ΑΡΡΗΤΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

➲ ΑΡΡΗΤΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Οι παραστάσεις $\sqrt{A(x)}$, $\sqrt[3]{A(x)}$ και γενικότερα η $\sqrt[\nu]{A(x)}$, όπου ν θετικός ακέραιος με ν>1, ορίζονται, αν και μόνο αν A(x) ≥0.

➲ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ $\sqrt{A(x)} = B(x)$

Για να επιλύσουμε την εξίσωση $\sqrt{A(x)} = B(x)$, μπορούμε να εργαστούμε με 3 τρόπους:

<u>1ος τρόπος:</u> Όπως στο Παράδειγμα 2 της σελίδας 82 του Σχολικού βιβλίου.
Συγκεκριμένα, εργαζόμαστε ως εξής:
Η εξίσωση $\sqrt{A(x)} = B(x)$ ορίζεται αν και μόνο αν A(x) ≥0.
Διαδοχικά έχουμε:

$\sqrt{A(x)} = B(x)$,

$\left(\sqrt{A(x)}\right)^2 = \left(B(x)\right)^2$

$A(x) = \left(B(x)\right)^2$, (1)

Επιλύουμε την (1), οπότε:
Αν η (1) είναι αδύνατη, τότε προφανώς και αρχική εξίσωση θα είναι αδύνατη.
Αν η (1) έχει ρίζες, τότε εξετάζουμε, με επαλήθευση, ποιες από αυτές είναι λύσεις της **<u>αρχικής</u>** εξίσωσης.

<u>Σχόλιο:</u>

1. Είναι προφανές ότι, αν η (1) έχει ρίζες, τότε αυτές θα ικανοποιούν τον περιορισμό A(x) ≥0.
2. Ο παραπάνω τρόπος επίλυσης διευκολύνει το μαθητή να επιλύει άρρητες εξισώσεις της μορφής $\sqrt{A(x)} - \sqrt{B(x)} = \Gamma(x)$ ή και συνθετότερες.

<u>2ος τρόπος:</u>

Η εξίσωση $\sqrt{A(x)} = B(x)$ ορίζεται αν και μόνο αν A(x) ≥0.

Είναι φανερό ότι οι τιμές του x, για τις οποίες ισχύει B(x)< 0, αποκλείεται να είναι λύσεις της αρχικής εξίσωσης.

Επομένως, ψάχνουμε για λύσεις, για τις οποίες θα ισχύει B(x) ≥ 0 και, φυσικά, και A(x)≥0.

Για τις τιμές του x, για τις οποίες ισχύει B(x) ≥ 0 και A(x) ≥0, έχουμε:

$\sqrt{A(x)} = B(x) \Leftrightarrow A(x)=(B(x))^2 \Leftrightarrow \ldots\ldots$

<u>Σχόλιο:</u>

1. Αν η εξίσωση $A(x) = \left(B(x)\right)^2$ έχει ρίζες, τότε όσες από αυτές ικανοποιούν τον περιορισμό B(x) ≥0, θα ικανοποιούν και τον A(x) ≥0, άρα θα επαληθεύουν και την αρχική εξίσωση $\sqrt{A(x)} = B(x)$.

2. Ο 2ος τρόπος κρίνεται αναγκαίο να διδαχτεί, αφού χρησιμοποιείται για την επίλυση άρρητων ανισώσεων. Ο μαθητής θα πρέπει να έχει έναν ενιαίο τρόπο επίλυσης άρρητων εξισώσεων και ανισώσεων.

<u>3ος τρόπος:</u>

Έχουμε:

$$\sqrt{A(x)} = B(x) \Leftrightarrow \left.\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) = \left(B(x)\right)^2 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \ldots..$$

Αν η εξίσωση $A(x) = \left(B(x)\right)^2$ έχει ρίζες, τότε όσες από αυτές ικανοποιούν τον περιορισμό B(x) ≥0, θα ικανοποιούν και τον A(x) ≥0, άρα θα επαληθεύουν και την αρχική εξίσωση $\sqrt{A(x)} = B(x)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

✓ Εφαρμογή 1

Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $\sqrt{x} = x - 2$ (Παράδειγμα 2 της σελίδας 82 του σχολικού βιβλίου).

β. $\sqrt{3x^2 + 2x - 1} = 3x^2 + 2x - 3$

Λύση της εξίσωσης α

1ος τρόπος: Όπως στο σχολικό βιβλίο. Να τονιστεί ,όμως, ότι, ενώ οι ρίζες 4 και 1 της εξίσωσης $x^2-5x+4=0$ ικανοποιούν τον περιορισμό $x \geq 0$, εντούτοις, όπως διαπιστώνεται με επαλήθευση, ρίζα της $\sqrt{x} = x - 2$ είναι μόνο το 4.

2ος τρόπος:

Η εξίσωση $\sqrt{x} = x - 2$ ορίζεται αν και μόνο αν $x \geq 0$.

Είναι φανερό ότι οι τιμές του x, για τις οποίες ισχύει $x-2 < 0$, δηλαδή $x<2$, αποκλείεται να είναι λύσεις της αρχικής εξίσωσης.

Επομένως, ψάχνουμε για λύσεις, για τις οποίες θα ισχύει $x \geq 2$ και $x \geq 0$ (αρχικός περιορισμός), δηλαδή $x \geq 2$

Για τις τιμές του x με $\boxed{x \geq 2}$ έχουμε:

$\sqrt{x} = x - 2 \Leftrightarrow x=(x-2)^2 \Leftrightarrow \ldots x=1$ ή $x=4$.

Η τιμή $x=1<2$ απορρίπτεται, γιατί δεν ικανοποιεί τον περιορισμό $x \geq 2$, ενώ η $x=4$ είναι δεκτή.

3ος τρόπος:

Έχουμε $\sqrt{x} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, & (1) \\ x - 2 \geq 0, & (2) \\ x = (x-2)^2 \end{cases}$

Έχουμε: $x=(x-2)^2 \Leftrightarrow \ldots x=1$ ή $x=4$. Η $x=1$ απορρίπτεται ,γιατί δεν ικανοποιεί τον περιορισμό (2), ενώ η $x=4$ είναι δεκτή, γιατί τον ικανοποιεί.

Σχόλιο:

Οι ρίζες της εξίσωσης $x=(x-2)^2$ είναι προφανές ότι ικανοποιούν τον περιορισμό (1).

4ος τρόπος:

Η εξίσωση $\sqrt{x} = x - 2$ ορίζεται αν και μόνο αν $x \geq 0$.

Με αυτόν τον περιορισμό θέτουμε $\sqrt{x}=t$, $t \geq 0$, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$t= t^2-2$ με $t \geq 0$.

Έχουμε: $t= t^2-2 \Leftrightarrow t^2-t-2 =0 \Leftrightarrow t=2$ ή $t= -1$

- Η τιμή $t= -1<0$ απορρίπτεται, γιατί δεν ικανοποιεί τον περιορισμό $t\geq 0$.
- Για την τιμή $t=2\geq 0$, έχουμε $\sqrt{x}=2$, οπότε $x=4$.

Επομένως, η εξίσωση $\sqrt{x} = x-2$ έχει μια μόνο ρίζα την $x= 4$.

Σχόλιο.

Καθένας από τους τέσσερις προτεινόμενους τρόπους χρησιμοποιείται για την επίλυση ασκήσεων του σχολικού βιβλίου.

Λύση της εξίσωσης β

Η εξίσωση $\sqrt{3x^2+2x-1}=3x^2+2x-3$ ορίζεται αν και μόνο αν $3x^2+2x-1 \geq 0$.

Θέτουμε $3x^2+2x-1=t$, οπότε η εξίσωση γράφεται: $\sqrt{t}=t-2$ ……………

✓ <u>Εφαρμογή 2</u>

Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt[3]{5+3x} = 1+x$.

Λύση

<u>1ος τρόπος:</u>

Έχουμε:

$$\sqrt[3]{5+3x} = 1+x \Leftrightarrow \begin{cases} 5+3x \geq 0, & (1) \\ 5+3x = (1+x)^3, & (2) \end{cases}$$

$(2) \Leftrightarrow 5+3x = 1+3x+3x^2+x^3 \Leftrightarrow x^3+3x^2-4 = 0 \Leftrightarrow x^3+3x^2-3-1 = 0 \Leftrightarrow$

$x^3-1+3(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = -2$ ή $x =1$

Από τις ρίζες αυτές μόνο το 1 επαληθεύει την (1), άρα η αρχική εξίσωση έχει μοναδική ρίζα το 1.

<u>2ος τρόπος:</u>

Η εξίσωση ορίζεται αν και μόνο αν $5+3x\geq 0$.

Με αυτό τον περιορισμό διαδοχικά έχουμε:

$$\sqrt[3]{5+3x} = 1+x$$

$$\left(\sqrt[3]{5+3x}\right)^3 = (1+x)^3$$

$$5+3x = 1+3x+3x^2+x^3$$

$$x^3+3x^2-4 = 0, \quad (1)$$

Επιλύοντας την (1) είτε με τη βοήθεια του σχήματος Horner είτε κάνοντας το πρώτο μέλος γινόμενο, βρίσκουμε ότι x = –2 ή x=1
Από τις ρίζες αυτές διαπιστώνουμε, με επαλήθευση, ότι μόνο το 1 είναι ρίζα της αρχικής εξίσωσης.

3ος τρόπος:

Η εξίσωση $\sqrt[3]{5+3x}=1+x$ ορίζεται αν και μόνο αν $5+3x\geq 0$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις: $1+x<0$, $1+x\geq 0$.

Έχουμε:

- $1+x<0 \Leftrightarrow x<-1$.

Είναι προφανές ότι οι τιμές του x με $x<-1$ δεν είναι λύσεις της εξίσωσης.

- $1+x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$.

Για τις τιμές του x με $x\geq -1$ και $5+3x\geq 0$ (αρχικός περιορισμός), δηλαδή για $x\geq -1$, έχουμε:

$\sqrt[3]{5+3x}=1+x \Leftrightarrow 5+3x=(1+x)^3 \Leftrightarrow 5+3x = 1+3x+3x^2+x^3 \Leftrightarrow x^3+3x^2-4 = 0 \Leftrightarrow$

$x^3+3x^2-3-1 = 0 \Leftrightarrow x^3-1+3(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = -2$ ή $x = 1$

Από τις ρίζες αυτές μόνο το 1 επαληθεύει τον περιορισμό $x\geq -1$, άρα η αρχική εξίσωση έχει μοναδική ρίζα το 1.

✓ Εφαρμογή 3

Να λυθεί η εξίσωση $\mathbf{x^2+\frac{3x}{\sqrt{x}}=5-\sqrt{x}}$

Λύση

Η εξίσωση ορίζεται αν και μόνο αν $x>0$. Με αυτό τον περιορισμό θέτουμε $\sqrt{x}=t>0$, οπότε $x=t^2$ και, επομένως, η εξίσωση γράφεται: $t^4+\frac{3t^2}{t}=5-t$ ή $t^4+4t-5=0$

Έχουμε:

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner ή με διάσπαση του 4 ή του 5, βρίσκουμε ότι:

$t^4+4t-5=0 \Leftrightarrow (t-1)(t^3+t^2+t+5)=0 \Leftrightarrow t=1$, αφού $t\geq 0$

Για $t=1$, από τη σχέση, $x=t^2$ παίρνουμε ότι $x=1$.

Για το 1, παρόλο που ικανοποιεί τον περιορισμό x>0, επιβάλλεται να κάνουμε επαλήθευση.

Με επαλήθευση διαπιστώνουμε ότι το 1 είναι ρίζα της αρχικής εξίσωσης.

Άρα, η αρχική εξίσωση έχει μια μόνο ρίζα την ρ=1.

➲ ΕΠΊΛΥΣΗ ΆΡΡΗΤΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΉΣ ΕΞΊΣΩΣΗΣ

✓ <u>Παράδειγμα 1</u>.

Να λυθεί η εξίσωση: $\mathbf{\sqrt{1+4x^2} = \lambda - 2x}$, $\boldsymbol{\lambda \in \Re}$

Λύση

Η εξίσωση ορίζεται για κάθε πραγματική τιμή του x, αφού $1+4x^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \Re$.

Είναι φανερό ότι οι τιμές του x, για τις οποίες ισχύει $\lambda - 2x < 0$, δηλαδή $x > \dfrac{\lambda}{2}$, αποκλείεται να είναι λύσεις της αρχικής εξίσωσης.

Επομένως, ψάχνουμε για λύσεις, για τις οποίες θα ισχύει $\boxed{x \leq \dfrac{\lambda}{2}}$

Με τον περιορισμό $x \leq \dfrac{\lambda}{2}$, έχουμε:

$$\sqrt{1+4x^2} = \lambda - 2x \Leftrightarrow \left(\sqrt{1+4x^2}\right)^2 = (\lambda - 2x)^2 \Leftrightarrow 1+4x^2 = (\lambda - 2x)^2 \Leftrightarrow$$

$$1+4x^2 = \lambda^2 - 4\lambda x + 4x^2 \Leftrightarrow 4\lambda x = \lambda^2 - 1.$$

- Αν $\lambda = 0$, τότε η εξίσωση $4\lambda x = \lambda^2 - 1$ είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda \neq 0$, τότε $4\lambda x = \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\lambda^2 - 1}{4\lambda}$

Θα εξετάσουμε για ποιες τιμές του λ η $x = \dfrac{\lambda^2 - 1}{4\lambda}$ ικανοποιεί τον περιορισμό $\boxed{x \leq \dfrac{\lambda}{2}}$

Έχουμε:

$$\frac{\lambda^2 - 1}{4\lambda} \leq \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow \frac{\lambda^2 - 1}{4\lambda} - \frac{\lambda}{2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-1-\lambda^2}{4\lambda} \leq 0 \Leftrightarrow \lambda\left(1+\lambda^2\right) \geq 0 \Leftrightarrow \lambda > 0, \text{ αφού } \lambda \neq 0$$

Άρα, η αρχική εξίσωση έχει ρίζα μια μόνο ρίζα την $\dfrac{\lambda^2 - 1}{4\lambda}$ με $\lambda > 0$

✓ <u>Παράδειγμα 2</u>

Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{4x^2-1}=\lambda-2x$, $\lambda\in\Re$

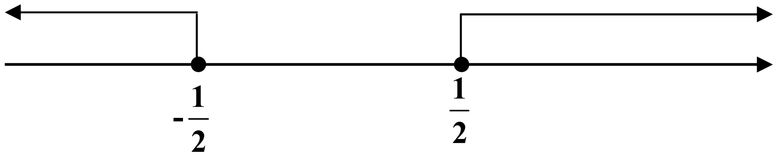
Λύση

Η εξίσωση ορίζεται αν και μόνο αν $4x^2-1\geq 0$.

Έχουμε: $4x^2-1\geq 0 \Leftrightarrow x^2\geq\frac{1}{4}\Leftrightarrow |x|^2\geq\frac{1}{4}\Leftrightarrow |x|\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\leq-\frac{1}{2}$ ή $x\geq\frac{1}{2}$

Επομένως: $\boxed{x\leq-\frac{1}{2} \text{ ή } x\geq\frac{1}{2}}$

Άρα θα ψάξουμε για λύσεις εκτός του διαστήματος $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$



Είναι φανερό ότι οι τιμές του x, για τις οποίες ισχύει $\lambda-2x<0$, δηλαδή $x>\frac{\lambda}{2}$, αποκλείεται να είναι λύσεις της αρχικής εξίσωσης.

Επομένως, ψάχνουμε για λύσεις, για τις οποίες θα ισχύει $x\leq\frac{\lambda}{2}$ και $x\leq-\frac{1}{2}$ ή $x\geq\frac{1}{2}$ (αρχικός περιορισμός)

Με τους περιορισμούς $\boxed{x\leq\frac{\lambda}{2}}$ και $\boxed{x\leq-\frac{1}{2} \text{ ή } x\geq\frac{1}{2}}$ έχουμε:

$\sqrt{4x^2-1}=\lambda-2x\Leftrightarrow\left(\sqrt{4x^2-1}\right)^2=\left(\lambda-2x\right)^2\Leftrightarrow 4x^2-1=(\lambda-2x)^2\Leftrightarrow$

$4x^2-1=\lambda^2-4\lambda x+4x^2\Leftrightarrow 4\lambda x=\lambda^2+1$.

- Αν $\lambda=0$, τότε η εξίσωση $4\lambda x=\lambda^2+1$ είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda\neq 0$, τότε $4\lambda x=\lambda^2+1\Leftrightarrow x=\frac{\lambda^2+1}{4\lambda}$

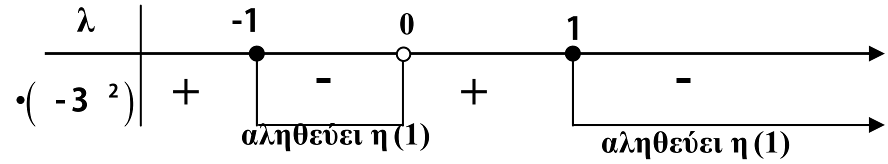
Θα εξετάσουμε για ποιες τιμές του λ η $x=\frac{\lambda^2+1}{4\lambda}$ ικανοποιεί τους περιορισμούς

$$\boxed{x\leq\frac{\lambda}{2}} \text{ και } \boxed{x\leq-\frac{1}{2} \text{ ή } x\geq\frac{1}{2}}$$

Έχουμε:

- $\frac{\lambda^2+1}{4\lambda} \le \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow \frac{\lambda^2+1}{4\lambda} - \frac{\lambda}{2} \le 0 \Leftrightarrow \frac{1-\lambda^2}{4\lambda} \le 0 \Leftrightarrow \lambda\left(1-\lambda^2\right) \le 0,$ **(1)**

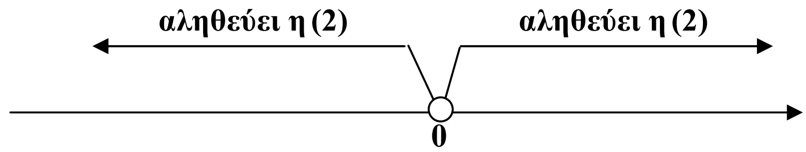
λ(1-1λ^2)=0 ⇔ λ=0 ή λ= 1ή λ= -1, οπότε οι λύσεις της (1) φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



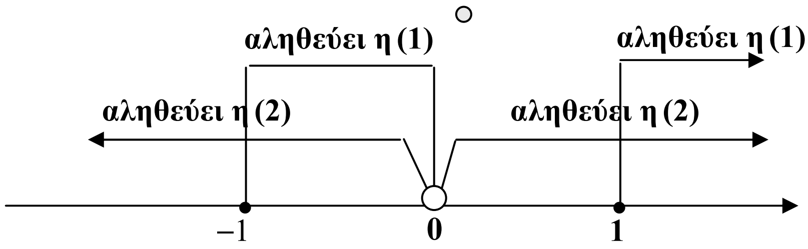
- $\frac{\lambda^2+1}{4\lambda} \le -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\lambda^2+1+2\lambda}{4\lambda} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(\lambda+1)^2}{4\lambda} \le 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda+1)^2 \le 0 \Leftrightarrow \lambda < 0$
- $\frac{\lambda^2+1}{4\lambda} \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\lambda^2+1-2\lambda}{4\lambda} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(\lambda-1)^2}{4\lambda} \ge 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1)^2 \ge 0 \Leftrightarrow \lambda > 0$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι τιμές του λ, για τις οποίες ισχύει:

$$\left(\frac{\lambda^2+1}{4\lambda} \le -\frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \frac{\lambda^2+1}{4\lambda} \ge \frac{1}{2}\right) \quad , \quad \textbf{(2)}$$



Από το παρακάτω σχήμα:



γίνεται φανερό ότι η $x = \frac{\lambda^2+1}{4\lambda}$ ικανοποιεί τους περιορισμούς:

$$x \le \frac{\lambda}{2} \text{ και } \left(x \le -\frac{1}{2} \text{ ή } x \ge \frac{1}{2}\right)$$

όταν $\lambda \in [-1,0) \cup [1,+\infty)$

Άρα, η αρχική εξίσωση έχει ρίζα μια μόνο ρίζα, την $\frac{\lambda^2+1}{4\lambda}$ με $\lambda \in [-1,0) \cup [1,+\infty)$

➲ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΡΡΗΤΗΣ ΑΝΙΣΩΣΗΣ

Παράδειγμα 1

Να λυθεί η ανίσωση $2-3x > \sqrt{x-1}$

Λύση

Η ανίσωση ορίζεται αν και μόνο αν $x-1 \geq 0$, δηλαδή $x \geq 1$.

Όμως για κάθε $x \geq 1$ είναι $\sqrt{x-1} \geq 0$ και $2-3x<0$, επομένως η αρχική ανίσωση είναι αδύνατη.

Παράδειγμα 2

Να λυθεί η ανίσωση $\sqrt{x-1} \geq 1-2x$

Λύση

Η ανίσωση ορίζεται αν και μόνο αν $x-1 \geq 0$ ή ισοδύναμα $x \geq 1$.

Όμως για κάθε $x \geq 1$ είναι $\sqrt{x-1} \geq 0$ και $1-2x<0$, επομένως η αρχική ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in [1, +\infty)$

Παράδειγμα 3

Να λυθεί η ανίσωση $2-x > \sqrt{2x-1}$

Λύση

Η ανίσωση ορίζεται αν και μόνο αν $2x-1 \geq 0$ ή ισοδύναμα $x \geq \frac{1}{2}$.

Είναι φανερό ότι οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει $2-x \leq 0$ ή ισοδύναμα $x \geq 2$, αποκλείεται να είναι λύσεις της αρχικής εξίσωσης.

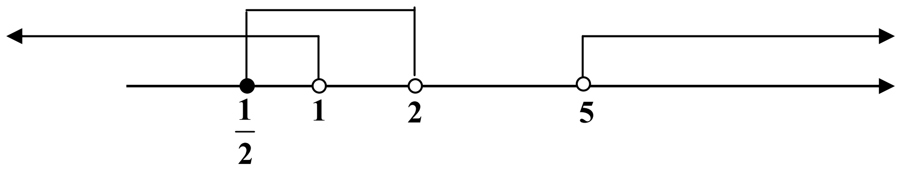
Επομένως, υποψήφιες λύσεις είναι οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει $x<2$ και $x \geq \frac{1}{2}$ (αρχικός περιορισμός). Δηλαδή $\frac{1}{2} \leq x<2$

Με τον περιορισμό αυτό έχουμε:

$2-x > \sqrt{2x-1}) \Leftrightarrow (2-x)^2 > 2x-1 \Leftrightarrow 4-4x+x^2 > 2x-1 \Leftrightarrow x^2-6x+5>0 \Leftrightarrow$

$x<1$ ή $x>5$.

Οι λύσεις της αρχικής ανίσωσης είναι οι τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις: $\frac{1}{2} \leq x < 2$ και ($x<1$ ή $x>5$)



Επομένως, οι λύσεις της είναι οι τιμές του x, για τις οποίες ισχύει:

$$\boxed{\frac{1}{2} \leq \mathbf{x} < \mathbf{1}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λυθούν οι εξισώσεις

$\sqrt{4x^2-1}=1-2x$ Απάντηση: x= $\frac{1}{2}$

$\sqrt{4x^2-1}=-1-2x$ Απάντηση: x= $-\frac{1}{2}$

$\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{9-2x}=3$ Απάντηση: x= 4 ή x= $\frac{1}{2}$

$\sqrt[3]{3x}-\sqrt[3]{7+3x}=1$ Απάντηση: x= $\frac{1}{3}$

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x)=\sqrt{x}$ και $f(x) = 2x-1$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού τους.

ii) Να εξετάσετε αν οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται.

iii) Να βρείτε το ευρύτερο διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της g.

3. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των εξισώσεων:

$$\sqrt[2009]{2x-1} = 3x-2 \quad \text{και} \quad x^3+2x^2 = x+2$$

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x)=\sqrt{25-x^2}$ και $f(x) = x+5$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού τους.

ii) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών τους παραστάσεων.

iii) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση g.

iv) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα (0, 5) η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της g.

v) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και g.