, \quad x \geq \frac{1}{2}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

α) $k=0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β) $f(x) = e^{x^2} - \ln(x^2 + 1), x \in \mathbb{R}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Δ2. Να λύσετε στο $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ την εξίσωση $\int_{x^{F(x)}}^{G(x)} f(t)dt = 0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Δ3. Να αποδείξετε ότι: $2 \int_{\frac{1}{2}}^2 f(t)dt > \int_{\frac{1}{2}}^2 (tf(t))dt$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$F(x) = \frac{G(2x) - G(x^2 + 1) + \frac{x}{4}G(x)}{x - 1}.$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 11.30 π.μ.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΕΣ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ