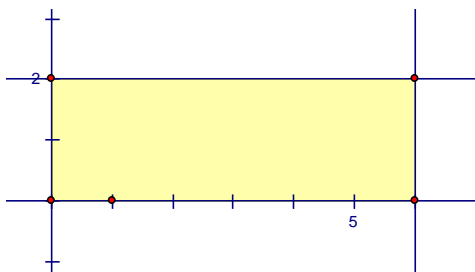


A. Κατασκευασμένοι Ρητοι λογοι

Η διαδικασία κατασκευής είναι γνωστή εκ των προτερών, εμείς καθορίζουμε τα μήκη...οπότε γνωρίζουμε και τη σχέση μεγέθους.

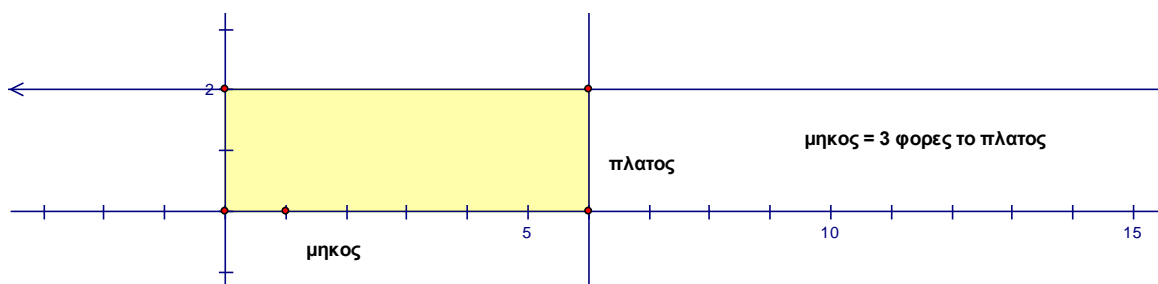
A1.



Το ορθογώνιο έχει μήκος 6 μονάδες και πλάτος 2 μονάδες

Το μήκος είναι τριπλάσιο από το πλάτος

A2



Η ...σχέση τους είναι 3 προς 1...μήκος προς πλάτος

Αν διαιρέσουμε τον αριθμό που εκφράζει το μήκος με τον αριθμό που εκφράζει το πλάτος θα βρούμε 3.

Μαθηματική εκφραση: ο **λογος** του μήκους προς το πλάτος είναι 3

Συμβολα: $\frac{\text{μήκος}}{\text{πλάτος}} = 3$. Ο αριθμός 3 εκφράζει τη σχέση των μεγεθών, τριπλάσιο, το 3 είναι

«καθαρός» αριθμός, χωρίς μονάδες.

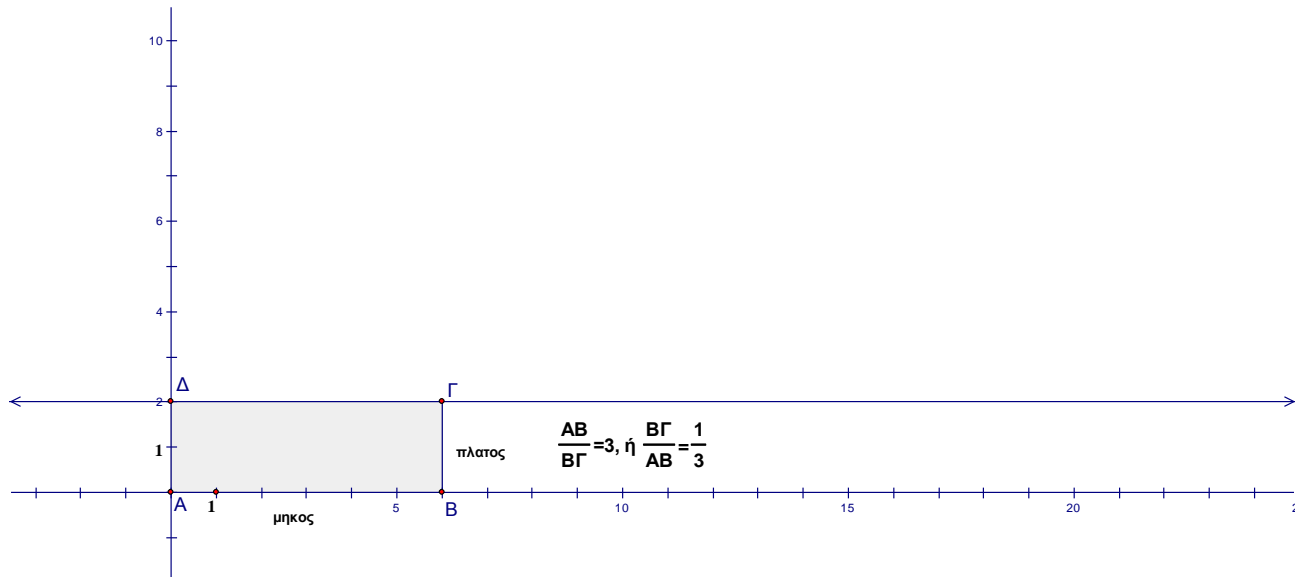
*Φυσικά, μπορούμε να αντιστρέψουμε τις εκφράσεις

Μαθηματική εκφραση: ο **λογος** του πλάτους προς το μήκος είναι 1 προς 3

Συμβολα: $\frac{\text{πλάτος}}{\text{μήκος}} = \frac{1}{3}$

Μεταβολές εμβαδών-Λόγοι ρητοί και άρρητοι

A3



Τι άλλαξε;

Μονο τα συμβολα

*Μπορούμε φυσικά να γράψουμε $\frac{B\Gamma}{AB} = \frac{1}{3}$

- οι οροι του κλασματος ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΡΙΘΜΟΙ, είναι ευθυγραμμο τμηματα
- οι αρχαιοι, δεν ειχαν τους σημερινους αριθμους, οι σκεψεις γινotan με τη βοηθεια ευθυγραμμων τμηματων, για τον Ευκλειδη το γινομενο $6 \cdot 2 = 12$ είναι το εμβαδον ορθογωνιου με την μια διασταση 2 μοναδες και την άλλη 6 μοναδες
- φυσικα δεν υπηρχαν και οι σημερινες μοναδες μετρησης..., αλλα οι σκεψεις είναι ανεξαρτητες των μοναδων

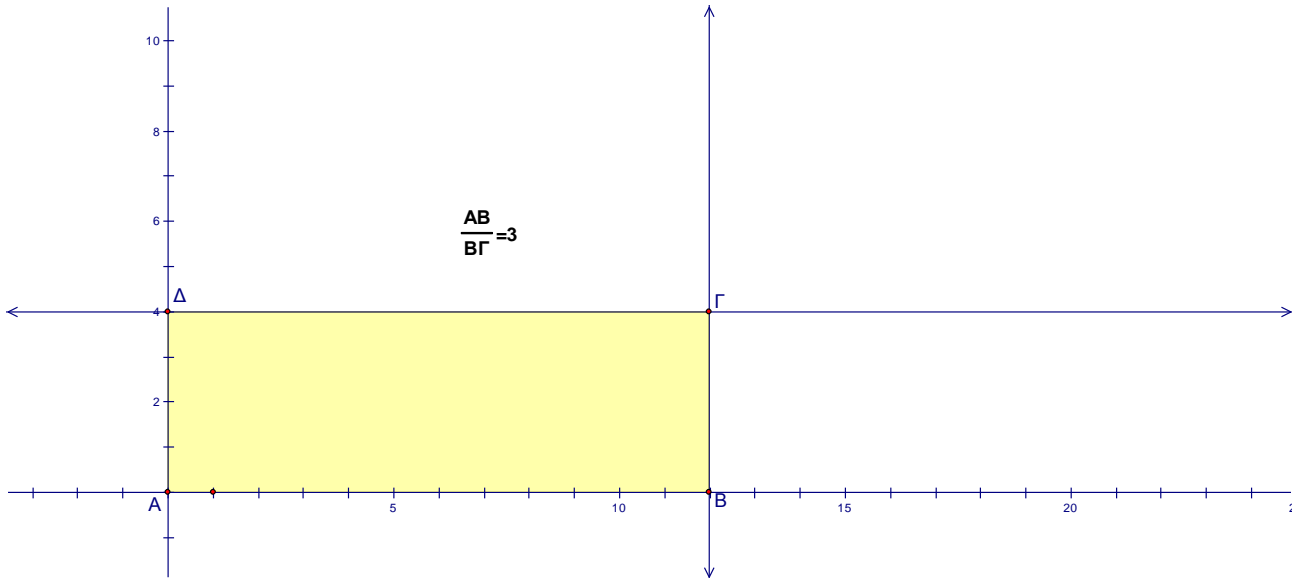
A4



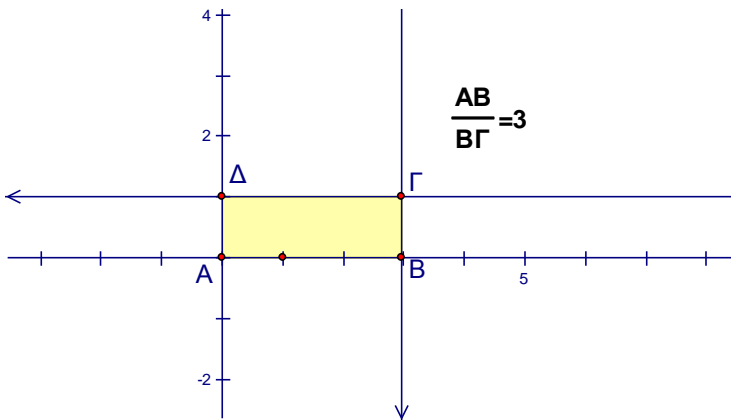
Το ευθυγραμμο τμημα ΚΛ εχει μήκος 3 μοναδες

Μεταβολές εμβαδών-Λόγοι ρητοί και άρρητοι

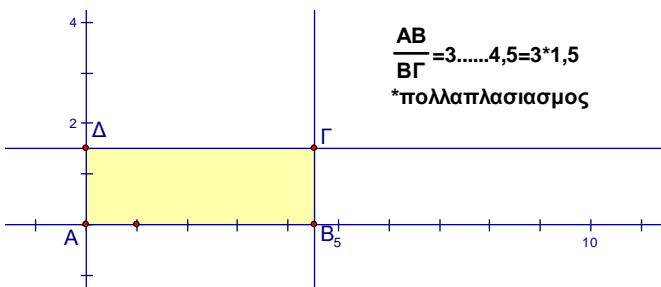
A5



A6

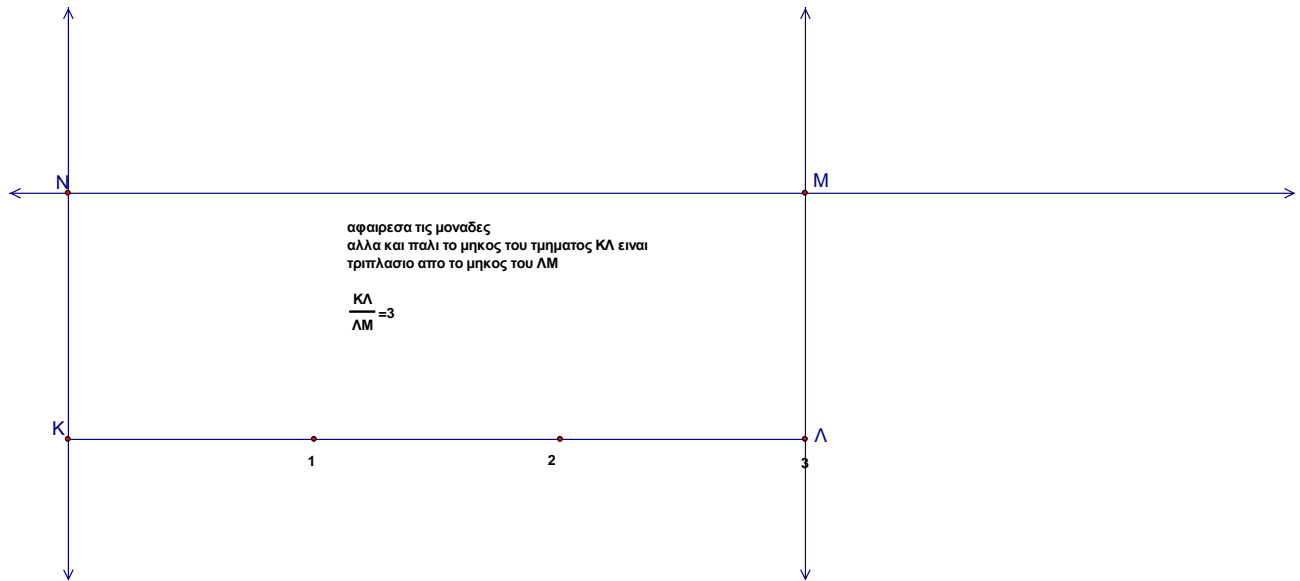


A7



Μεταβολές εμβαδών-Λόγοι ρητοί και άρρητοι

A8



$$\frac{ΚΛ}{ΛΜ} = 3 = \frac{3}{1}$$

- ❖ αν παρουμε για μοναδα μετρησης το μηκος του τμηματος ΛΜ, τοτε το ΚΛ είναι τριπλασιο
- ❖ μπορουμε να μετρησουμε το ΚΛ με το ΛΜ

A9

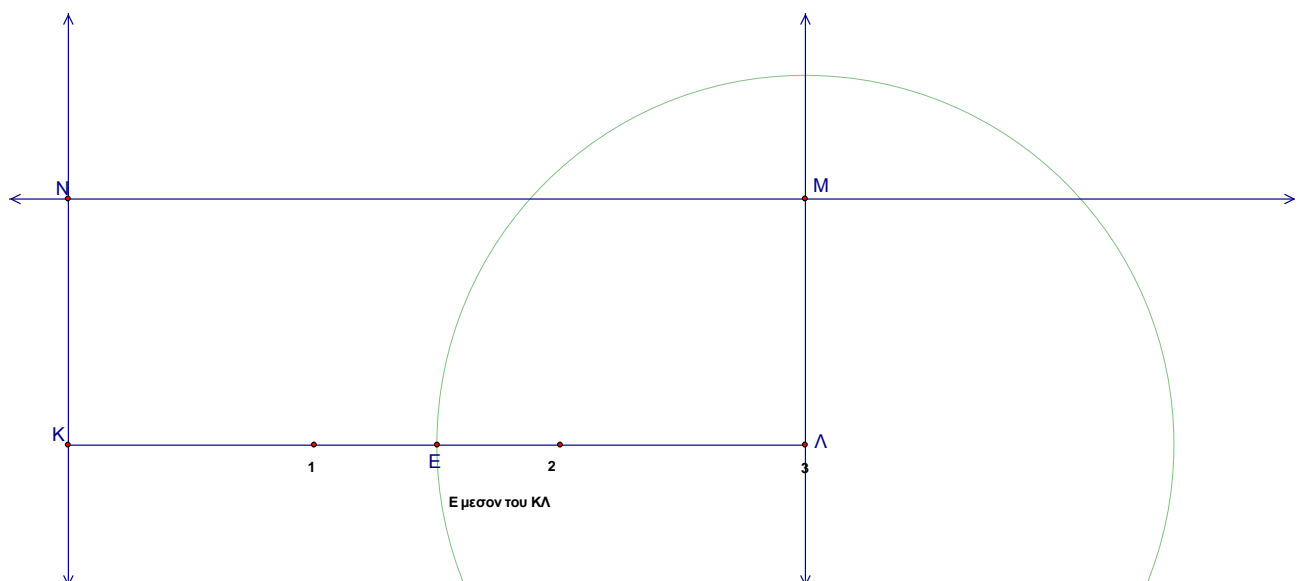
$$\frac{ΛΜ}{ΚΛ} = \frac{1}{3}$$

Μπορουμε να μετρησουμε το ΛΜ με το ΚΛ;

Δοκιμαζουμε μηπως με το μισο ΚΛ, ... το μισο ΚΛ είναι μεγαλυτερο απο το ΛΜ

Δοκιμαζουμε με το 1/3 ... ακριβως! Οι μετρησεις με το ανοιγμα του διαβητη

***τα εργαλεια των αρχαιων είναι διαβητης και κανονας[χαρακας χωρις μοναδες]



Μεταβολές εμβαδών-Λόγοι ρητοί και άρρητοι

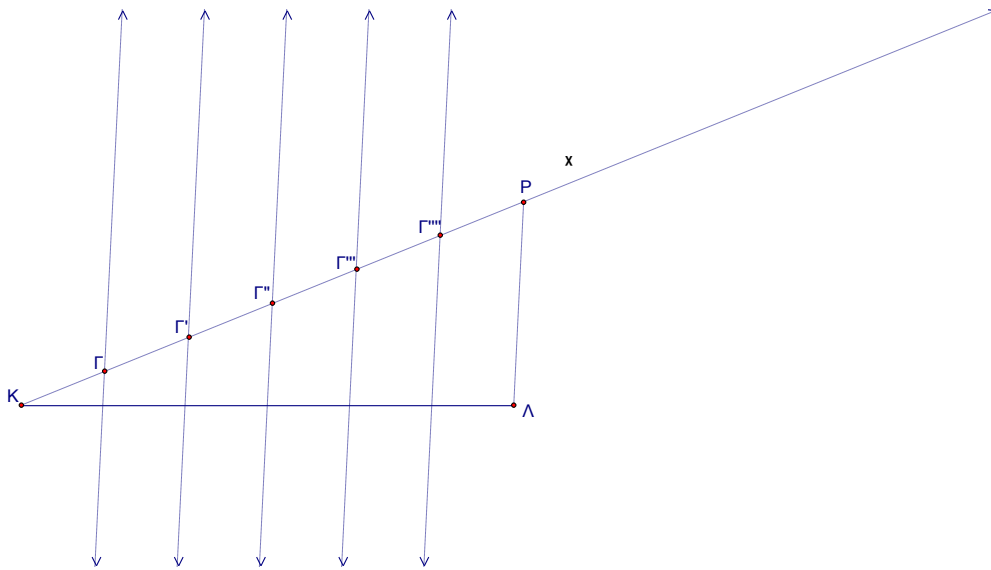
A10

Μπορεί ένα τμήμα ...ΛΜ...να είναι μικρότερο από την επιλεγμένη μονάδα...ΚΛ.

Διερευνούμε μήπως με κάποιο κλάσμα, με κάποια υποδιαίρεση της μονάδας μπορούμε να κάνουμε τη μέτρηση [στην εποχή μας υποδιαιρούμε σε 10 μικρότερες...δεκάτα, αυτές σε 10 μικρότερες...εκατοστά κλπ, δεκαδικό σύστημα]

Η μέθοδος διαιρέσεως τμήματος (π.χ. ΚΛ) σε (π.χ. 6) μικρότερα, όσα θέλουμε, ίσα μέρη, χωρίς μέτρηση

[θεώρημα του Θαλή] φαίνεται στο σχέδιο:



Παίρνουμε στη βοηθητική ευθεία Κχ π.χ. 6 ίσα τμήματα, **εμείς** τα κατασκευάζουμε να είναι ίσα με το διαβήτη, ...ενώνουμε το τελευταίο σημείο Ρ με το Λ και φέρνουμε παράλληλες προς το τμήμα ΛΡ.

Με σκεψεις[Θαλής] αποδεικνύουμε ότι και το τμήμα ΚΛ χωρίστηκε σε 6 ίσα τμήματα

Δεν είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε το μήκος του ΚΛ

**Επίσης δεν γνωρίζουμε ποσο μήκος έχει καθένα από τα 6 ίσα τμήματα στα οποία το χωρίσαμε
Αλλά γνωρίζουμε ότι είναι ίσα μεταξύ τους**

Μεταβολές εμβαδών-Λόγοι ρητοί και άρρητοι

A11

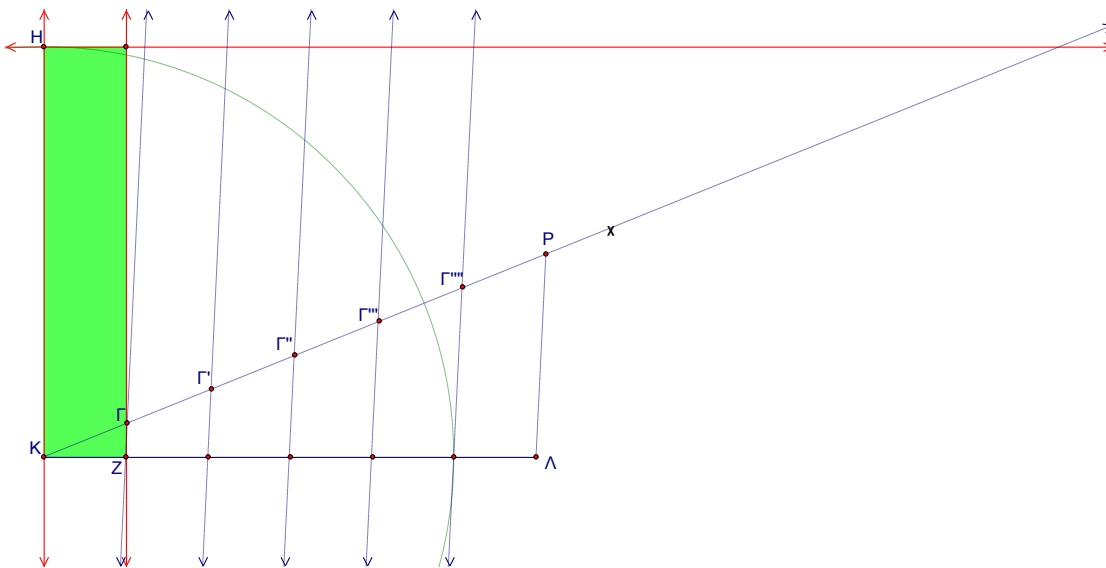
Το τμήμα KZ είναι το 1/6 του ΚΛ, $KZ = \frac{1}{6}ΚΛ$

Το τμήμα ΖΛ είναι τα 5/6 του ΚΛ, $ZΛ = \frac{5}{6}ΚΛ$

Φέρνουμε κάθετη επί την ΚΛ στο Κ και παίρνουμε, με τη βοήθεια κυκλίου, $ΚΗ=ΖΛ$

Ο λόγος των πλευρών του πράσινου ορθογωνίου είναι 1 προς 5...ή 5 προς 1

$$\frac{ΚΖ}{ΚΗ} = \frac{1}{5} \dots \text{ή} \frac{ΚΗ}{ΚΖ} = \frac{5}{1} = 5$$



Μεχρι τώρα ειδαμε τον «λόγο» δυο γνωστων ευθ.τμηματων, τον λογο δυο τμηματων που γνωριζουμε την σχεση μεγεθους τους, οπότε ο λογος είναι γνωστος.

B1.

Αν έχουμε δυο τυχαία ευθυγράμμα τμήματα;

Πως θα βρούμε, ή πως θα υπολογίσουμε τον λόγο τους;



Ποιος είναι ο λόγος του κοκκινου προς το μπλε, ή αντιστροφα, μπλε προς κοκκινο;

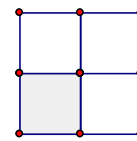
Γ1

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα τετράγωνο με πλευρά 1 μέτρο ή 1 μονάδα, 1μ.



Αν διπλασιάσουμε την πλευρά το εμβαδόν τετραπλασιάζεται.

Ο λόγος των εμβαδών είναι 4: $\frac{4}{1}$, Ο λόγος των πλευρών είναι $\frac{2}{1}$



Γνωρίζουμε τον λόγο των εμβαδών, 4. Ποιος είναι ο λόγος των πλευρών;

Ο λόγος των πλευρών είναι 2, αλλά τα μήκη των πλευρών δεν είναι απαραίτητο να είναι 1 και 2, μπορεί π.χ. να είναι 3 και 6(εμβαδά 9 και 36, λόγος 4)

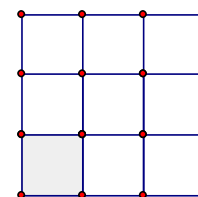
Πως θα κατασκευάσουμε τετράγωνο με διπλάσιο εμβαδόν;

Ποιος θα είναι ο λόγος των πλευρών;

Αν τριπλασιάσουμε την πλευρά το εμβαδόν εννεαπλασιάζεται.

Πως θα κατασκευάσουμε τετράγωνο με τριπλάσιο εμβαδόν;

Ποιος θα είναι ο λόγος των πλευρών;

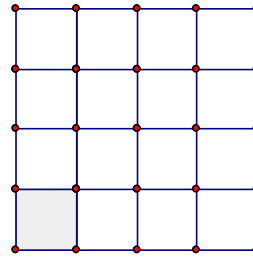
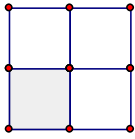


Μεταβολές εμβαδών-Λόγοι ρητοί και άρρητοι

Γ2

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα τετράγωνο με πλευρά 2 μέτρα ή 2 μονάδες, 2μ.

Αν διπλασιάσουμε την πλευρά, τότε το εμβαδόν οκταπλασιάζεται.



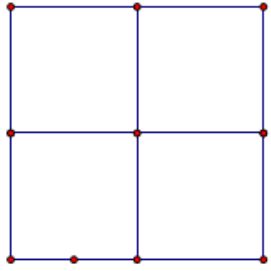
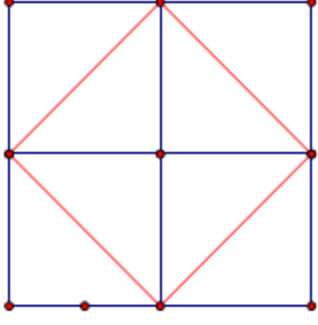
Πως θα κατασκευάσουμε τετράγωνο με διπλάσιο εμβαδόν;

δηλ. εμβαδόν 8 τετραγωνικές μονάδες;

Η εξήγηση του (αρχαίου) Σωκράτη περιγράφεται αναλυτικά στον Μένωνα του Πλάτωνα (TLG: Thesaurus Linguae Graecae-Θησαυρός Ελληνικής Γλώσσας. Βάση δεδομένων Musaios, Plato, Meno: 84 d 3- 85 b 7).

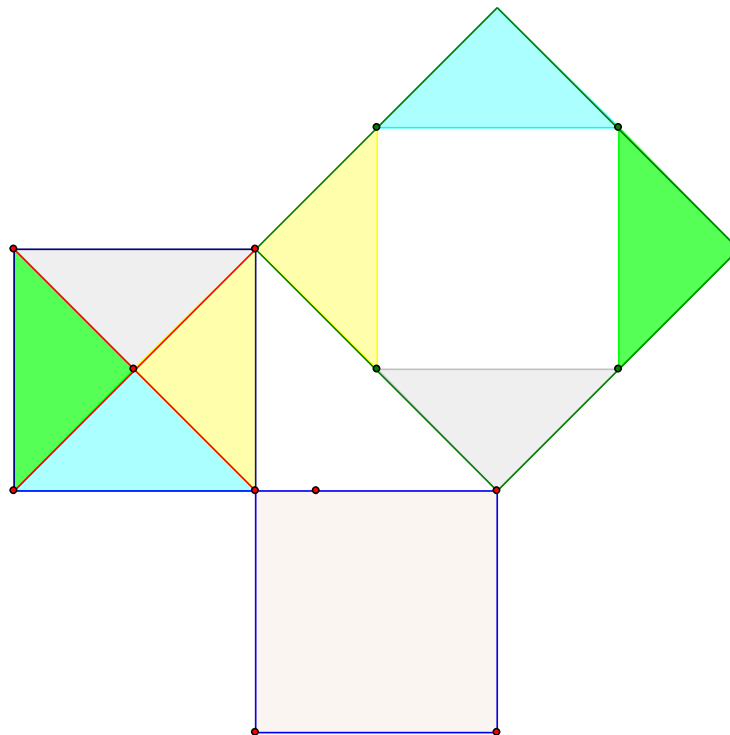
<p>–ΣΩ. Οὐκοῦν γένοιτ' ἂν τούτου τοῦ χωρίου ἕτερον διπλάσιον, τοιοῦτον δέ, ἴσας ἔχον πάσας τὰς γραμμὰς ὡσπερ τοῦτο; –ΠΑΙ. Ναί. –ΣΩ. Πόσων οὖν ἔσται ποδῶν; –ΠΑΙ.</p> <p>Ὅκτώ. –ΣΩ. Φέρε δὴ, πειρῶ μοι εἰπεῖν πηλίκη τις ἔσται ἐκείνου ἢ γραμμὴ ἐκάστη. ἢ μὴ γὰρ τοῦδε δυοῖν ποδοῖν· τί δὴ ἐκείνου τοῦ διπλασίου; –ΠΑΙ. Δῆλον δὴ, ὦ Σώκρατες, ὅτι διπλασία.</p>	<p>Σωκ: Μπορεις να κατασκευασεις ένα σχημα , ομοιο με αυτό, ώστε να εχει διπλασιο εμβαδον; Π: ναι Σωκ: ποσο θα είναι το εμβαδον του; Π:8 Σωκ: η πλευρα του αρχικου εχει μηκος 2 Τι μηκος θα εχει η πλευρα αυτου με το διπλασιο εμβαδον; Π: θα είναι διπλασια ὡ Σώκρατες</p>
<p>ΣΩ. Ὅρθως, ὦ Μένων, ὡς ἐγὼ τοῦτον οὐδὲν διδάσκω, ἀλλ' ἐρωτῶ πάντα; καὶ νῦν οὗτος οἶεται εἰδέναι ὅποια ἐστὶν ἀφ' ἧς τὸ ὀκτώπων χωρίον γενήσεται· ἢ οὐ δοκεῖ σοι;</p>	<p>Εδώ ο Σωκ τονιζει στον Μενωνα ότι δεν διδασκει αλλα μονον ρωτα.</p>
<p>Σὺ δέ μοι λέγε· ἀπὸ τῆς διπλασίας γραμμῆς φῆς τὸ διπλάσιον χωρίον γίγνεσθαι;</p>	<p>Σωκ: ισχυριζεσαι ότι από διπλασια πλευρα, θα εχουμε τετραγωνο με διπλασιο εμβαδον;</p>

Μεταβολές εμβαδών-Λόγοι ρητοί και άρρητοι

<p>... Η συζήτηση συνεχίζεται και ο (αρχαίος) Σωκράτης καθοδηγεί τον μαθητή(ΠΑΙ) να παραδεχθεί ότι το εμβαδον τετραγωνου με πλευρα διπλασια της αρχικης είναι τετραπλασιο και όχι διπλασιο του αρχικου, αρα εχουμε εμβαδον 16 και όχι 8.</p>	
<p>Στη συνέχεια ο Σωκράτης κατασκευαζει τετραγωνο χρησιμοποιωντας τα μεσα των πλευρων του τετραπλασιου και οδηγει τον ΠΑΙ να κατανοησει ότι αυτό έχει εμβαδον 8, και αρα η ζητουμενη πλευρα είναι αυτή που συνδέει τα μεσα των πλευρων, η κοκκινη.</p>	
<p>Ποιος είναι ο λόγος των πλευρών...</p>	<p>Κόκκινη προς μπλε ή αντίστροφα;</p>

Τελικά, ποιος είναι ο λόγος της διαγωνίου προς την πλευρά τετραγώνου;

Άλλος τρόπος κατασκευής τετραγώνου με διπλάσιο εμβαδόν από το αρχικό:



$*\sqrt{2}$, ίσως ο πρώτος άρρητος