

ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΜΟΥΔΡΟΥ		ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2012 - 2013	
ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ			
ΤΜΗΜΑ.....			
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ			
ΕΠΩΝΥΜΟ:.....			
ΟΝΟΜΑ:.....			
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 28 - 05 - 2013			
ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ : ΑΡΜΑΟΣ ΠΕΤΡΟΣ , ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΗΣ ΣΤΥΛΙΑΝΟΣ			
ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ	ΟΛΟΓΡΑΦΩΣ	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΣ	ΥΠΟΓΡΑΦΗ
Εκατονταβάθμια κλίμακα			
Εικοσαβάθμια κλίμακα			

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \quad . \quad (\text{Μονάδες 15})$$

B. Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

1. Το μέτρο του μιγαδικού αριθμού $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, δίνεται από τον τύπο $|z| = \sqrt{x^2 - y^2}$.

2. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

3. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

4. Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

5. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: $|z+4|=2|z+1|$ (Μονάδες 9)

B. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w για τους οποίους ισχύει: $|w-1|=|w-i|$ (Μονάδες 9)

Γ. Να βρείτε τους μιγαδικούς z και w για τους οποίους ισχύει $z=w$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 1$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και α, β πραγματικοί αριθμοί. Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = -1$ και $x_2 = 3$.

A. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -3$ και $\beta = -9$. (Μονάδες 6)

B. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 9)

Γ. Να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων της συνάρτησης f .

(Μονάδες 4)

Δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 3)$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x \ln x + x^2 - 2$, $x \geq 1$.

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

(Μονάδες 6)

Β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει σημεία καμπής.

(Μονάδες 6)

Γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x \ln x + x^2 = 2$ έχει μία ακριβώς ρίζα $\rho \in (1, +\infty)$.

(Μονάδες 6)

Δ. Αν ρ είναι η ρίζα του ερωτήματος Γ να αποδείξετε ότι υπάρχει αριθμός $\xi \in (1, \rho)$ τέτοιος, ώστε $f'(\xi)(\rho - 1) = 1$.

(Μονάδες 7)

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΚΑΙ ΚΑΛΗ ΣΤΑΔΙΟΔΡΟΜΙΑ !

Ο Διευθυντής

Ο Εισηγητής

ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΗΣ ΣΤΥΛΙΑΝΟΣ

ΑΡΜΑΟΣ ΠΕΤΡΟΣ