

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2010

ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ: ΒΕΡΥΚΙΟΣ ΧΡΥΣΟΒΑΛΑΝΤΗΣ

Θέμα 1^ο

1. Αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που σχηματίζουν γωνία θ , να αποδειχθεί ότι :

$$\cos\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} . \quad (13 \text{ μονάδες})$$

2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

A. Έστω $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ δύο διανύσματα του καρτεσιανού

επιπέδου. Ισχύει ότι : $\vec{a} // \vec{\beta}$ αν και μόνο αν $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$.(2 μονάδες)

B. Το διάνυσμα $\text{προβ}_{\vec{a}}\vec{v}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα \vec{a} . (2 μονάδες)

Γ. Κάθε εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία γραμμή. (2 μονάδες)

Δ. Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $x_1x + y_1y - \rho^2 = 0$. (2 μονάδες)

E. Η εκκενρότητα κάθε έλλειψης είναι μικρότερη από την εκκενρότητα κάθε υπερβολής. (2 μονάδες)

ΣΤ. Η υπερβολή με εξίσωση $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ τέμνει τον άξονα $x'x$.

(2 μονάδες)

Θέμα 2^ο

Δίνεται η έλλειψη $x^2 + 4y^2 = 4$.

1. Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E' , E και την εκκεντρότητα της έλλειψης. **(8 μονάδες)**
2. Να επαληθεύσετε ότι το σημείο $M(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ανήκει στην έλλειψη και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης \mathcal{E} της έλλειψης στο M . **(8 μονάδες)**
3. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της ευθείας \mathcal{E} με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. **(9 μονάδες)**

Θέμα 3^ο

Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$ και το σημείο του $M(4, 7)$.

1. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου. **(7 μονάδες)**
2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης \mathcal{E} του κύκλου, με σημείο επαφής το M . **(12 μονάδες)**
3. Να υπολογίσετε την απόσταση της αρχής των αξόνων O από την ευθεία \mathcal{E} . **(6 μονάδες)**

Θέμα 4^ο

Δίνεται η υπερβολή $x^2 - y^2 = 4$ και σημείο της $M(x_1, y_1)$.

1. Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ της υπερβολής. **(6 μονάδες)**
2. Από το σημείο M φέρουμε ευθείες δ_1, δ_2 παράλληλες προς τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντίστοιχα. Έστω $ΑΜΒΓ$ το παραλληλόγραμμο με κορυφές τα σημεία τομής των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta_1, \delta_2$. Να δείξετε ότι $(ΑΜΒΓ) = 2$. **(19 μονάδες)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

Ο ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ