

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΑΜΦΙΛΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A 1. Αν $\vec{a}=(x_1, y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2, y_2)$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που σχηματίζουν γωνία θ να αποδείξετε ότι $\text{συν}\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 9

A 2. Να δώσετε τον ορισμό του γινομένου ενός πραγματικού αριθμού $\lambda \neq 0$ με το μη μηδενικό διάνυσμα \vec{a} .

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

A 3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$.

β. Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xy_1 + yx_1 = \rho^2$.

γ. Η εκκεντρότητα e της έλλειψης είναι μικρότερη της μονάδας.

δ. Αν O είναι ένα σημείο αναφοράς τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα έχουμε $\vec{AB} = \vec{OA} - \vec{OB}$

ε. Στην παραβολή $x^2 = 2py$, η εξίσωση της διευθετούσας είναι $x = \frac{p}{2}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ και $\vec{u} = \vec{a} - \vec{\beta}$ με $|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $(\alpha, \beta) = 120^\circ$

B 1. Να αποδείξετε ότι το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$ είναι $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -\frac{1}{2}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

B 2. Να αποδείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος \vec{u} είναι $|\vec{u}| = \sqrt{3}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

B 3. Να υπολογίσετε την γωνία των διανυσμάτων \vec{a} και \vec{u}

ΜΟΝΑΔΕΣ 9

B 4. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ αν $\vec{a} \perp (\vec{a} + \lambda\vec{\beta})$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραβολή $C_1 : y^2 = 2px$ με εστία E και η ευθεία ε με εξίσωση $\varepsilon: y = ax + \frac{1}{a}$, $a \neq 0$. Αν $M(1,2)$ είναι κοινό τους σημείο να αποδείξετε ότι:

- Γ1.** Οι εξισώσεις της παραβολής C_1 και της ευθείας ε είναι $C_1 : y^2 = 4x$ και $\varepsilon: y = x + 1$ αντιστοίχως. **ΜΟΝΑΔΕΣ 6**
- Γ2.** Η ευθεία ε εφάπτεται της παραβολής στο σημείο $M(1,2)$. **ΜΟΝΑΔΕΣ 4**
- Γ3. α.** Η κάθετη ευθεία ζ που φέρνουμε από την εστία E προς στην ευθεία ε και η ευθεία ε τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$ στο σημείο $N(0,1)$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 8**
- β.** Η απόσταση της εστίας της παραβολής από την ευθεία ε είναι $d(E,\varepsilon) = \sqrt{2}$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 3**
- γ.** Το εμβαδόν του τριγώνου EMN είναι $(EMN) = 1$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 4**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται τα μη παράλληλα διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$ και η εξίσωση $C: x^2 + y^2 + 2|\vec{a}|x - 4|\vec{\beta}|y + 4\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$ (1)

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με ακτίνα $\rho = |\vec{a} - 2\vec{\beta}|$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 9**
- Δ2.** Αν ο παραπάνω κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων και εφάπτεται της ευθείας $\varepsilon: y = x + 2|\vec{a}| + 4|\vec{\beta}|$ να αποδείξετε ότι:
- α.** Τα διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα. **ΜΟΝΑΔΕΣ 3**
- β.** $|\vec{a}| = 2|\vec{\beta}|$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 7**
- γ.** Αν επιπλέον οι συντεταγμένες του \vec{a} είναι $\vec{a} = (\frac{1}{2}|\vec{a}|, -\sqrt{3})$ τότε:
- i.** $|\vec{a}| = 2$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 2**
- ii.** το κέντρο του κύκλου είναι το $K(-2,2)$ και η ακτίνα του $\rho = 2\sqrt{2}$. **ΜΟΝΑΔΕΣ 2**
- Δ3.** Αν οι συντεταγμένες των σημείων $M(\gamma, \delta)$ και $N(\kappa, \lambda)$ επαληθεύουν την εξίσωση του παραπάνω κύκλου τότε: $\sqrt{(\gamma - \kappa)^2 + (\delta - \lambda)^2} \leq 4\sqrt{2}$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Ο ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ
ΚΕΦΑΛΑΣ ΝΙΚΟΣ