Μετρικές Σχέσεις στο Τρίγωνο - Θέματα Ολυμπιάδων

1. Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ η ευθεία που συνδέει το βαρύκεντρο με το περίκεντρο είναι κάθετη στη διάμεσο ΓΔ, αποδείξτε ότι $ΒΓ^2 + ΓΑ^2 = 2ΑΒ^2$.

2. Έστω ABC ένα μη ισοσκελές τρίγωνο. Οι διάμεσοι του τριγώνου τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου στα σημεία L , M , N ώστε το L να βρίσκεται στην διάμεσο που αντιστοιχεί στην BC. Αν γνωρίζουμε ότι LM = LN , αποδείξτε ότι $b^2 + c^2 = 2a^2$.

(Ολυμπιάδα Ιράν, 1996, Τελικός)

3. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ABC με υποτείνουσα την BC , φέρνουμε το ύψος AH. Αν ρ_1 , ρ_2 , ρ οι ακτίνες των εγγεγραμμένων κύκλων στα τρίγωνα ABH , ACH , ABC αντίστοιχα, αποδείξτε ότι $\rho_1+\rho_2+\rho = AH$.

(Ολυμπιάδες Χιλής 1995 , Τουρκίας 1997)

4. Η πλευρά AE ενός κυρτού πενταγώνου ABCDE εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας 1 , είναι διάμετρος αυτού του κύκλου. Γνωρίζουμε ότι ab = cd = 1/4, όπου AB= a , BC = b , CD = c , DE = d . Υπολογίστε το άθροισμα AC + CE συναρτήσει των a , b , c , d .

(Προετοιμασία Ολυμπιακής Ομάδας Τουρκίας για 38η Δ.Μ.Ο. 1997)

5. Αν AH , BK , CL ύψη στο τρίγωνο ABC αποδείξτε ότι AK•BL•CH = AL•BH•CK = HK•KL•LH

(Μαθηματικός Διαγωνισμός , Σκόπια 1999)

6. Έστω ABC ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 1 και D τυχαίο σημείο στην πλευρά BC, ενώ ρ_1 , ρ_2 είναι οι ακτίνες των εγγεγραμμένων κύκλων στα τρίγωνα ABD , ADC αντίστοιχα. Βρείτε το $\rho_1 \bullet \rho_2$ συναρτήσει του BD = **p** και στη συνέχεια βρείτε την μέγιστη τιμή του γινομένου $\rho_1 \bullet \rho_2$.

(8η Ολυμπιάδα Ν. Κορέας 1998)

7. Τετράπλευρο ABCD είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 1, ώστε η διαγώνιος AC να είναι διάμετρος του κύκλου, ενώ η άλλη διαγώνιος BD είναι ίση με την πλευρά AB. Αν οι διαγώνιες τέμνονται στο P και γνωρίζουμε ότι PC = 2/5 , υπολογίστε το μήκος της CD .

(Μαθηματικός Διαγωνισμός «Baltic Way» , Vilnius Lithuania 1992)

8. Τετράπλευρο ABCD είναι περιγράψιμο σε κύκλο και με $\hat{A}=\hat{B}=120^0$, $\hat{C}=90^0$, BD = 1 . Υπολογίστε την AD.

(Ολυμπιάδα Ιρλανδίας , 1997)

9. Σε παραλληλόγραμμο ABCD με $\hat{A}<90^0$, ο κύκλος διαμέτρου AC τέμνει τις ευθείες CB , CD στα σημεία E , F αντίστοιχα, ενώ η εφαπτομένη του κύκλου αυτού στο A, τέμνει την ευθεία BD στο P. Αποδείξτε ότι τα σημεία F , E , P είναι συνευθειακά.

(Προετοιμασία Ολυμπιακής Ομάδας Τουρκίας για 38η Δ.Μ.Ο. 1997)