Η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

13/3/2010

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν f είναι συνάρτηση συνεχής σε διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$, $x\in\Delta$ είναι μια παράγουσα της f στο Δ.

Δηλαδή ισχύει: $\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)' = f(x)$ για κάθε $x\in\Delta$. (Η παραγώγιση γίνεται ως προς τη μεταβλητή x).

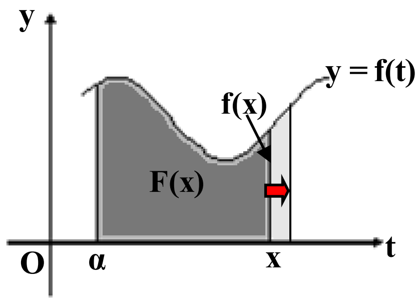
Γενικότερα ισχύει:

$$\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt\right)' = f\left(g(x)\right)g'(x)$$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

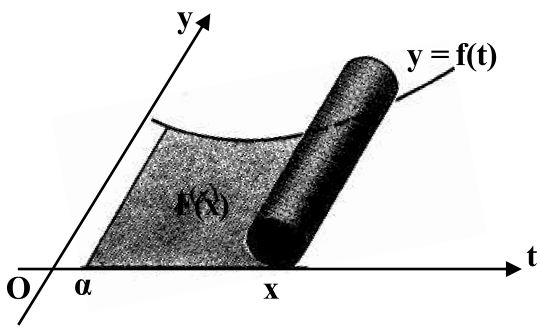
➲ **Γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας** $\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)' = f(x)$, $x\in\Delta$.

1. Φανταστείτε ότι το t κινείται προς τα δεξιά κατά μήκος του άξονα των t και σαρώνει επιφάνεια με κατακόρυφο ύψος f(t). Τότε το εμβαδό της σκιασμένης επιφάνειας ισούται με $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$.



Καθώς, όμως, το t περνά από το x, ο ρυθμός με τον οποίο επιφάνεια προστίθεται στη σκιασμένη επιφάνεια ισούται με f(x).

2. Φανταστείτε ότι σκεπάζουμε την επιφάνεια κάτω από την καμπύλη y=f(t) από αριστερά προς τα δεξιά, ξετυλίγοντας ένα χαλί μεταβλητού πλάτους f(t). Το εμβαδό της σκεπασμένης



επιφάνειας ισούται με $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$.

Καθώς το χαλί ξετυλίγεται, τη στιγμή που περνά από το x, ο ρυθμός με τον οποίο καλύπτεται το πάτωμα ισούται με f(x).

➲ Οι μαθητές θα πρέπει να κατανοήσουν ότι:

1. Αν $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$, όπου f συνάρτηση συνεχής με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ και α ένα σημείο του Δ, τότε:

i. Η F έχει πεδίο ορισμού το Δ.

ii. **F(α)=0.**

iii. $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = F(\beta) = \lim_{x\to\beta}\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$, διότι η συνάρτηση F ως παραγωγίσιμη είναι και συνεχής.

iv. $\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)' = f(x),\ x\in\Delta$.

Το ολοκλήρωμα με μεταβλητό άκρο είναι **συνάρτηση παραγωγίσιμη.**

2. $\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt\right)' = 0$, όπου <u>α,β σταθερά και η παραγώγιση γίνεται ως προς μια μεταβλητή x.</u>

Το ολοκλήρωμα με σταθερά όρια ολοκλήρωσης είναι σταθερός αριθμός.

3. Από iv) και ii) προκύπτει ότι συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι η παράγουσα της f στο διάστημα Δ που διέρχεται από το σημείο Μ(α,0).

4. Το ολοκλήρωμα $\int f(t)dt$ παριστάνει το σύνολο <u>**όλων**</u> των παραγουσών της f σε ένα διάστημα Δ.

5. $\int f(t)dt = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt + \mathbf{c},\ \mathbf{x\in\Delta}$ **και** $\mathbf{c\in\Re}$

6. **i**. Αν h και g είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες σε διάστημα Δ, τότε δεν ισχύει η ισοδυναμία: $h(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\Delta \Leftrightarrow h'(x)=g'(x)$ για κάθε $x\in\Delta$.

ii. Αν f είναι συνάρτηση συνεχής σε διάστημα Δ και g συνάρτηση παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ με $g(\alpha)=0$, τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει:

$$\int_\alpha^x f(t)dt=g(x)\Leftrightarrow \left(\int_\alpha^x f(t)dt\right)'=g'(x)$$

7. $\left(\int_x^\alpha f(t)dt\right)'=-f(x)$, $x\in\Delta$.

8. $\left(\int_\alpha^\beta f(xt)dt\right)'\neq 0$ εν γένει. Η παραγώγιση γίνεται ως προς τη μεταβλητή x.

➲ **Πεδίο ορισμού της συνάρτησης** $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$

Για να ορίζεται η F, πρέπει τα όρια ολοκλήρωσης να **περιέχονται** στο ίδιο διάστημα του πεδίου ορισμού της f.

Έτσι:

- Αν το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα Δ, τότε το πεδίο ορισμού της F είναι το Δ.
- Αν το D_f είναι ένωση διαστημάτων, τότε το πεδίο ορισμού της F είναι εκείνο το διάστημα στο οποίο ανήκει το α.

➲ **Πεδίο ορισμού της συνάρτησης** $F(x)=\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt$

Για να ορίζεται η F πρέπει τα όρια ολοκλήρωσης να **περιέχονται** στο ίδιο διάστημα του πεδίου ορισμού της f.

- Αν το πεδίο ορισμού της f είναι διάστημα Δ (εννοείται ότι $\alpha \in \Delta$), τότε απαιτούμε:
    - $x \in D_g$ και
    - $g(x) \in \Delta$
- Αν το πεδίο ορισμού D_f της f είναι ένωση διαστημάτων $D_f = \Delta_1 \cup \Delta_2$, τότε εντοπίζουμε το διάστημα Δ_i στο οποίο περιέχεται το σταθερό άκρο α και απαιτούμε:
    - $x \in D_g$ και
    - $g(x) \in \Delta_i$

➲ **Πεδίο ορισμού της συνάρτησης** $F(x)=\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt$

Για να ορίζεται η F, πρέπει τα όρια ολοκλήρωσης να **περιέχονται** στο ίδιο διάστημα του πεδίου ορισμού της f .

- Αν το πεδίο ορισμού της f είναι διάστημα Δ, τότε απαιτούμε:
    - $x \in D_g \cap D_h$ και
    - $g(x), h(x) \in \Delta$
- Αν το πεδίο ορισμού D_f της f είναι ένωση διαστημάτων $D_f = \Delta_1 \cup \Delta_2$, τότε απαιτούμε:
    - $x \in D_g \cap D_h$ και
    - τα $g(x)$ και $h(x)$ να περιέχονται στο ίδιο διάστημα Δ_i του πεδίου ορισμού της f.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $F(x)=\int_{-1}^{x}\frac{\eta\mu t}{t}\,dt$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της $f(t)=\frac{\eta\mu t}{t}$ είναι το σύνολο $D_f = (-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$.

Για να ορίζεται η F, πρέπει τα όρια ολοκλήρωσης -1 και x να **περιέχονται** στο ίδιο διάστημα του πεδίου ορισμού της f.

Επειδή $-1\in(-\infty, 0)$, θα πρέπει $x\in(-\infty, 0)$. Άρα, το πεδίο ορισμού της F είναι το διάστημα $(-\infty, 0)$.

2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x)=\int_{x}^{x+1}\frac{1}{t}dt$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της F.

β) την παράγωγο της F.

Λύση

α. Το πεδίο ορισμού της $f(t)=\frac{1}{t}$ είναι το σύνολο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Για να ορίζεται η F, πρέπει τα όρια ολοκλήρωσης x και x+1 να περιέχονται στο ίδιο διάστημα του πεδίου ορισμού της f.

Πρέπει, λοιπόν:

$(x< 0$ και $x+1<0)$ ή $(x>0$ και $x+1>0)$ $\Leftrightarrow$ $(x < -1$ ή $x > 0)$.

Άρα: $D_F = (-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$

β. 1ος τρόπος:

Τα x και x+1 περιέχονται στο ίδιο διάστημα του πεδίου ορισμού της f σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

1^{η} όταν $x\in(-\infty,-1)$ και

2^{η} όταν $x\in(0,+\infty)$.

Σε κάθε περίπτωση παίρνουμε έναν α που να ανήκει στο ίδιο διάστημα με τα x και x+1, δηλαδή παίρνουμε:

$\alpha<0$, όταν $x<-1$ και

α>0, όταν x>0

Οπότε θα έχουμε:

$$F(x)=\int_x^{\alpha} f(t)dt+\int_{\alpha}^{x+1} f(t)dt=\int_{\alpha}^{x+1} f(t)dt-\int_{\alpha}^{x} f(t)dt.$$

Έτσι σε κάθε περίπτωση θα ισχύει:

$$F'(x)=f(x+1)(x+1)'-f(x)=f(x+1)-f(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}.$$

Επομένως: $F'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$, $x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$.

β. 2ος τρόπος:

Αν G μια παράγουσα της f στο διάστημα $(-\infty,0)$, τότε:

$F(x)=G(x+1)-G(x)$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)$, οπότε:

$$F'(x)=G'(x+1)(x+1)'-G'(x)=f(x+1)-f(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x},\ x\in(-\infty,-1).$$

Αν H μια παράγουσα της f στο διάστημα $(0,+\infty)$, τότε:

$F(x)=H(x+1)-H(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, οπότε:

$$F'(x)=H'(x+1)(x+1)'-H'(x)=f(x+1)-f(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x},\ x\in(0,+\infty).$$

Επομένως: $F'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$, $x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$.

Σχόλιο:

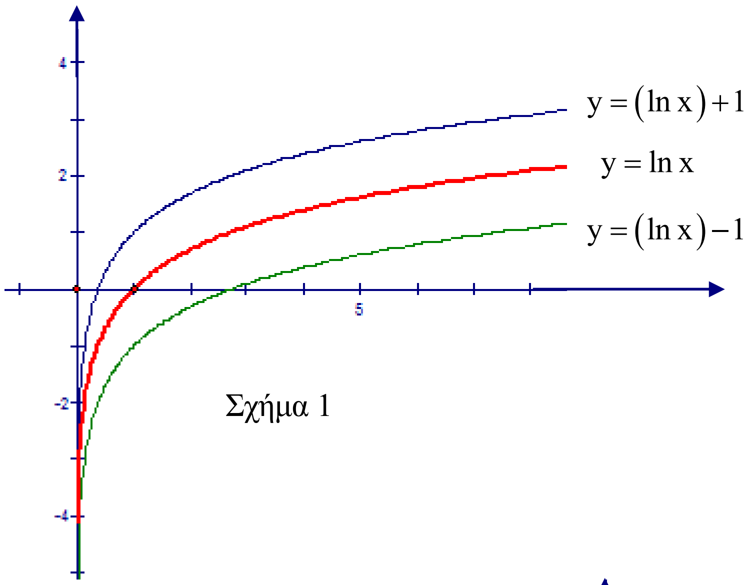
Υπενθυμίζεται ότι:

«Κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό».

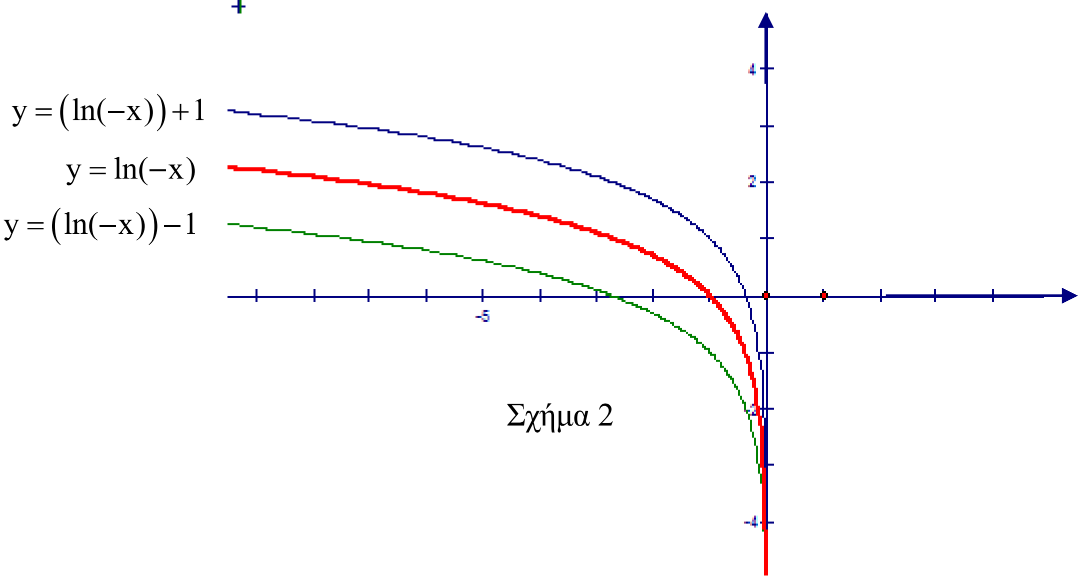
Η συνάρτηση $f(t) = \frac{1}{t}$ είναι συνεχής και έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Επειδή το σύνολο Α είναι **<u>ένωση διαστημάτων</u>**, θα βρούμε παράγουσες σε κάθε διάστημα χωριστά.

Στο διάστημα $(0, +\infty)$ οι παράγουσες της f δίνονται από τον τύπο $G(x)= \ln x+c$ με $c\in\Re$ (Σχήμα 1), ενώ στο διάστημα $(-\infty, 0)$ δίνονται από τον τύπο:

$H(x)= \ln(-x)+c$ με $c\in\Re$ (Σχήμα 2).



Σχήμα 1



Σχήμα 2

3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x)=\int_{\frac{3}{x}}^{x+1}\frac{1}{9-t^2}dt$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της F.

β) την παράγωγο της F.

Λύση

α) Έστω $f(t)=\frac{1}{9-t^2}$. Είναι $D_f=(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,+\infty)$.

Για να ορίζεται η F, πρέπει τα όρια ολοκλήρωσης, δηλαδή τα $\frac{3}{x}$ και x+1, να περιέχονται στο ίδιο διάστημα του πεδίου ορισμού της f.

Πρέπει λοιπόν:

$x+1<-3$ και $\frac{3}{x}<-3$ (1)

ή $-3<x+1<3$ και $-3<\frac{3}{x}<3$ (2)

ή $x+1>3$ και $\frac{3}{x}>3$ (3)

Έχουμε:

- (1) $\Leftrightarrow x<-4$ και $0>x>-1$ **αδύνατο.**
- (2) $\Leftrightarrow -4<x<2$ και $-1<\frac{1}{x}<1$

Είναι $-1<\frac{1}{x}<1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x}\right|<1 \Leftrightarrow |x|>1 \Leftrightarrow x<-1$ ή $x>1$

Άρα: (2) $\Leftrightarrow x\in(-4,-1)\cup(1,2)$

(3) $\Leftrightarrow \left(x>2 \text{ και } \frac{1}{x}>1\right) \Leftrightarrow (x>2 \text{ και } 0<x<1)$ **αδύνατο.**

Άρα, ισχύει μόνο η περίπτωση 2, οπότε $D_F=(-4,-1)\cup(1,2)$.

β) 1ος τρόπος:

Τα $\frac{3}{x}$ και x+1 πρέπει να περιέχονται στο ίδιο διάστημα του πεδίου ορισμού της f (και μάλιστα στο (-3,3)) μόνο όταν $x\in(-4,-1)\cup(1,2)$.

Παίρνουμε έναν α που να ανήκει στο ίδιο διάστημα με τα $\frac{3}{x}$ και x+1, δηλαδή έναν $\alpha\in(-3,3)$ που συμβαίνει, όταν $x\in D_F$. Τότε:

$$F(x)=\int_{\frac{3}{x}}^{\alpha} f(t)dt+\int_{\alpha}^{x+1} f(t)dt=\int_{\alpha}^{x+1} f(t)dt-\int_{\alpha}^{\frac{3}{x}} f(t)dt$$

Επομένως:

$$F'(x)=f(x+1)(x+1)'-f\left(\frac{3}{x}\right)\cdot\left(\frac{3}{x}\right)'=f(x+1)+\frac{3}{x^2}f\left(\frac{3}{x}\right)=\frac{1}{9-(x+1)^2}+\frac{3}{x^2}\cdot\frac{1}{9-\left(\frac{3}{x}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{9-(x+1)^2}+\frac{1}{3x^2-3},\ x\in(-4,-1)\cup(1,2).$$

β) 2ος τρόπος:

Αν G μια παράγουσα της f στο διάστημα (-3,3) τότε:

$$F(x)=G(x+1)-G\left(\frac{3}{x}\right),\ x\in(-4,-1)\cup(1,2)$$

οπότε:

$$F'(x)=G'(x+1)(x+1)'-G'\left(\frac{3}{x}\right)\cdot\left(\frac{3}{x}\right)'=f(x+1)+\frac{3}{x^2}f\left(\frac{3}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{9-(x+1)^2}+\frac{1}{3x^2-3},\ x\in(-4,-1)\cup(1,2)$$

Σχόλιο:

Αν H μια παράγουσα της f στο διάστημα $(-\infty$-3) ή στο $(3,+\infty)$, τότε, αφού τα συστήματα (1) και (3) είναι αδύνατα, δε θα ορίζεται η συνάρτηση $y=H(x+1)-H\left(\frac{3}{x}\right)$.

Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03

Δ/νσης Β/θμιας Εκπ/σης Ν. Λέσβου

Πρόδρομος Π. Ελευθερίου