

ΘΕΜΑΤΑ**1ο**

A. Αποδείξτε ότι μια ευθεία και ένας κύκλος έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία. (Να γίνει και σχήμα) (M10)

B. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις (M10)

α) Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και δύο γωνίες ίσες μία προς μία, τότε θα είναι πάντα ίσα.

β) Το ισόπλευρο τρίγωνο δεν έχει κέντρο συμμετρίας.

γ) Η κοινή χορδή δύο τεμνόμενων κύκλων είναι πάντα μεσοκάθετος της διακέντρου του.

δ) Υπάρχει τρίγωνο με μήκη πλευρών 3, 4, 5 (cm)

ε) Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μικρότερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.

Γ. Πότε ένα σχήμα (Σ) θα λέμε ότι έχει άξονα συμμετρίας μια ευθεία (ε); (Να γίνει και σχήμα) (M5)

2ο

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ABC (A ορθή) και τις διχοτόμους BD, CE που τέμνονται στο σημείο I, ενώ θεωρούμε γνωστό ότι η AI είναι η τρίτη διχοτόμος. Φέρνουμε $DF \perp BC$, $EG \perp BC$.

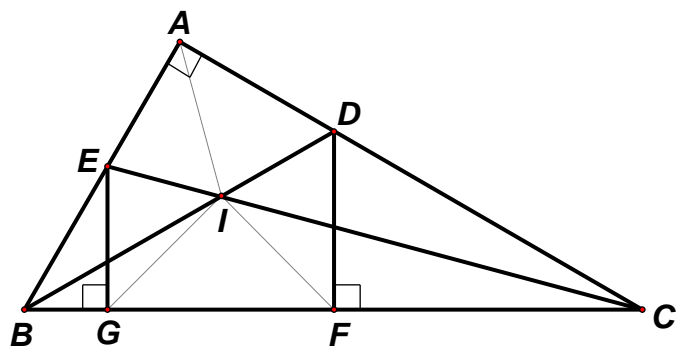
α) Συμπληρώστε σωστά τις ισότητες $DF = \dots$, $EG = \dots$ με βάση γνωστή πρόταση την οποία και θα αναφέρετε (χωρίς σύγκριση τριγώνων) (M6)

β) Με κατάλληλη σύγκριση τριγώνων, να αποδείξετε ότι $\widehat{ADI} = \widehat{FDI}$ και $\widehat{AEI} = \widehat{GEI}$ (M7)

γ) Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα ADI, FDI είναι ίσα όπως και τα AEI, GEI (M7)

δ) Αποδείξτε ότι η FI είναι διχοτόμος της γωνίας DFG και ότι $AI = FI$. Τι προκύπτει ανάλογα; (M10)

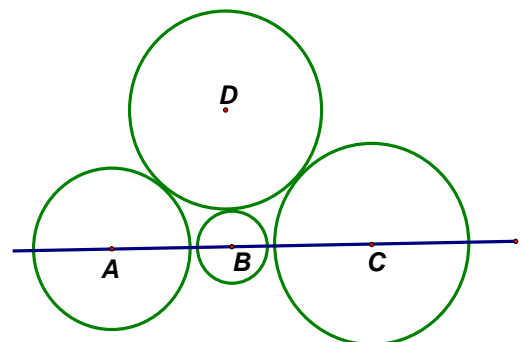
ε) Αποδείξτε ότι $AF \perp ID$. Τι προκύπτει ανάλογα; Τι είναι το σημείο I για το τρίγωνο AGF; (M10)

**3ο**

Θεωρούμε τους κύκλους (A, ρ_1) (B, ρ_2) (C, ρ_3) ανά δύο εξωτερικοί ο ένας του άλλου και με τα κέντρα τους στην ίδια ευθεία. Ένας τέταρτος κύκλος (D, R) εφάπτεται εξωτερικά σε καθένα των τριών προηγούμενων κύκλων.

Τι σχέση έχει η AC με το άθροισμα $\rho_1 + 2\rho_2 + \rho_3$; (M3)

Εφαρμόστε κατάλληλα την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ADC (M4) και με τη βοήθεια αυτής, αποδείξτε ότι $R > \rho_2$. (M8)

**4ο**

Από σταθερό εξωτερικό σημείο Σ σταθερού κύκλου κέντρου O, φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΣΑ, ΣΒ. Μια τρίτη εφαπτομένη σε τυχαίο σημείο E του κυρτογώνιου τόξου AB τέμνει τις προηγούμενες στα σημεία X, Y. Αποδείξτε ότι η περίμετρος του μεταβλητού τριγώνου ΣXY είναι σταθερή και ίση με $2 \cdot \Sigma A$ (M20)

