

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. i) Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = \frac{1}{2}[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2].$$

- ii) Να αποδείξετε ότι για όλους τους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ισχύει

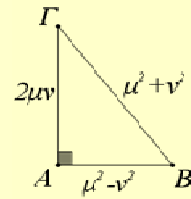
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha.$$

Πότε ισχύει ισότητα;

2. Λέμε ότι μια τριάδα θετικών ακεραίων (β, γ, α) είναι **πυθαγόρεια τριάδα** όταν $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$, δηλαδή όταν οι β, γ, α είναι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου.

- i) Αν (β, γ, α) είναι μια πυθαγόρεια τριάδα και κ είναι ένας θετικός ακέραιος, να αποδείξετε ότι και η τριάδα $(\kappa\beta, \kappa\gamma, \kappa\alpha)$ είναι επίσης πυθαγόρεια τριάδα.

- ii) Αν μ και ν θετικοί ακέραιοι με $\mu > \nu$, να δείξετε ότι η τριάδα $(\mu^2 - \nu^2, 2\mu\nu, \mu^2 + \nu^2)$ είναι πυθαγόρεια τριάδα. Στη συνέχεια να συμπληρώσετε τον πίνακα με τις πυθαγόρειες τριάδες που αντιστοιχούν στις τιμές των μ και ν που δίνονται στις δυο πρώτες στήλες:



| μ | ν | $\mu^2 - \nu^2$ | $2\mu\nu$ | $\mu^2 + \nu^2$ |
|-------|-------|-----------------|-----------|-----------------|
| 2 | 1 | | | |
| 3 | 1 | | | |
| 3 | 2 | | | |
| 5 | 2 | | | |
| 5 | 3 | | | |
| 4 | 1 | | | |

3. A) Να αποδείξετε ότι $(\alpha\beta) \leq \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2$. Τι σημαίνει η ανισότητα αυτή για ένα ορθογώνιο με διαστάσεις α και β ; Πότε ισχύει η ισότητα;

B) Με τη βοήθεια της παραπάνω ανισότητας (ή και με άλλο τρόπο), να αποδείξετε ότι:

- i) Από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο P το τετράγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.
 ii) Από όλα τα ορθογώνια με σταθερό εμβαδό E το τετράγωνο έχει την ελάχιστη περίμετρο.

4. Δίνεται η εξίσωση $3(x+1)-ax=4$, $a \in \mathbb{R}$.
- Να λύσετε την εξίσωση για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.
 - Για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει λύση μεγαλύτερη του 1;
5. Δίνεται η εξίσωση $\lambda^2(x-1)+3\lambda=x+2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda-1)(\lambda+1)x=(\lambda-1)(\lambda-2).$$
 - Να λύσετε την εξίσωση για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό $\frac{1}{4}$.
6. Από τη φυσική γνωρίζουμε ότι στην κατακόρυφη βολή ενός σώματος με αρχική ταχύτητα v_0 , το ύψος h του σώματος συναρτήσει του χρόνου t της κίνησης του δίνεται από τον τύπο $h(t)=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$, όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας.
- A) Αν $v_0=60\text{m/sec}$ και $g=10\text{m/sec}^2$:
- Να βρείτε πότε το σώμα θα φθάσει σε ύψος $h=180$ μέτρα.
 - Να βρείτε πότε το σώμα θα βρεθεί σε ύψος $h=100$ μέτρα.
 Ποια είναι η ερμηνεία των προηγούμενων απαντήσεων;
- B) Στη γενική περίπτωση όπου $h(t)=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$, με τα v_0 και g σταθερά, να βρείτε τη συνθήκη που πρέπει να ισχύει, ώστε το σώμα να φθάσει σε δεδομένο ύψος h_0 .
7. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις
- $$f(x)=|x|-2 \quad \text{και} \quad g(x)=2-|x|$$
- και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .
8. A) Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων
- $$f(x)=|x-1| \quad \text{και} \quad g(x)=|x-3|$$
- και με τη βοήθεια αυτών να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης
- $$|x-1| < |x-3|.$$
- B) Στη συνέχεια να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα προηγούμενα συμπεράσματα.

9. Α) Σε ένα καρτεσιανό επίπεδο να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = |x|, \quad g(x) = |x| - 3 \quad \text{και} \quad h(x) = ||x| - 3|.$$

- Β) Με τη βοήθεια των παραπάνω γραφικών παραστάσεων να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων του συστήματος

$$\begin{cases} y = ||x| - 3| \\ y = a \end{cases}$$

για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

10. Σε ένα επίπεδο σχεδιάζουμε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy .

- i) Να δείξετε ότι η εξίσωση $y^2 - x^2 = 0$ παριστάνει τις διχοτόμους δ_1 και δ_2 των γωνιών των αξόνων τις οποίες και να σχεδιάσετε.

- ii) Ποια είναι η απόσταση ενός σημείου $M(x, y)$ του επιπέδου από το σημείο $K(a, 0)$ του άξονα $x'x$; Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$(x - a)^2 + y^2 = 1, \quad a \in \mathbb{R}$$

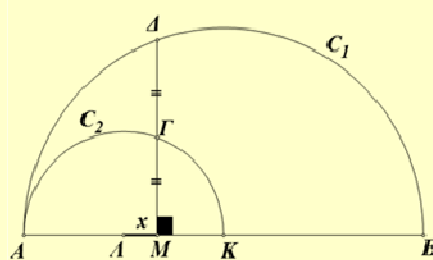
παριστάνει στο επίπεδο κύκλο C με κέντρο K και ακτίνα 1. Σχεδιάστε τον κύκλο για μια τιμή του a .

- iii) Με τη βοήθεια των παραπάνω γραφικών παραστάσεων να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων του συστήματος

$$\begin{cases} y^2 - x^2 = 0 \\ (x - a)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

11. Στο διπλανό σχήμα τα C_1 και C_2 είναι ημικύκλια με κέντρα K και A και ακτίνες $R_1 = 6\text{cm}$ και $R_2 = 3\text{cm}$ αντιστοίχως, ενώ το M είναι ένα σημείο της διακέντρου KA και η MA είναι κάθετη στην KA . Να βρείτε το μήκος x του τμήματος AM , αν γνωρίζουμε ότι το σημείο Γ είναι μέσο του MA .



12. Θεωρούμε έναν άξονα $x'x$ και παίρνουμε πάνω σ' αυτόν τα σταθερά σημεία $A(-1)$, $B(1)$ και ένα μεταβλητό σημείο $M(x)$. Θέτουμε

$$f(x) = (MA) + (MB) \quad \text{και} \quad g(x) = |(MA) - (MB)|.$$

i) Να αποδείξετε ότι :

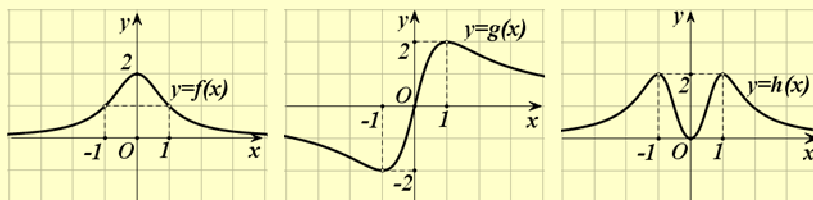
$$f(x) = |x+1| + |x-1| \quad \text{και} \quad g(x) = ||x+1| - |x-1||.$$

ii) Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις f και g .

iii) Να βρείτε με τη βοήθεια των παραπάνω γραφικών παραστάσεων την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή (εφόσον υπάρχουν) των συναρτήσεων f και g , καθώς και τις θέσεις στις οποίες παρουσιάζονται.

13. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}, \quad g(x) = \frac{4x}{x^2 + 1} \quad \& \quad h(x) = \frac{4x^2}{x^4 + 1}$$



i) Από τις γραφικές παραστάσεις να βρείτε τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων f , g , h , καθώς και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών.

ii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα προηγούμενα συμπεράσματα.

14. Α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$.

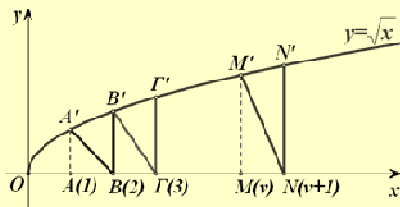
i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

ii) Να αποδείξετε ότι αν το σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2$.

iii) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε πρώτα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g και στη συνέχεια, με τη βοήθεια του προηγούμενου ερωτήματος, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Ποιο είναι το είδος της μονοτονίας και ποιο το ακρότατο της συνάρτησης f ;

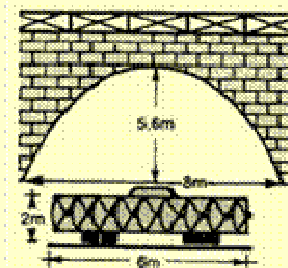
Β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \sqrt{|x|}$ είναι άρτια και στη συνέχεια να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

Γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = \sqrt{x}$.

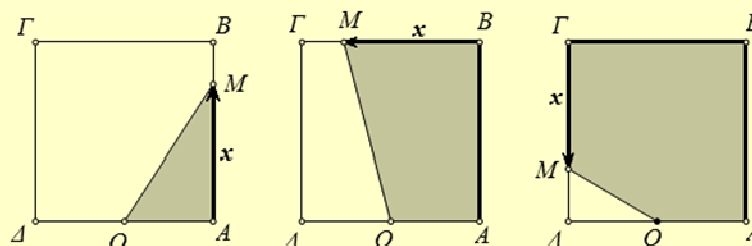


Αν $A', B', \Gamma', \dots, M', N'$ είναι τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με τετμημένες $1, 2, 3, \dots, n, n+1$ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\triangle B'A'B', \triangle \Gamma'B'\Gamma', \dots, \triangle N'M'N'$ είναι ισοσκελή.

15. Μία γέφυρα έχει ένα παραβολικό τόξο του οποίου το πλάτος είναι $8m$ και ύψος είναι $5,6m$. Κάτω από τη γέφυρα θέλει να περάσει γεωργικό μηχάνημα του οποίου η καρότσα έχει πλάτος $6m$ και ύψος $2m$. Μπορεί το μηχάνημα να περάσει;



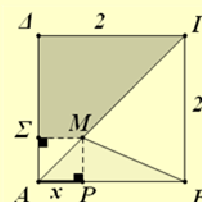
16. Δίνεται ένα τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρά $20cm$ και το μέσον O της AD . Ένα κινητό σημείο M ξεκινά από το A και, διαγράφοντας την πολυγωνική γραμμή $AB\Gamma\Delta$, καταλήγει στο Δ .



Αν με x συμβολίσουμε το μήκος της διαδρομής που έκανε το κινητό M και με $f(x)$ το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου,

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης f .
- Να παραστήσετε γραφικά την f .
- Να βρείτε την τιμή του x για την οποία ισχύει $f(x) = 120 cm^2$.

17. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο πλευράς 2 μ. και το M είναι ένα σημείο της δι-
αγωνίου AG με $(AP) = x$. Συμβολίζουμε με $f(x)$ το εμβαδόν του τριγώνου MAB και με $g(x)$ το εμβαδόν του τραπεζίου $MG\Delta\Sigma$.

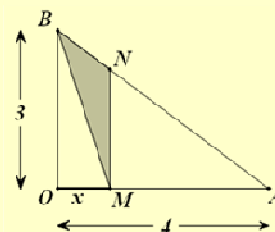


- Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = x, \quad 0 \leq x \leq 2 \quad \text{και} \quad g(x) = -0,5x^2 + 2, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

- ii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες τα δύο εμβαδά είναι ίσα.
- iii) Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις συναρτήσεις f και g και να βρείτε, με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, με προσέγγιση την τιμή του x για την οποία τα δύο εμβαδά είναι ίσα.

18. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο, το M είναι τυχαίο σημείο της OA και $MN \parallel OB$. Αν $(OA)=4$, $(OB)=3$ και $(OM)=x$, και $E(x)$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου BMN ,

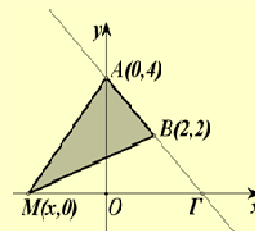


- i) Να αποδείξετε ότι:

$$(MN) = \frac{3(4-x)}{4} \text{ και } E(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x.$$

- ii) Να βρείτε τη θέση του M για την οποία το εμβαδόν $E(x)$ μεγιστοποιείται. Ποια είναι η μέγιστη τιμή του $E(x)$.

19. Σε ένα καρτεσιανό επίπεδο θεωρούμε τα σημεία $A(0,4)$ και $B(2,2)$, καθώς και το σημείο $M(x,0)$ που κινείται κατά μήκος του άξονα $x'x$.



- i) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου G στο οποίο τέμνει η ευθεία AB τον άξονα $x'x$.

- ii) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου MAB συναρτήσει της τετμημένης x του σημείου M και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση αυτή.

20. Σε ένα τμήμα $AB=10\text{km}$ μιας λεωφόρου πέφτει συνεχώς χιόνι και το ύψος του χιονιού αυξάνεται 1cm την ώρα. Όταν αρχίζει η χιονόπτωση ένα εκχιονιστικό μηχάνημα αρχίζει από το άκρο A να καθαρίζει το χιόνι κινούμενο κατά μήκος του δρόμου με ταχύτητα 10km/h . Μόλις φτάσει στο B γυρίζει και καθαρίζει το δρόμο αντιστρόφως από το B προς το A και συνεχίζει με τον ίδιο τρόπο.

- i) Να σχεδιάσετε ένα διάγραμμα για το ύψος του χιονιού στο A , παραβλέποντας το χρόνο στροφής στα A και B .
- ii) Να κάνετε το ίδιο για το ύψος του χιονιού στο μέσο M του AB .

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ – ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

§ 1.1

Α' Ομάδας

1. ii) 1, 2. 1, 3. i) 4.000 ii) 9.999
iii) 3, 4. ii) 4, 5. ii) 1, 7. $7 \cdot 2^n$

Β' Ομάδας

1. i) $\alpha - 1$ ii) $\frac{\alpha + 2}{\alpha + 1}$, 2. i) $(\alpha - 1)^2$ ii) 1,
3. i) $x^2 y^2$ ii) $-\frac{xy}{x - y}$, 4. 1

§ 1.2

Α' Ομάδας

1. i) Πάρτε τη διαφορά ii) Πάρτε τη διαφορά, 2. Άθροισμα τετραγώνων,
3. i) 2, -1 ii) 1, -2,
4. i) 9, 8 και 10, ii) -0,9 και -0,7
iii) $\frac{45}{54}$ και $\frac{46}{53}$ iv) 48,34 και 50,32,
5. i) 10,2 και 16,2 ii) 6,38 και 15,68,
6. Απαλοιφή παρονομαστών, 7. $5 - x < 0$

Β' Ομάδας

1. i) Απαλοιφή παρονομαστών
ii) Απαλοιφή παρονομαστών,
2. Πάρτε τη διαφορά,
3. Εκτέλεση πράξεων,
4. i) πολλαπλασιάστε με το 2
ii) πολλαπλασιάστε με το 2

§ 1.3

Α' Ομάδας

1. i) $\pi - 3$, ii) $4 - \pi$ iii) 1 iv) 0,
2. 1, 3. i) $-2x + 7$ ii) 1,
4. 1, 5. 2 ή 0 ή -2,
6. i) $d(2,37,D) \leq 0,005$,
ii) 2,365 και 2,375

Β' Ομάδας

1. Χρησιμοποιήστε τριγωνική ανισότητα,
3. i) $x = y = 0$ ii) $x \neq 0$ ή $y \neq 0$,
4. i) $\frac{\alpha}{\beta} < 1 < \frac{\beta}{\alpha}$
ii) Αρκεί να δείχθει $1 - \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\beta}{\alpha} - 1$,

5. i) 9,5 και 10,5 ii) 15,2 και 16,8
iii) $3,8\pi$ και $4,2\pi$

§ 1.4

Α' Ομάδας

1. i) 10 ii) 2 iii) $\frac{1}{10}$,
2. i) $4 - \pi$ ii) 20 iii) $|x - 1|$, iv) $\frac{|x|}{2}$, 3. 1,
10. i) $\frac{10 + 2\sqrt{3}}{11}$ ii) $4(\sqrt{7} + \sqrt{5})$
iii) $13 + 2\sqrt{42}$

Β' Ομάδας

2. ii) Χρησιμοποιείστε το ερώτημα (i),
3. i) $\frac{25}{6}$ ii) $\frac{(a+1)^2}{a}$.

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

§ 2.1

Α' Ομάδας

1. i) 5 ii) -1 iii) -7 iv) $\frac{11}{3}$,
2. i) αδύνατη ii) ταυτότητα,
3. i) αν $\lambda \neq 1$, τότε $x = 1$, αν $\lambda = 1$, ταυτότητα
ii) αν $\lambda \neq 2$, τότε $x = \frac{\lambda}{\lambda^2 - 2}$, αν $\lambda = 2$,
τότε αδύνατη
iii) αν $\lambda \neq 0$, και $\lambda \neq 1$, τότε $x = \frac{1}{\lambda}$, αν
 $\lambda = 0$, τότε αδύνατη
iv) αν $\lambda \neq 0$, και $\lambda \neq 1$, τότε $x = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}$,
αν $\lambda = 0$, τότε ταυτότητα, αν $\lambda = 1$,
τότε αδύνατη,
4. i) $x = 2,5$ ii) $x = \frac{15}{8}$ 5. 2.750 και 1.250,
6. i) $t = \frac{v - v_0}{a}$ ii) $R_1 = \frac{R_2 R}{R_2 - R}$,
7. i) 4 και -1 ii) 2 και -1,
8. i) 0 και 1 ii) -1 και 0,
9. i) 2 και 1 ii) 1 και 2,

10. i) 2, 1, -1 ii) 2 και 1,
 11. i) -1 ii) αδύνατη,
 12. i) αδύνατη ii) $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$ και $x \neq -2$ iii) αδύνατη iv) $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 1$ και $x \neq -1$,
 13. $(-1, 0, 1), (1, 2, 3), (-3, -2, -1)$,
 14. i) 4, -1 ii) $3, \frac{5}{3}$ iii) 0, -4
 iv) 3 και $\frac{7}{3}$,
 15. i) -1 και 1 ii) αδύνατη,
 16. i) -5 και $-\frac{9}{5}$ ii) 1 και 3

Β' Ομάδας

2. $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, 3. 50ml,
 4. 3 λεπτά, 5. αν $\alpha \neq 0$ τότε $x = -\frac{\alpha}{2}$,
 αν $\alpha = 0$ τότε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$,
 6. $x = 0$, 7. -2 και 2, 8. 2 και $\frac{3}{2}$

§ 2.2**Α' Ομάδας**

1. i) 5 ii) 3 iii) 1,
 2. i) -5 ii) -3 iii) -1,
 3. i) 8, -8 ii) 3, -3 iii) 2, -2,
 4. i) 0, 2 ii) 0, -1 iii) 0,
 5. 3, 3, 9, 6. i) 3 ii) $-\frac{1}{5}$ iii) 1, 4

§ 2.3**Α' Ομάδας**

1. i) $\frac{3}{2}, 1$ ii) 3 iii) αδύνατη,
 2. i) 1, 3, -1, 3 ii) 0, 2 iii) αδύνατη,
 3. i) $\Delta = 4(\lambda - 1)^2$ ii) $\Delta = 4(\alpha - \beta)^2$,
 4. 1, -1, 5. $\Delta = -4(\alpha - \beta)^2$,
 6. i) $x^2 - 5x + 6 = 0$ ii) $2x^2 - 3x + 1 = 0$
 iii) $x^2 - 10x + 1 = 0$,
 7. i) 5, -3 ii) $\frac{9 + \sqrt{41}}{2}, \frac{9 - \sqrt{41}}{2}$,
 8. i) $\sqrt{5}, \sqrt{3}$ ii) 1, $-\sqrt{2}$,
 9. $-(\alpha + \beta), \beta - \alpha$, 10. 24, 10,

11. i) 3, -3, 4, -4, ii) 5, -5
 iii) 6, -6, 2, -2, 12. 1, -1,

13. $1, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$,

14. i) 2, -3 ii) -1,

15. i) -2, 2 ii) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ iii) αδύνατη

Β' Ομάδας

3. -7, 1, 4. αντικατάσταση του x με $\frac{1}{\rho}$,

5. i) $a, -\frac{1}{a}$ ii) $\beta, \frac{\alpha^2}{\beta}$,

6. i) $\Delta = 4\lambda^2 + 32$ ii) -2, 4, $\lambda = -1$,

7. 3, 4, 5, 8. 1, 9. 12 ώρες, 24 ώρες,

10. $\alpha = 9$, ρίζες είναι οι: 3, -3, 1, -1.

3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ**§ 3.1****Α' Ομάδας**

1. i) $x < -\frac{3}{10}$ ii) αδύνατη iii) $x \in \mathbb{R}$,
 2. i) $1 \leq x < 3$, 3. όχι, 4. 0, 1, 2,
 5. i) $x \in (-3, 3)$ ii) $x \in [-3, 5]$
 iii) $x \in (-3, 2)$,
 6. i) $x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$
 ii) $x \in (-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$
 iii) $x \in (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$, 7. i) $x \geq 3$
 ii) $x \leq \frac{1}{3}$, 8. i) $x \in (-1, 3)$ ii) $x \in \mathbb{R}$,
 9. $x \in [-2, 8]$, 10. $|x + 2| < 5$, 11. $[5, 10]$

Β' Ομάδας

1. i) $x \in \left[1, \frac{7}{4}\right]$ ii) $x \in \left[\frac{4}{3}, 2\right]$,

2. i) $x \in [-4, -2] \cup [2, 4]$
 ii) $x \in [1, 3] \cup [7, 9]$,

3. i) 1 iii) $x \geq 1$.

4. i) 4 iii) $1 \leq x \leq 7$.

§ 3.2**Α' Ομάδας**

1. i) $(x - 1)(x - 2)$ ii) $(2x + 1)(x - 2)$,

2. i) $\frac{x-1}{2x+1}$ ii) $\frac{2(x-3)}{x-7}$ iii) $\frac{2x-3}{x-1}$,

3. i) $x^2 - 2x - 15 > 0$ για $x \in (-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$

ii) $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$

iii) $x^2 - 4x + 3 > 0$ για $x \in \mathbb{R}$,

4. i) $-x^2 + 4x - 3 > 0$ για $x \in (1, 3)$

ii) $-9x^2 + 6x - 1 = -(3x-1)^2$

iii) $-x^2 + 2x - 2 < 0$ για $x \in \mathbb{R}$

5. i) $x \in (-\infty, 0] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$ ii) $x \in [-4, 1]$,

6. i) $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ ii) $x \in \left(-1, \frac{5}{2}\right)$

7. i) $x \in \mathbb{R}, x \neq 2$ ii) $x = 3$,

8. i) αδύνατη ii) $x \in \mathbb{R}$, 9. $x \in (1, 3)$,

10. $x \in (-4, -1) \cup (3, 4)$,

11. $x \in (1, 2) \cup (3, 4)$

Β' Ομάδας

1. i) $(\alpha - \beta)(\alpha + 2\beta), (\alpha + 2\beta)(\alpha - 3\beta)$

ii) $\frac{\alpha - \beta}{\alpha - 3\beta}, \alpha \neq 3\beta$ και $\alpha \neq -2\beta$,

2. $(2x - \alpha)(x + \beta)$,

3. $\frac{x - \beta}{x - 2\alpha}, x \neq \alpha$ και $x \neq 2\alpha$,

4. i) 0, 4 ii) $\lambda < 0$ ή $\lambda > 4$

iii) $0 < \lambda < 4$,

5. $\lambda \in \left(0, \frac{4}{9}\right)$,

6. i) $\Delta = -8\lambda^2 - 24\lambda, \lambda < -3$ ή $\lambda > 0$

ii) $\lambda < -3$,

7. Το Μ βρίσκεται ανάμεσα στα σημεία που τριχοτομούν την ΑΓ,

8. ii) $A > 0$ με α, β ομόσημους,
 $A < 0$ με α, β ετερόσημους.

§ 3.3

Α' Ομάδας

1.

| | | | | | |
|--------|-----------|------|---------------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | -1 | $\frac{2}{3}$ | 2 | $+\infty$ |
| $P(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $-$ |

2.

| | | | | | |
|--------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | -2 | 1 | 2 | $+\infty$ |
| $P(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |

3. $x \in (-3, 1) \cup (3, +\infty)$,

4. $x \in [-3, 0] \cup [3, +\infty)$,

5. $x \in (-\infty, -2] \cup \{-1\} \cup [1, +\infty)$,

6. $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (1, 3)$,

7. i) $-1 < x < 2$ ii) $x \in \left[-\frac{1}{2}, 3\right)$,

8. $x \in (-2, -1] \cup (1, 2]$.

Β' Ομάδας

1. i) $1 < x < \frac{7}{2}$ ii) $x \in \left[-2, -\frac{5}{3}\right)$,

2. $x \in (-\infty, -3] \cup (1, 4]$,

3. i) $x \in \left(1, \frac{5}{3}\right) \cup [2, 5]$

ii) $x \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right] \cup [3, +\infty)$,

4. $x \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \cup (0, 1)$,

5. $1.59 < x < 4.41$, 6. $1 < t < 4$.

4ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

§ 4.1

Α' Ομάδας

1. i) $\mathbb{R} - \{1\}$ ii) $\mathbb{R} - \{0, 4\}$ iii) \mathbb{R}

v) $(0, +\infty)$,

2. i) $[1, 2]$

ii) $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

iii) $[1, 3]$ iv) $[0, 1) \cup (1, +\infty)$,

3. $-125, 3, 15$,

4. i) $f(x) = (x+2)^2, x \in \mathbb{N}$

ii) $4, 5, 8, 10, \dots$

§ 4.2

Α' Ομάδας

2. $2 \leq x \leq 5, 1 \leq y \leq 6$,

3. i) $(-1, -3)$ ii) $(1, 3)$ iii) $(3, -1)$

iv) $(1, -3)$,

4. i) $2\sqrt{5}$ ii) 5 iii) 4 iv) 5,
 5. i) $AB = AG$ ii) $(BG)^2 = (AB)^2 + (AG)^2$,
 6. $(AB) = (BG) = (GD) = (DA) = 5$,
 7. i) 2 ii) -1 iii) 4,
 8. i) $(4,0)$, $(0,-4)$ ii) $(2,0)$, $(3,0)$,
 $(0,6)$ iii) $(1,0)$, $(0,1)$ iv) $(0,1)$
 v) $(1,0)$ vi) $(-2,0)$, $(2,0)$.
 9. i) $(0,-1)$, $(-1,0)$, $(1,0)$ ii) $x < -1$ ή
 $x > 1$, 10. i) $(2,-2)$, $(5,4)$ ii) $2 < x < 5$.

§ 4.3

Α' Ομάδας

1. i) 45° ii) 60° iii) 135° iv) 120° ,
 2. i) 1 ii) -1 iii) 0 iv) -2,
 3. i) $y = -x + 2$ ii) $y = x + 1$ iii) $y = 2x - 1$,
 4. i) $y = x$ ii) $y = -x + 3$ iii) $y = 1$
 iv) $x = 1$, 5. -40° C , 6. Αποτελείται
 από την ημιευθεία $y = -x + 2$, $x \leq 0$, το
 ευθ. τμήμα $y = 2$, $x \in [0,1]$ και την ημι-
 ευθεία $y = x + 1$, $x \geq 1$,
 7. i) -1, 1 και -2, 0, 1
 ii) $x \in (-\infty, 1) - \{-1\}$ και $x \in [-2, 0] \cup [1, +\infty)$
 8. i) $x \in [-1, 1]$, $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Β' Ομάδας

1. i) $f(-6) = 1$, $f(-5) = \frac{1}{2}$, $f(-4) = 0$,
 $f(-3) = -\frac{1}{2}$, $f(-2) = -1$, $f(-1) = 0$,
 $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 0$,
 $f(4) = -1$, $f(5) = -2$ ii) $f(x) = 0: -4$
 $, -1, -3$ $f(x) = -1: -2, 4$
 $f(x) = 1: 0 \leq x \leq 2$ iii) $y = 0,5 \cdot x$,
 $x \in [2,5] \cup \{-2\}$ 2. $y = x - 1$, $x \geq 1$,
 3. i) $B(t) = 2000 - 100t$, $0 \leq t \leq 20$,
 $\Delta(t) = 600 + 100t$, $0 \leq t \leq 20$, ii) $t = 7 \text{ min}$
 4. $f(x) = -x + 8$, $0 \leq x \leq 4$,
 5. i) $h_1(t) = -\frac{20}{3}t + 20$, $0 \leq t \leq 3$
 $h_2(t) = -\frac{20}{4}t + 20$, $0 \leq t \leq 4$

- ii) 2,4 h iii) 2,4 h.

§ 4.4

Α' Ομάδας

5. i) $2(x-2)^2$ ii) $2(x-3)^2 - 3$
 iii) $2(x+2)^2$ iv) $2(x+3)^2 - 3$

§ 4.5

Α' Ομάδας

1. $f, \forall(-\infty, 1], f \uparrow [1, +\infty)$, $g \uparrow (-\infty, 0]$,
 $g \downarrow [0, 2]$, $g \uparrow [2, +\infty)$, $h \downarrow (-\infty, -1]$,
 $h \uparrow [-1, 0]$, $h \downarrow [0, 1]$, $h \uparrow [1, +\infty)$.
 2. Το $f(1) = -1$ ολικό ελάχιστο, η g δεν
 έχει ολικά ακρότατα, το $h(-1) = -2$,
 $h(1) = -2$ ολικό ελάχιστο,
 3. i) αρκεί $f(x) \geq f(3)$ ii) αρκεί
 $g(x) \leq g(1)$
 4. i) άρτια ii) άρτια iii) τίποτα iv) πε-
 ριττή v) τίποτα vi) περιττή
 5. i) άρτια ii) τίποτα iii) περιττή
 iv) περιττή v) άρτια vi) άρτια
 6. i) περιττή ii) άρτια iii) τίποτα,
 7. i) άρτια ii) περιττή iii) τίποτα.

5ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

§ 5.1

Α' Ομάδας

1. $y = 2x^2$, 4. α) $x^2 \leq 1$ $-1 \leq x \leq 1$,
 $x^2 > 1 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 1$.

Β' Ομάδας

2. $f \downarrow (-\infty, 0]$, $f \uparrow [0, +\infty)$, $f(0) = 0$,
 ελάχιστο,
 3. i) α) $x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}$
 β) $x^3 > x^2 > x > \sqrt{x}$, 4. $\sqrt{3}$.

§ 5.2

Α' Ομάδας

1. $y = \frac{2}{x}$, 4. $\frac{1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$ ή $x \geq 1$,
 $\frac{1}{x} > 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1$,
 5. $\frac{1}{x} \leq x^2 \Leftrightarrow x < 0$ ή $x \geq 1$

$$\frac{1}{x} > x^2 \Leftrightarrow 0 < x < 1, \quad \text{6. } y = \frac{4}{x}$$

§ 5.3**Α' Ομάδας**

1. i) $y = 2 \cdot (x-1)^2 + 3$

ii) $y = -2 \cdot (x-2)^2 - 1,$

2. α) $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$ ελάχιστο

β) $g\left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{49}{12}$ μέγιστο,

Β' Ομάδας

1. i) 1 ii) -1 iii) -3, 5,

2. i) $\alpha < 0$ ii) $\Delta > 0$ iii) $\alpha = -1, \gamma = -5,$

3. i) $f(x) = -x^2 + 10x$ ii) $f(5) = 25$

4. i) $E = \frac{\sqrt{3}}{2}(x^2 - 6x + 18)$ ii) $MA = MB$

5. 30, 40.

6ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ**§ 6.1****Α' Ομάδας**

1. (3, -1), 2. i) (21, 24) ii) $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{3}\right),$

3. i) (3, -4) ii) (5, 2),

4. i) αδύνατο ii) άπειρες λύσεις

$$\left(\kappa, \frac{\kappa+2}{2}\right), \kappa \in \mathbb{R},$$

5. i) (3, 1) ii) (2, -1),

6. i) μοναδική ii) άπειρες iii) αδύνατο,

7. i) άπειρες λύσεις $\left((\sqrt{3}+1)(\kappa-1), \kappa\right),$

$$\kappa \in \mathbb{R} \text{ ii) αδύνατο.}$$

8. i) (4, 3, -5) ii) αδύνατο

iii) $(10\kappa+2, -16\kappa+2, \kappa)$

Β' Ομάδας

1. i) $\varepsilon_1: y = -\frac{1}{2}x + 2, \varepsilon_2: y = x - 1$ ii) 2, 1,

2. 10 δίκλινα, 16 τρίκλινα.,

3. 1500 παιδιά, 700 ενήλικες.,

$$4. R = \frac{1}{600} \cdot T + \frac{11}{30},$$

5. 40 ml, 60 ml,

6. i) $\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \lambda_2 = -\frac{1}{2}$

ii) δεν υπάρχουν iii) $\alpha \neq \frac{3}{2},$

7. i) αν $\alpha \neq \pm 1$ μοναδικό κοινό σημείο το

$$\left(\frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha + 1}, \frac{-\alpha}{\alpha + 1}\right), \text{ αν } \alpha = 1 \text{ οι ευθείες}$$

ταυτίζονται, αν $\alpha = -1$ οι ευθείες είναι παράλληλες ii) μοναδικό κοινό σημείο για κάθε $\alpha \in \mathbb{R},$

8. i) αν $\lambda \neq \pm 3$ μοναδική λύση, αν $\lambda = 3$

αδύνατο, αν $\lambda = -3$ αδύνατο,

ii) αν $\mu \neq \pm 3$ μοναδική λύση, αν $\mu = 3$

άπειρες λύσεις, αν $\mu = -3$ αδύνατο.

9. 2 cm, 4 cm, 3 cm,

10. $x = \tau - \alpha, y = \tau - \beta, z = \tau - \gamma,$

11. 22,88 lt, 17,68 lt, 11,44 lt.

12. $f(x) = x^2 - 4x + 3, g(x) = -x^2 + 2x + 3,$

$$h(x) = 0,5x^2 - 3x + 4.$$

§ 6.2**Α' Ομάδας**

1. (-1, 2), (2, -1),

2. i) $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$

$$\text{ii) } \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\text{iii) } (-1, -2), (1, 2), (-2, -1), (2, 1).$$

Β' Ομάδας

1. (4, 3), (-4, 3), (0, 5)

2. (1, 0), (3, 0), (2, -1), (4, 3)

3. 12 cm, 10 cm 4. $\kappa < 1.$

7ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ**§ 7.1****Α' Ομάδας**

1. $x = 3, y = 3\sqrt{2}, \hat{\omega} = 45^\circ,$

2. $AB = 1, AG = \sqrt{3},$

3. i) 6 rad ii) 3 rad iii) 2 rad

4. i) $\frac{\pi}{6}$ ii) $\frac{2\pi}{3},$ iii) 7π iv) $-\frac{33\pi}{4},$

5. i) 18° ii) 150° iii) -5460° iv) $\frac{18000^\circ}{\pi}$

Β' Ομάδας

1. i) ≈ 478 , ≈ 733 , ≈ 1062 ii) $\approx 58^\circ$,

2. iii) $2-\sqrt{2}$ v) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$,

3. $12+8\sqrt{3}$, $12\sqrt{3}$, 4. ≈ 573 mm.

§ 7.2**Α' Ομάδας**

1. $\sin x = -\frac{4}{5}$, $\varepsilon\varphi x = -\frac{3}{4}$, $\sigma\varphi x = -\frac{4}{3}$,

2. $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\varepsilon\varphi x = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\sigma\varphi x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

3. $\sigma\varphi x = -\sqrt{3}$, $\eta\mu x = -\frac{1}{2}$, $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

4. $\varepsilon\varphi x = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\eta\mu x = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\sin x = \frac{2}{3}$,

5. $\frac{8\sqrt{5}-20}{5}$, 6. i) όχι, ii) όχι, iii) ναι.

Β' Ομάδας

1. i) $\frac{a^2-1}{2}$ ii) $\frac{2a}{a^2-1}$ iii) $\frac{2}{a^2-1}$

iv) $\frac{\alpha(3-\alpha^2)}{2}$.

§ 7.3**Α' Ομάδας**

1. i) $\eta\mu 1200^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 1200^\circ = -\frac{1}{2}$,

$\varepsilon\varphi 1200^\circ = -\sqrt{3}$, $\sigma\varphi 1200^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

ii) $\eta\mu(-2850^\circ) = \frac{1}{2}$, $\sin(-2850^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\varepsilon\varphi(-2850^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sigma\varphi(-2850^\circ) = \sqrt{3}$,

2. i) $\eta\mu \frac{187\pi}{6} = -\frac{1}{2}$, $\sin \frac{187\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\varepsilon\varphi \frac{187\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sigma\varphi \frac{187\pi}{6} = \sqrt{3}$

ii) $\eta\mu \frac{21\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \frac{21\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\varepsilon\varphi \frac{21\pi}{4} = \sigma\varphi \frac{21\pi}{4} = 1$,

3. $\hat{A} + (\hat{B} + \hat{\Gamma}) = 180^\circ$, $\frac{\hat{A}}{2} + \left(\frac{\hat{B} + \hat{\Gamma}}{2}\right) = 90^\circ$,

4. $\sigma\varphi\alpha$, 6. 1.

Β' Ομάδας

1. 0, 3. 23.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

2. ii)

| | | |
|----|----|----|
| 3 | 5 | 4 |
| 8 | 6 | 10 |
| 5 | 12 | 13 |
| 21 | 20 | 29 |
| 16 | 30 | 34 |
| 15 | 8 | 17 |

4. ii) $2 < \alpha < 3$, 5. iii) $\lambda = 3$,

6. A i) $t = 6$ ii) $t_1 = 2$ $t_2 = 10$,

7. $E = 8m^2$, 8. $x < 2$

9. ii) $\alpha < 0$, αδύνατο, $\alpha = 0$, δύο λύσεις,
 $0 < \alpha < 3$ τέσσερις λύσεις, $\alpha = 3$
τρεις λύσεις, $\alpha > 3$ δύο λύσεις,

10. iii) $\alpha = \pm\sqrt{2}$ δύο λύσεις,
 $0 < \alpha < \sqrt{2}$ ή $-\sqrt{2} < \alpha < 0$ τέσσερις
λύσεις, $\alpha = \pm 1$ τρεις λύσεις,
 $\alpha < -\sqrt{2}$ ή $\alpha > \sqrt{2}$ αδύνατο,

11. $x = 1$

12. iii) f : ελάχιστο 2, g : ελάχιστο 0,
μέγιστο 2, 15. ναι,

16. i) $f(x) = \begin{cases} 5x, & 0 \leq x \leq 20 \\ 10x - 100, & 20 \leq x \leq 40, \\ 5x + 100, & 40 \leq x \leq 60 \end{cases}$

iii) $x = 22$, 17. ii) $x = \sqrt{5} - 1$,

18. ii) $x = 2$, $E = 1,5$,

19. i) 4, 0 ii) $E(x) = \begin{cases} -x + 4, & x < 4 \\ x - 4, & x \geq 4 \end{cases}$ ή

$E(x) = |x - 4|$

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ

| | | | |
|---|-----|----------------------------------|-----|
| Ακτίνα διαστήματος | 40 | Ευθεία εφαπτομένων | 184 |
| Ακτίνο | 185 | « ή » | 10 |
| Ανεξάρτητη μεταβλητή | 98 | Ίσα σύνολα | 15 |
| Ανισώσεις γινόμενο | 92 | Ισοδυναμία | 10 |
| Ανισώσεις δευτέρου βαθμού | 85 | « και » | 11 |
| Ανισώσεις πηλίκου | 92 | Καρτεσιανές συντεταγμένες | 104 |
| Ανίσωση με απόλυτες τιμές | 79 | Κατακόρυφη μετατόπιση συνάρτησης | 120 |
| Ανίσωση πρώτου βαθμού | 77 | Κενό σύνολο | 16 |
| Απόλυτη τιμή | 37 | Κέντρο διαστήματος | 40 |
| Απόσταση αριθμών | 39 | Μέγιστο συνάρτησης | 130 |
| Απόσταση σημείων | 106 | Μέθοδος αντίθετων συντελεστών | 162 |
| Άρτια συνάρτηση | 132 | Μέθοδος αντικατάστασης | 162 |
| Γνησίως αύξουσα συνάρτηση | 128 | Μέθοδος απαγωγής σε άτοπο | 25 |
| Γνησίως μονότονη συνάρτηση | 129 | Μη γραμμικά συστήματα | 174 |
| Γνησίως φθίνουσα συνάρτηση | 129 | Μορφές τριωνύμου | 82 |
| Γραμμικό σύστημα 2×2 | 161 | Νιοστή ρίζα | 45 |
| Γραμμικό σύστημα 3×3 | 169 | Ορθοκανονικό σύστημα | 104 |
| Γραφική επίλυση συστήματος 2×2 | 163 | Οριζόντια μετατόπιση συνάρτησης | 123 |
| Γραφική παράσταση συνάρτησης | 107 | Ορίζουσα 2×2 | 166 |
| Γραφική παράσταση της $f(x)=ax+\beta$ | 111 | Παραμετρική εξίσωση | 56 |
| Γωνίες αντίθετες | 195 | Παράμετρος | 56 |
| Γωνίες με άθροισμα 180° | 196 | Παράσταση συνόλου με αναγραφή | 14 |
| Γωνίες με άθροισμα 90° | 198 | Παράσταση συνόλου με περιγραφή | 15 |
| Γωνίες που διαφέρουν 180° | 197 | Πεδίο ορισμού συνάρτησης | 98 |
| Διάγραμμα Venn | 16 | Περιττή συνάρτηση | 133 |
| Διακρίνουσα | 65 | Πραγματική συνάρτηση | 100 |
| Διάστημα | 33 | Πραγματικοί αριθμοί | 19 |
| Διάταξη πραγματικών αριθμών | 30 | Πρόσημο γινομένου | 91 |
| Διερεύνηση εξίσωσης | 56 | Πρόσημο τιμών τριωνύμου | 84 |
| Διερεύνηση συστήματος 2×2 | 165 | Σύζευξη | 11 |
| Δύναμη αριθμού | 22 | Συμπλήρωμα συνόλου | 17 |
| Δύναμη με ρητό εκθέτη | 48 | Συμπλήρωση τετραγώνου | 64 |
| Ελάχιστο συνάρτησης | 130 | Συνάρτηση | 98 |
| Ένωση συνόλων | 17 | Συνάρτηση $f(x)=-1/x$ | 148 |
| Εξαρτημένη μεταβλητή | 98 | Συνάρτηση $f(x)=-x^2$ | 141 |
| Εξίσωση $ax+\beta y=\gamma$ | 159 | Συνάρτηση $f(x)=1/x$ | 146 |
| Εξίσωση δευτέρου βαθμού | 64 | Συνάρτηση $f(x)= x $ | 115 |
| Εξίσωση πρώτου βαθμού | 55 | Συνάρτηση $f(x)=x^2$ | 140 |
| Ευθεία Απόδειξη | 24 | Συνάρτηση $f(x)=a/x$ | 148 |

| | | | |
|--------------------------------------|-----|---------------------------------------|-----|
| Συνάρτηση $f(x)=ax^2$ | 141 | Τετμημένη σημείου | 104 |
| Συνάρτηση $f(x)=ax^2+\beta x+\gamma$ | 151 | Τετραγωνική ρίζα | 45 |
| Συνάρτηση $f(x)=ax$ | 113 | Τομή συνόλων | 17 |
| Συνεπαγωγή | 9 | Τριγωνομετρικές ταυτότητες | 190 |
| Σύνολο | 13 | Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας | 179 |
| Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας | 111 | Τριγωνομετρικός κύκλος | 183 |
| Σχετικές θέσεις δυο ευθειών | 113 | Τύποι του Vietta | 66 |
| Ταυτότητες | 23 | Υποσύνολο συνόλου | 15 |
| Τεταγμένη σημείου | 104 | | |