



Ημερομηνία : Τρίτη 24 Μαΐου 2011

Εξεταζόμενο Μάθημα : **Μαθηματικά Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης****ΘΕΜΑΤΑ****1<sup>ο</sup> Θέμα****A.** Αποδείξτε ότι η εφαπτομένη του κύκλου  $x^2 + y^2 = \rho^2$  στο σημείο του  $A(x_1, y_1)$  έχει εξίσωση  $x_1x + y_1y = \rho^2$  (M10)**B.** Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις – σχέσεις : (M 5 x 2)**α)** Η εξίσωση  $(\lambda^2 - 1)x + (\lambda + 1)y = 8$  παριστάνει ευθεία για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .**β)** Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  με  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \neq 0$  ισχύει  $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})\vec{\alpha} = \vec{\alpha}^2 \vec{\beta}$ , τότε τα  $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$ .**γ)** Το διάνυσμα  $\vec{\delta} = (-6, -4)$  είναι παράλληλο προς την ευθεία  $(\epsilon) : 2x - 3y + 9 = 0$ **δ)** Η ευθεία με εξίσωση  $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$  σχηματίζει γωνία  $45^\circ$  με τον άξονα  $x'x$ .**ε)** Όμοιες λέγονται οι ελλείψεις που έχουν τις ίδιες εστίες.**Γ.** Να περιγράψετε την ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης. Να γίνει σχήμα. (M5)**2ο Θέμα**Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a} = (3, 0)$ ,  $\vec{\beta} = (-2, -2)$ **A)** Βρείτε την γωνία  $(\vec{a}, \vec{\beta})$  (M8)**B)** Βρείτε το διάνυσμα  $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{a}$  (M9)**Γ)** Βρείτε όλα τα διανύσματα  $\vec{\gamma}$  με  $\vec{\gamma} \perp \vec{\beta}$  και  $|\vec{\gamma}| = 2\sqrt{2}$  (M8)

### 3ο Θέμα

Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  στο οποίο η εξίσωση της ευθείας του ύψους από την κορυφή  $A$  είναι  $x = 2$ . Επίσης γνωρίζουμε ότι η εξίσωση της ευθείας  $AB$  είναι  $y = x + 2$ , ενώ το σημείο  $\Gamma$  είναι το  $\Gamma(6, -2)$

- A)** Βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών  $A$  και  $B$  του τριγώνου καθώς και την εξίσωση της πλευράς  $B\Gamma$ . (M7)
- B)** Υπολογίστε την απόσταση του σημείου  $\Gamma$  από την ευθεία  $AB$ . (M6)
- Γ)** Βρείτε την εξίσωση της διαμέσου  $BE$ . (M7)
- Δ)** Υπολογίστε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  (M5)

### 4ο Θέμα

Δίνονται οι κύκλοι  $C_1: x^2 + y^2 + 4x - 32 = 0$   $C_2: (x - 2)^2 + y^2 = 4$

- A)** Βρείτε το κέντρο και την ακτίνα των  $C_1, C_2$  (M5)
- B)** Αποδείξτε ότι ο  $C_2$  εφάπτεται στον  $C_1$  (M5)
- Γ)** Αποδείξτε ότι τα κέντρα των κύκλων που εφάπτονται εξωτερικά του  $C_2$  και εσωτερικά του  $C_1$  είναι σημεία έλλειψης, με εστίες τα κέντρα των κύκλων  $C_1, C_2$ . Να γράψετε την εξίσωση της έλλειψης και να βρείτε την εκκεντρότητα. (M8)
- Δ)** Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο του 1<sup>ου</sup> τεταρτημορίου στο οποίο τέμνει την έλλειψη η ευθεία  $3x - 2y = 0$ . (M7)

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

ΓΚΙΚΑΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

ΠΑΠΑΛΟΥ ΑΓΛΑΪΑ

ΣΙΑΦΑΚΑΣ ΘΩΜΑΣ

ΣΚΟΤΙΔΑΣ ΣΩΤΗΡΙΟΣ

### 3<sup>ο</sup> Θέμα

Θεωρούμε την εξίσωση  $x(x - |\vec{a}|) + y(y + 2|\vec{a}|) = 5$  (I) όπου  $\vec{a} \neq \vec{0}$  τυχαίο διάνυσμα.

- A) Αποδείξτε ότι η (I) παριστάνει άπειρους κύκλους των οποίων να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα  
B) Αποδείξτε ότι οι παραπάνω κύκλοι διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, των οποίων να βρείτε τις συντεταγμένες.  
Γ) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκουν τα κέντρα των παραπάνω κύκλων.  
Δ)

### 4<sup>ο</sup> Θέμα

Δίνεται η έλλειψη  $\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{2k^2} = 1$

- A) Να βρείτε τις εστίες  $E'$  και  $E$ , τις κορυφές  $A', A, B', B$ , τις ασύμπτωτες της έλλειψης και να κάνετε ένα πρόχειρο σχήμα.  
B) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\epsilon$ ) της έλλειψης που είναι παράλληλη προς την ευθεία ( $\eta$ ):  $y = -\sqrt{2} \cdot x$   
Γ) Ονομάζουμε  $M$  το σημείο του 1<sup>ου</sup> τεταρτημορίου το οποίο είναι το σημείο επαφής της παραπάνω εφαπτομένης ( $\epsilon$ ) της έλλειψης. Φέρνουμε κάθετη ευθεία ( $\zeta$ ) στην εφαπτομένη ( $\epsilon$ ) στο  $M$  και στη συνέχεια τμήμα  $E\Sigma$  κάθετο στην ( $\zeta$ ), όπου το  $\Sigma$  ανήκει στην ( $\zeta$ ). Υπολογίστε το μήκος ( $O\Sigma$ ).