Μιγαδικοί

1.41. $z=-\dfrac{4+3i}{(2-i)^2}+5i=-\dfrac{4+3i}{4+i^2-4i}+5i=-\dfrac{4+3i}{3-4i}+5i=-\dfrac{(4+3i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}+5i=-\dfrac{25i}{25}+5i=4i$

άρα $\mathrm{Re}(z)=0$ και $\mathrm{Im}(z)=4$

1.42. $\Pi=z+w+zw+\dfrac{z}{w}+(z-w)^2=2+i+1-2i+(2+i)(1-2i)+\dfrac{2+i}{1-2i}+(2+i-1+2i)^2\Leftrightarrow$

$\Pi=-1+3i$

1.43. **α)** Είναι: $\bar{z}=\overline{(2-3i)^2}=\left(\overline{2-3i}\right)^2=(2+3i)^2=4+12i-9=-5+12i$

β) $\bar{z}=\overline{\left(\dfrac{(1-i)(3+i)}{4+3i}\right)}=\dfrac{\overline{(1-i)}\,\overline{(3+i)}}{\overline{4+3i}}==\dfrac{(1+i)(3-i)}{4-3i}=\dfrac{3-i+3i+1}{4-3i}=\dfrac{4+2i}{4-3i}\Leftrightarrow$

$\bar{z}=\dfrac{(4+2i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}=\dfrac{16+12i+8i-6}{16+9}=\dfrac{10+20i}{25}=\dfrac{10}{25}+\dfrac{20}{25}i=\dfrac{2}{5}+\dfrac{4}{5}i$

1.44. $z=\dfrac{2+4i}{1+i}=\dfrac{(2+4i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=3+i$

$w=z+\dfrac{10}{z}=3+i+\dfrac{10}{3+i}=3+i+\dfrac{10(3-i)}{3^2+1^2}=6$, άρα $\mathrm{Re}(w)=6,\ \mathrm{Im}(w)=0$

1.45. **i)** $f(3i)=(3i)^2-4\cdot 3i+6=-3-12i$

ii) $f(3-i)=(3-i)^2-4(3-i)+6=2-2i$

iii) $f(3+i)=(3+i)^2-4(3+i)+6=2+2i$

1.46. **α)** $z=6i-(3-4i)x-3yi-(3i-2)x+(19-2yi)=(19-x)+(x-5y+6)i$

β) i) $\mathrm{Re}(z)=0\Leftrightarrow x=19$

ii) $z=0\Leftrightarrow\begin{cases}19-x=0\\x-5y+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=19\\y=5\end{cases}$

1.47. **α)** $z=(2+i)x+(y-1)i-6=(2x-y-6)+(x+y)i$

β) $\mathrm{Im}(z)=0\Leftrightarrow x=-y$, τότε $z=-3y-6$

γ) $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)\Leftrightarrow 2x-y-6=x+y\Leftrightarrow x-2y-6=0$

δ) $z=0\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y-6=0\\x+y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=-2\end{cases}$

1.48. Επειδή οι z_1,z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^2=2+i$, ισχύει: $z_1^2=z_2^2=2+i$.

Είναι $w=\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_1^2+z_2^2}{z_1\cdot z_2}=\frac{2(2+i)}{z_1\cdot z_2}$

Και $z_1^2=z_2^2 \Leftrightarrow z_1^2-z_2^2=0 \Leftrightarrow (z_1-z_2)(z_1+z_2)=0$

Επειδή $z_1\neq z_2$, είναι $z_1+z_2=0$.Άρα

$(z_1+z_2)^2=0 \Leftrightarrow z_1^2+z_2^2+2z_1z_2=0 \Leftrightarrow 2+i+2+i+2z_1z_2=0 \Leftrightarrow z_1z_2=-2-i$

Οπότε $w=\frac{2(2+i)}{-2-i}=-\frac{2(2+i)}{2+i}=-2$, άρα $\mathrm{Re}(w)=-2$ και $\mathrm{Im}(w)=0$.

1.49. Εστω ότι $z_1+z_2=\kappa$, $\kappa\in\mathbb{R}$ και $z_1-z_2=\lambda i$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε: $z_1=\frac{\kappa+\lambda i}{2}$ και με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε: $z_2=\frac{\kappa-\lambda i}{2}$. Παρατηρούμε ότι $\overline{z_1}=\frac{\kappa-\lambda i}{2}=z_2$. Άρα, οι z_1,z_2 είναι συζυγείς.

1.50. Εστω $z_1+z_2=\kappa$ και $z_1\cdot z_2=\lambda$, $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$. Τότε, τα z_1,z_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $z^2-\kappa z+\lambda=0$ και είναι συζυγείς.

1.51. $z^2+w^2=0 \Leftrightarrow z^2-i^2\cdot w^2=0 \Leftrightarrow (z-iw)(z+iw)=0 \Leftrightarrow z=iw$ ή $z=-iw$.

Άρα, $z=i(x+yi)=-y+xi$ ή $z=-i(x+yi)=y-xi$.

1.52. $x+yi=(\kappa-\lambda i)(\kappa+3\lambda i) \Leftrightarrow \overline{x+yi}=\overline{(\kappa-\lambda i)(\kappa+3\lambda i)} \Leftrightarrow x-yi=(\kappa+\lambda i)(\kappa-3\lambda i)$,

με πολλαπλασιασμό κατά μέλη, έχουμε:

$(x+yi)(x-yi)=(\kappa-\lambda i)(\kappa+3\lambda i)(\kappa+\lambda i)(\kappa-3\lambda i) \Leftrightarrow x^2+y^2=(\kappa^2+\lambda^2)(\kappa^2+9\lambda^2)$

1.53. Είναι $(x+yi)=(3-4i)^\nu$ και $(\overline{x+yi})=(3+4i)^\nu \Leftrightarrow (x-yi)=(3+4i)^\nu$.

Άρα, $(x+yi)(x-yi)=\left[(3-4i)(3+4i)\right]^\nu \Leftrightarrow x^2+y^2=25^\nu$

1.54. $\begin{cases}\kappa^2-1=3\\ \kappa^2+\kappa-1=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\kappa^2-4=0\\ \kappa^2+\kappa-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(\kappa-2)(\kappa+2)=0\\ (\kappa+2)(\kappa-1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\kappa=2 \text{ ή } \kappa=-2\\ \kappa=-2 \text{ ή } \kappa=1\end{cases}$

Άρα, επειδή πρέπει να ισχύουν και οι δύο σχέσεις ταυτόχρονα, πρέπει $\kappa=-2$.

1.55. **α)** $x-iy=\frac{1}{3+4i}=\frac{3-4i}{25}=\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i$

β) $x+yi=(1-i)^2=\cancel{1}-2i+\cancel{i^2}=-2i$

γ) $x-yi=\frac{1}{(1+i)^2}=\frac{1}{\cancel{1}+2i+\cancel{i^2}}=\frac{i}{2i^2}=-\frac{1}{2}i$

1.56. **α)** $3x^2+4y^2+(x+y-1)i=16+2i \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+4y^2=16 \\ x+y-1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+4(3-x)^2=16 \\ y=3-x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 3x^2+4x^2-24x+36=16 \\ y=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2-24x+20=0 \\ y=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \text{ ή } x=\frac{10}{7} \\ y=3-x \end{cases}$

Αν $x=2$, τότε $y=1$, ενώ αν $x=\frac{10}{7}$, τότε $y=\frac{11}{7}$

β) $(x+1)^2+(y-i)^2=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+y^2-2yi-1=0 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} (x+1)^2+y^2-1=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2=1 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=\pm 1 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$x=0,\ y=0$ ή $x=-2,\ y=0$

γ) $\frac{x+1}{3-i}+\frac{y}{1+i}=\frac{2+5i}{i-2} \Leftrightarrow \frac{(x+1)(3+i)}{10}+\frac{y(1-i)}{2}=\frac{(2+5i)(-2-i)}{5} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 3x+5y=-1 \\ x-5y=-25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{13}{2} \\ y=\frac{37}{10} \end{cases}$

δ) $\frac{x-2}{1-i}+\frac{y-3}{2+i}=1-2i \Leftrightarrow \frac{(x-2)(1+i)}{2}+\frac{(y-3)(2-i)}{5}=1-2i \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 5x+4y=32 \\ 5x-2y=-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=8 \end{cases}$

1.57. $(1-3i)^2y+(2+4i)x=4-2i \Leftrightarrow -8y-6iy+2x+4ix=4-2i \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2x-8y=4 \\ 4x-6y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$

1.58. $x(3+i)+y(3-2i)=(3x+3y)+(x-2y)i=6+5i \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+3y=6 \\ x-2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=3 \end{cases}$

1.59. **α)** Εστω $x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$ η τετραγωνική ρίζα του z. Τότε:

$(x+yi)^2=3-4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=3 \\ 2xy=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-\frac{4}{x^2}=3 \\ y=-\frac{2}{x} \end{cases} \overset{x^2=u}{\Leftrightarrow} \begin{cases} u^2-3u-4=0 \\ x^2=u \\ y=-\frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} u=4 \text{ ή } u=-1 \text{ απορρίπτεται} \\ x^2=u \\ y=-\frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 2 \\ y=-\frac{2}{x} \end{cases}$

Αν $x=2$, τότε $y=-1$ και μία ρίζα είναι ο $2-i$.

Αν $x=-2$, τότε $y=1$ και η άλλη ρίζα είναι ο $-2+i$.

β) Εστω $x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$ η τετραγωνική ρίζα του z. Τότε:

$$(x+yi)^2=3+4i \Leftrightarrow x^2+2xyi-y^2=3+4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=3 & (1)\\ 2xy=+4 & (2)\end{cases}$$ Από τη (2)

προκύπτει ότι $xy>0$, άρα x,y είναι ομόσημοι. Υψώνουμε στο τετράγωνο τις σχέσεις (1) και (2) και έχουμε: $x^4+y^4-2x^2y^2=9$ και $4x^2y^2=16$. Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$x^4+y^4+2x^2y^2=25 \Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)^2=25 \Leftrightarrow x^2+y^2=5,\ \text{γιατί } x^2+y^2\geq 0.$$

Οπότε προκύπτει το σύστημα $\begin{cases} x^2+y^2=5\\ x^2-y^2=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=4\\ y^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 2\\ y=\pm 1\end{cases}$

Επειδή x,y ομόσημοι, είναι: $x=2$ και $y=1$ ή $x=-2$ και $y=-1$

Άρα οι τετραγωνικές ρίζες του z είναι $z_1=2+i$ και $z_2=-2-i$.

γ) Εστω $x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$ η τετραγωνική ρίζα του z. Τότε:

$$(x+yi)^2=8+6i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=8\\ 2xy=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-\dfrac{9}{x^2}=8\\ y=\dfrac{3}{x}\end{cases} \overset{x^2=u}{\Leftrightarrow} \begin{cases} u^2-8u-9=0\\ x^2=u\\ y=\dfrac{3}{x}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u=9 \text{ ή } u=-1 \text{ απορρίπτεται}\\ x^2=u\\ y=\dfrac{3}{x}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 3\\ y=\dfrac{3}{x}\end{cases}$$

Αν $x=3$, τότε $y=1$ και μία ρίζα είναι ο $3+i$.

Αν $x=-3$, τότε $y=-1$ και η άλλη ρίζα είναι ο $-3-i$.

1.60. $$z=\overline{w} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2+\beta=-2\\ \alpha^2\beta=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2-\dfrac{3}{\alpha^2}=-2\\ \beta=-\dfrac{3}{\alpha^2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\pm 1\\ \beta=-3\end{cases}$$

1.61. $$\overline{z}=w \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=2y\\ -11=-(2x+y)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5\\ y=1\end{cases}$$

1.62. $$z_1=z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3=2-\beta^3\\ \alpha^2+\beta^2-1=\alpha\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3+\beta^3=2\\ \alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha+\beta)\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)=2\\ \alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha=2-\beta\\ \alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1\\ \beta=1\end{cases}$$

1.63. $\alpha+\beta-5\gamma=(\alpha-\beta+\gamma)i \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta-5\gamma=0 & (1) \\ \alpha-\beta+\gamma=0 & (2) \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} \alpha=2\gamma$

Η (1) γίνεται $\beta=3\gamma$, τότε $\beta+\gamma=4\gamma=2\alpha$

1.64. $z_1^2=z_2^2=2+3i$ και $z_1\neq z_2$. Τότε $z_1^2=z_2^2 \Leftrightarrow (z_1-z_2)(z_1+z_2)=0 \Leftrightarrow z_1+z_2=0$

$$z=\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_1}{z_2}-(2-4i)z_1z_2=\frac{z_2^2+z_1^2}{z_1z_2}-(2-4i)z_1(-z_1)=\frac{2\cancel{z_1^2}}{-\cancel{z_1^2}}+(2-4i)(2+3i)=14-2i$$

1.65. $\frac{z_1}{2}=\frac{z_2}{3}=\frac{z_3}{5}=k \Leftrightarrow z_1=2k,\ z_2=3k,\ z_3=5k$

$(z_1+z_2+z_3)^2=25z_1^2 \Leftrightarrow (2k+3k+5k)^2=25(2k)^2 \Leftrightarrow 100k^2=100k^2$ ισχύει

1.66. $A=i^{2013}+i^{2014}+i^{2015}+i^{2016}=i^{4\cdot503+1}+i^{4\cdot503+2}+i^{4\cdot503+3}+i^{4\cdot504}=i-1-i+1=0$

$$B=i^{-55}+i^{45}+i^{-35}+i^{25}=\frac{1}{i^{4\cdot13+3}}+i^{4\cdot11+1}+\frac{1}{i^{4\cdot8+3}}+i^{4\cdot6+1}=-\frac{1}{i}+i-\frac{1}{i}+i=-\frac{2i}{i^2}+2i=4i$$

1.67. $A=3i+2i^3+i^{202}-3i^{-147}-2i^7+i^{12}=3i-2i+i^{4\cdot50+2}-\frac{3}{i^{4\cdot38+3}}-2i^{4\cdot1+3}+i^{4\cdot3} \Leftrightarrow$

$$A=i-\cancel{1}+\frac{3}{i}+2i+\cancel{1}=3i+\frac{3i}{i^2}=3i-3i=0$$

1.68. $i^\nu+i^{\nu+1}+i^{\nu+2}+i^{\nu+3}=i^\nu+i^\nu\cdot i+i^\nu\cdot i^2+i^\nu\cdot i^3=i^\nu+i^\nu\cdot i-i^\nu-i^\nu\cdot i=0$

$$\frac{1}{i^\nu}+\frac{1}{i^{\nu+1}}+\frac{1}{i^{\nu+2}}+\frac{1}{i^{\nu+3}}=\frac{1}{i^\nu}+\frac{1}{i^\nu\cdot i}+\frac{1}{i^\nu\cdot i^2}+\frac{1}{i^\nu\cdot i^3}=\frac{1}{i^\nu}+\frac{1}{i^\nu\cdot i}-\frac{1}{i^\nu}-\frac{1}{i^\nu\cdot i}=0$$

1.69. $$A=\frac{(1+i)^{2018}}{(1-i)^{2014}}=\frac{\left[(1+i)^2\right]^{1009}}{\left[(1-i)^2\right]^{1007}}=\frac{(2i)^{1009}}{(-2i)^{1007}}=\frac{2^{1009}\cdot i^{1009}}{-2^{1007}\cdot i^{1007}}=4$$

1.70. $(1+i)^{2004}+(1-i)^{2004}=\left[(1+i)^2\right]^{1002}+\left[(1-i)^2\right]^{1002}=(2i)^{1002}+(-2i)^{1002}=$

$-2^{1002}-2^{1002}=-2\cdot2^{1002}=-2^{1003}$

1.71. $$z=\left(\frac{1+2i}{-2+i}\right)^{18}-\left(\frac{3+i}{1-3i}\right)^{19}=\left(\frac{1+2i}{2i^2+i}\right)^{18}-\left(\frac{-3i^2+i}{1-3i}\right)^{19}=\left(\frac{\cancel{1+2i}}{i\cancel{(1+2i)}}\right)^{18}-\left(\frac{i\cancel{(1-3i)}}{\cancel{1-3i}}\right)^{19} \Leftrightarrow$$

$$z=\frac{1}{i^{18}}-i^{19}=\frac{1}{i^{4\cdot4+2}}-i^{4\cdot4+3}=-1-(-i)=-1+i$$

1.72. $z=\left(\dfrac{1+5i}{5-i}\right)^{\nu}+\left(\dfrac{5-i}{1+5i}\right)^{\nu}=\left(\dfrac{-i^2+5i}{5-i}\right)^{\nu}+\left(\dfrac{5-4i}{-i^2+5i}\right)^{\nu}\Leftrightarrow$

$z=\left[\dfrac{i(5-i)}{5-i}\right]^{\nu}+\left[\dfrac{5-i}{i(5-i)}\right]^{\nu}=i^{\nu}+\dfrac{1}{i^{\nu}}$

- Αν $\nu=4\kappa$, τότε $z=i^{4\kappa}+\dfrac{1}{i^{4\kappa}}=1+\dfrac{1}{1}=2$.
- Αν $\nu=4\kappa+1$, τότε $z=i^{4\kappa+1}+\dfrac{1}{i^{4\kappa+1}}=i+\dfrac{1}{i}=i+\dfrac{1}{i^2}=\ i-i=0$.
- Αν $\nu=4\kappa+2$, τότε $z=i^{4\kappa+2}+\dfrac{1}{i^{4\kappa+2}}=i^2+\dfrac{1}{i^2}=\ -1+\dfrac{1}{-1}=-2$.

Αν $\nu=4\kappa+3$, τότε $z=i^{4\kappa+3}+\dfrac{1}{i^{4\kappa+3}}=i^3+\dfrac{1}{i^3}=\ -i+\dfrac{1}{-i}=-i-\dfrac{i}{i^2}=-i+i=0$.

1.73. Αν $\nu=4k$ τότε $A=\left(1+i^{4k}\right)\left(1+i^{4\cdot 2k}\right)=2\cdot 2=4$

Αν $\nu=4k+1$ τότε $A=\left(1+i^{4k+1}\right)\left(1+i^{4\cdot 2k+2}\right)=(1+i)(1-1)=0$

Αν $\nu=4k+2$ τότε $A=\left(1+i^{4k+2}\right)\left(1+i^{4(2k+1)}\right)=(1-1)(1+1)=0$

Αν $\nu=4k+3$ τότε $A=\left(1+i^{4k+3}\right)\left(1+i^{4(2k+1)+2}\right)=(1-i)(1-1)=0$

1.74. Αν $x=4k$ τότε $A=i^{3x+1}=i^{4\cdot 3x+1}=i\neq 1$

Αν $x=4k+1$ τότε $A=i^{3x+1}=i^{4\cdot(3x+1)}=1$

Αν $x=4k+2$ τότε $A=i^{3x+1}=i^{4\cdot(3x+1)+3}=-i\neq 1$

Αν $x=4k+3$ τότε $A=i^{3x+1}=i^{4\cdot(3x+2)+2}=-1\neq 1$. Άρα $x=4k+1,\ k\in\mathbb{N}$

1.75. Αν $\nu=4k$ τότε $i^{5\nu+1}=1\Leftrightarrow i^{4\cdot 5k+1}=1\Leftrightarrow i=1$ άτοπο

Αν $\nu=4k+1$ τότε $i^{5\nu+1}=1\Leftrightarrow i^{4\cdot(5k+1)+2}=1\Leftrightarrow -1=1$ άτοπο

Αν $\nu=4k+2$ τότε $i^{5\nu+1}=1\Leftrightarrow i^{4\cdot(5k+2)+3}=1\Leftrightarrow -i=1$ άτοπο

Αν $\nu=4k+3$ τότε $i^{5\nu+1}=1\Leftrightarrow i^{4(5k+4)}=1\Leftrightarrow 1=1$ που ισχύει. Άρα $\nu=4k+3$, $k\in\mathbb{N}$

1.76. $A=i+(2+3i)+(4+5i)+\ldots+\left[2v-2+(2v-1)i\right]\Leftrightarrow$

$A=\left[2+4+\ldots+(\nu-2)\right]+\left[1+3+5+\ldots+(2\nu-1)\right]i\Leftrightarrow$

$A=\dfrac{\nu-1}{2}(2+2\nu-2)+\dfrac{\nu}{2}(1+2\nu-1)i=\nu(\nu-1)+\nu^2 i$

1.77. Εστω $A=1+2i+3i^2+\ldots+v\cdot i^{\nu-1}$, τότε: $iA=i+2i^2+3i^3+\ldots+\nu\cdot i^{\nu}$ και

$A-iA=1+i+i^2+\ldots+i^{\nu-1}-\nu\cdot i^{\nu}\Leftrightarrow(1-i)A=\left(1+i+i^2+\ldots+i^{\nu-1}\right)-\nu\cdot i^{\nu}$.

Είναι $1+i+i^2+\ldots+i^{\nu-1}=\dfrac{i^{\nu}-1}{i-1}$, οπότε:

$$(1-i)A=\frac{i^{\nu}-1}{i-1}-\nu\cdot i^{\nu}\Leftrightarrow A=-\frac{i^{\nu}-1}{(1-i)^2}-\frac{\nu\cdot i^{\nu}}{1-i}=-\frac{i^{\nu}-1}{-2i}-\frac{\nu\cdot i^{\nu}(1+i)}{(1-i)(1+i)}\Leftrightarrow$$

$$A=-\frac{(i^{\nu}-1)i}{2i^2}-\frac{\nu\cdot i^{\nu}+\nu\cdot i^{\nu+1}}{2}=-\frac{i^{\nu+1}-i}{2}-\frac{\nu\cdot i^{\nu}+\nu\cdot i^{\nu+1}}{2}=\frac{i-\nu\cdot i^{\nu}-(\nu+1)i^{\nu+1}}{2}$$

1.78. $(3+7i)^{\nu}+(7i^2+3i)^{\nu}=0\Leftrightarrow(3+7i)^{\nu}+[i(3+7i)]^{\nu}=0\Leftrightarrow$

$(3+7i)^{\nu}+i^{\nu}(3+7i)^{\nu}=0\Leftrightarrow(3+7i)^{\nu}(1+i^{\nu})=0$

Πρέπει $1+i^{\nu}=0\Leftrightarrow i^{\nu}=-1\Leftrightarrow\nu=4\kappa+2$, $\kappa\in\mathbb{N}$,

Είναι $\nu<2014\Leftrightarrow4\kappa+2<2014\Leftrightarrow4\kappa<2012\Leftrightarrow\kappa<503{,}5$.

Επειδή $\kappa\in\mathbb{N}$, θα ισχύει $\kappa_{max}=503$, οπότε $\nu_{max}=4\cdot503+2=2014$.

1.79. $(6+3i)^{\nu}+(3-6i)^{\nu}=0\Leftrightarrow(-6i^2+3i)^{\nu}+(3-6i)^{\nu}=0\Leftrightarrow$

$[i(3-6i)]^{\nu}+(3-6i)^{\nu}=0\Leftrightarrow i^{\nu}(3-6i)^{\nu}+(3-6i)^{\nu}=0\Leftrightarrow$

$(i^{\nu}+1)(3-6i)^{\nu}=0\Leftrightarrow i^{\nu}+1=0$ ή $(3-6i)^{\nu}=0$, που είναι αδύνατο.

Άρα, $i^{\nu}=-1\Leftrightarrow\nu=4\kappa+2$, $\kappa\in\mathbb{N}$.

Ο φυσικός αριθμός ν που επαληθεύει τη σχέση, γίνεται ελάχιστος για τη μικρότερη τιμή του $\kappa\in\mathbb{N}$ που είναι $\kappa=0$. Τότε $\nu=2$.

1.80. $\bar{z}=(x-yi)^{\nu}+(y-xi)^{\nu}=(-xi^2-yi)^{\nu}+(-yi^2-xi)^{\nu}=(-i)^{\nu}(y+xi)^{\nu}+(-i)^{\nu}(x+yi)^{\nu}\Leftrightarrow$

$\bar{z}=(-i)^{\nu}\left[(y+xi)^{\nu}+(x+yi)^{\nu}\right]=(-i)^{\nu}z$.

$z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\bar{z}\Leftrightarrow(-i)^{\nu}=1\Leftrightarrow\nu=4k, k\in\mathbb{N}^*$, $\nu>0\Leftrightarrow\kappa>0$, άρα $\kappa_{min=1}$ και $\nu_{min}=4$

1.81. Είναι: $z=[(10-\alpha)+i(2+\alpha)]\cdot(\alpha-i)=(10-\alpha)\alpha-i(10-\alpha)+\alpha(2+\alpha)i+2+\alpha\Leftrightarrow$

$z=10\alpha-\alpha^2+2+\alpha+i[\alpha(2+\alpha)-(10-\alpha)]=(-\alpha^2+11\alpha+2)+i(2\alpha+\alpha^2-10+\alpha)\Leftrightarrow$

$z=(-\alpha^2+11\alpha+2)+i(\alpha^2+3\alpha-10)$

$z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\alpha^2+3\alpha-10=0\Leftrightarrow(\alpha-2)(\alpha+5)=0\Leftrightarrow\alpha=2$ ή $\alpha=-5$

1.82. $z\bar{z}=1\Leftrightarrow\bar{z}=\frac{1}{z}$ και $w\bar{w}=1\Leftrightarrow\bar{w}=\frac{1}{w}$

$$\bar{z}_1=\frac{\bar{z}-\bar{w}}{1+\bar{z}\bar{w}}=\frac{\frac{1}{z}-\frac{1}{w}}{1+\frac{1}{z}\frac{1}{w}}=\frac{w-z}{zw+1}=-z_1\Leftrightarrow z_1\in I$$

1.83. $w=(z-i)(\bar{z}-1)=(x+yi-i)(x-yi-1)=\left(x^2-x+y^2-y\right)+(-y-x+1)i$

$w\in\mathbb{R}\Leftrightarrow -y-x+1=0\Leftrightarrow y=1-x$, άρα $z=x+(1-x)i,\ x\in\mathbb{R}$

1.84. $z=\dfrac{2-xi}{x+i}=\dfrac{(2-xi)(x-i)}{(x+i)(x-i)}=\dfrac{2x-2i-x^2i-x}{x^2+1^2}=\dfrac{x-\left(x^2+2\right)i}{x^2+1}=\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{x^2+2}{x^2+1}i$

$z\in I\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z)=0\Leftrightarrow \dfrac{x}{x^2+1}=0\Leftrightarrow x=0$

1.85. $w\in\mathbb{R}\Leftrightarrow w=\bar{w}\Leftrightarrow \dfrac{z+i}{z+2i}=\overline{\left(\dfrac{z+1}{z+2i}\right)}\Leftrightarrow \dfrac{z+i}{z+2i}=\dfrac{\bar{z}-i}{\bar{z}-2i}\Leftrightarrow$

$(z+i)(\bar{z}-2i)=(\bar{z}-i)(z+2i)\Leftrightarrow$

$z\cdot\bar{z}-2iz+i\bar{z}+2=\bar{z}\cdot z+2i\bar{z}-iz+2\Leftrightarrow -iz=i\bar{z}\Leftrightarrow z=-\bar{z}\Leftrightarrow z\in I$.

1.86. $w=\dfrac{3z+1}{\bar{z}-2}+\dfrac{3\bar{z}+1}{z-2}=\dfrac{3z+1}{\bar{z}-2}+\overline{\left(\dfrac{3z+1}{\bar{z}-2}\right)}=2\operatorname{Re}\left(\dfrac{3z+1}{\bar{z}-2}\right)\in\mathbb{R}$

1.87. $\bar{w}=\bar{z}z+\bar{z}^4+z^4-2014=w\Leftrightarrow w\in\mathbb{R}$

1.88. $w\in\mathbb{R}\Leftrightarrow w=\bar{w}\Leftrightarrow \dfrac{3z-1}{3z+1}=\dfrac{3\bar{z}-1}{3\bar{z}+1}\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow z=\bar{z}\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$

1.89. **α)** $w\in\mathbb{R}\Leftrightarrow w=\bar{w}\Leftrightarrow \dfrac{z-2i}{z+2i}=\dfrac{\bar{z}+2i}{\bar{z}-2i}\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow z=-\bar{z}\Leftrightarrow z\in I$

β) $w\in I\Leftrightarrow w=-\bar{w}\Leftrightarrow \dfrac{z-2i}{z+2i}=-\dfrac{\bar{z}+2i}{\bar{z}-2i}\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow \bar{z}=\dfrac{4}{z}$

1.90. $3z_1\bar{z}_2+4\bar{z}_1z_2=14\Leftrightarrow 3z_1\bar{z}_2+3\bar{z}_1z_2+\bar{z}_1z_2=14\Leftrightarrow 3\cdot 2\operatorname{Re}\left(z_1\bar{z}_2\right)+\bar{z}_1z_2=14\Leftrightarrow$

$\bar{z}_1z_2=14-6\operatorname{Re}\left(z_1\bar{z}_2\right)=k\in\mathbb{R}$

$z_1\bar{z}_2=\overline{\bar{z}_1z_2}=\bar{k}=k\in\mathbb{R}$

1.91. $z=ki,\ k\neq 1.$

$w=\dfrac{z^3+i}{z-i}=\dfrac{k^3i^3+i}{ki-i}=\dfrac{-k^3i+i}{i(k-1)}=\dfrac{-i\left(k^3-1\right)}{i(k-1)}=-\dfrac{\cancel{(k-1)}\left(k^2+k+1\right)}{\cancel{k-1}}=-\left(k^2+k+1\right)<0$

αφού το τριώνυμο k^2+k+1 έχει $\Delta<0$

1.92. $w=z+z^2+2=x+yi+(x+yi)^2+2=...=\left(x^2+x-y^2+2\right)+y(2x+1)i$

$w\in\mathbb{R}\Leftrightarrow y(2x+1)=0\Leftrightarrow y=0$ ή $x=-\dfrac{1}{2}$

1.93. $\overline{z}=(7-i)^{2016}+(1-7i)^{2016}=\left(-7i^2-i\right)^{2016}+\left(-i^2-7i\right)^{2016}\Leftrightarrow$

$\overline{z}=\left[-i(1+7i)\right]^{2016}+\left[-i(7+i)\right]^{2016}=i^{4\cdot 504}(1+7i)^{2016}+i^{4\cdot 504}(7+i)^{2016}=z$

1.94. $(z+w)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow(z+w)=\overline{(z+w)}\Leftrightarrow z+w=\overline{z}+\overline{w}\Leftrightarrow\overline{w}=z+w-\overline{z}\quad(1)$

$(zw)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow(zw)=\overline{(zw)}\Leftrightarrow zw=\overline{z}\overline{w}\Leftrightarrow zw=\overline{z}\left(z+w-\overline{z}\right)\Leftrightarrow$

$z\overline{z}+\overline{z}w-\overline{z}^2-zw=0\Leftrightarrow\overline{z}\left(z-\overline{z}\right)-w\left(z-\overline{z}\right)=0\Leftrightarrow\left(z-\overline{z}\right)\left(\overline{z}-w\right)=0\Leftrightarrow$

$z=\overline{z}\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$ που είναι αδύνατο η $\overline{z}=w$

1.95. Εστω ότι $\dfrac{z}{w}=k\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=kw\Leftrightarrow z^{1821}=k^{1821}w^{1821}\Leftrightarrow\sqrt{3}+i=k^{1821}(x+2xi)\Leftrightarrow$

$\begin{cases}\sqrt{3}=xk^{1821}\\ 1=2xk^{1821}\end{cases}\Rightarrow 1=2\sqrt{3}$ άτοπο

1.96. Επειδή $(1+xi)^{11}\in\mathbb{R}$, θα ισχύει και $(1+xi)^{11}=\lambda\in\mathbb{R}$, άρα και $\overline{(1+xi)^{11}}=\lambda$.

Είναι $(x+i)^{11}=\left[i\left(1+\dfrac{x}{i}\right)\right]^{11}=i^{11}\left(1+\dfrac{xi}{i^2}\right)^{11}=i^{11}(1-xi)^{11}=i^8\cdot i^3\cdot\overline{(1+xi)^{11}}=-i\cdot\lambda$

Άρα $(x+i)^{11}=-\lambda i\in I$.

1.97. **α)** Η εξίσωση $z^2+z+1=0\quad(1)$ είναι 2ου βαθμού με $\Delta=-3<0$ και ρίζες

$z_{1,2}=\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

Άρα ο μιγαδικός $z=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, επαληθεύει την (1).

β) $z^2+z+1=0\Leftrightarrow(z+1)\left(z^2+z+1\right)=0\Leftrightarrow z^3-1=0\Leftrightarrow z^3=1$

Είναι $z^2+z+1=0\Leftrightarrow z^2+1=-z$, οπότε:

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^{200}+z^{199}=\left(\frac{z^2+1}{z}\right)^{200}+z^{3\cdot 33+1}=\left(\frac{-z}{z}\right)^{200}+\left(z^3\right)^{66}z=1+z\Leftrightarrow$$

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^{200}+z^{199}=1+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=-\overline{z}$$

γ) $w^{301}=\left(z^2+1\right)^5\Leftrightarrow w^{300}w=z^5\Leftrightarrow zw=z^5\Leftrightarrow w=z^4=z^3z=-1\cdot\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$

1.98. **i.** $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z}{w}\right)=\dfrac{\dfrac{z}{w}+\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}}{2}=\dfrac{\dfrac{z}{w}+\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}}{2}=\dfrac{\dfrac{z\overline{w}+w\overline{z}}{w\overline{w}}}{2}=\dfrac{z\overline{w}+w\overline{z}}{2w\overline{w}}$

ii. $\mathrm{Im}\left(\frac{z}{w}\right)=\dfrac{\frac{z}{w}-\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}}{2i}=\dfrac{\frac{z}{w}-\frac{\bar{z}}{\bar{w}}}{2i}=\dfrac{\frac{z\bar{w}-w\bar{z}}{w\bar{w}}}{2i}=\dfrac{z\bar{w}-w\bar{z}}{2w\bar{w}i}$

1.99. α) $z^3+i=z^3-i^3=(z-i)(z^2+iz+i^2)=(z-i)\,\cancel{(z^2+iz-1)}^{0}=0\Leftrightarrow z^3=-i$

β) Είναι $z^2+iz-1=0\Leftrightarrow z^2-1=-iz$, οπότε

$(z^2-1)^{1821}=(-iz)^{1821}=-i^{1821}z^{1821}=-i^{4\cdot455+1}\cdot(z^3)^{607}=-i(-i)^{607}=-i\cdot(-i^{607})=i^{608}=i^{4\cdot152}=1$

1.100. α) Είναι $z^4+z^2+1=0\Leftrightarrow z^4+z^2=-1$, τότε

$z^2(z^4+z^2)=-z^2\Leftrightarrow z^6+z^4=-z^2\Leftrightarrow z^6=-z^4-z^2=1$.

β) $(z^2+1)^{300}=(-z^4)^{300}=z^{1200}=(z^6)^{200}=1^{200}=1$

γ) $z^{6k+4}+z^{6k+2}+1=(z^6)^k z^4+(z^6)^k z^2+1=1\cdot z^4+1\cdot z^2+1=z^4+z^2+1=0$

1.101. α) Εστω $\frac{z_1}{z_2}=w$, τότε: $w+\frac{1}{w}=-1\Leftrightarrow w^2+1=-w\Leftrightarrow w^2+w+1=0\Leftrightarrow$

$(w-1)(w^2+w+1)=0\Leftrightarrow w^3-1=0\Leftrightarrow w^3=1\Leftrightarrow\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3=1\Leftrightarrow z_1^{\,3}=z_2^{\,3}$.

β) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{3\nu-1}+\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{3\nu-1}=w^{3\nu-1}+\frac{1}{w^{3\nu-1}}=\frac{w^{3\nu}}{w}+\frac{w}{w^{3\nu}}=\frac{1}{w}+w=-1$

1.102. α) $\alpha-3=0\Leftrightarrow\alpha=3$ και $\beta+2=0\Leftrightarrow\beta=-2$

β) $\alpha-3=5\Leftrightarrow\alpha=8$ και $\beta+2=-2\Leftrightarrow\beta=-4$

γ) $\begin{cases} z\in I\\ \mathrm{Im}(z)=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha-3=0\\ \beta+2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=3\\ \beta=2\end{cases}$

1.103. Εχουμε: $w=z_1+\frac{1}{10}z_2=(3\alpha+i)+\frac{1}{10}\left[(12+\alpha)+(3\alpha-4)i\right]\Leftrightarrow$

$w=3\alpha+i+\frac{12+\alpha}{10}+\frac{3\alpha-4}{10}i=\left(3\alpha+\frac{12+\alpha}{10}\right)+\left(1+\frac{3\alpha-4}{10}\right)i$

Επειδή η γεωμετρική εικόνα του w βρίσκεται στην ευθεία $x+3y=7$, είναι:

$3\alpha+\frac{12+\alpha}{10}+3\left(1+\frac{3\alpha-4}{10}\right)=7\Leftrightarrow 3\alpha+\frac{12+\alpha}{10}+3+\frac{9\alpha-12}{10}=7\Leftrightarrow$

$30\alpha+12+\alpha+30+9\alpha-12=70\Leftrightarrow 40\alpha+30=70\Leftrightarrow 40\alpha=40\Leftrightarrow\alpha=1$

1.104. Πρέπει $z=(\alpha^2+4\beta+4)+(\beta^2-4\alpha+4)i=0+0i\Leftrightarrow$

$\begin{cases}\alpha^2+4\beta+4=0\\ \beta^2-4\alpha+4=0\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow}\alpha^2+\beta^2-4\alpha+4\beta+8=0\Leftrightarrow$

$$\alpha^2-4\alpha+4+\beta^2+4\beta+4=0 \Leftrightarrow (\alpha-2)^2+(\beta+2)^2=0$$

Επειδή $(\alpha-2)^2\geq 0$ και $(\beta+2)^2\geq 0$, πρέπει $\alpha-2=0$ και $\beta+2=0 \Leftrightarrow \alpha=2$ και $\beta=-2$.

1.105. Εστω $z=z_1+z_2$ με $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\gamma+\delta i$. Επειδή ο $z_1=\alpha+\beta i$ βρίσκεται επί της ευθείας $\varepsilon_1: y=x-3$, πρέπει $\beta=\alpha-3$ (1)

Επίσης ο $z_2=\gamma+\delta i$ βρίσκεται επί της ευθείας $\varepsilon_2: y=3x-1$, οπότε $\delta=3\gamma-1$ (2)

Όμως $z=z_1+z_2 \Leftrightarrow 3-2i=(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i) \Leftrightarrow$

$$3-2i=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+\gamma=3 & (3)\\ \beta+\delta=2 & (4)\end{cases}$$

Η (4) με τη βοήθεια των (1) και (2) γίνεται $\alpha-3+3\gamma-1=2 \Leftrightarrow \alpha+3\gamma=6$ (5)

Από (3) και (5) έχουμε: $\begin{cases}\alpha+\gamma=3\\ \alpha+3\gamma=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=\dfrac{3}{2}\\ \gamma=\dfrac{3}{2}\end{cases}$

οπότε $\beta=\frac{3}{2}-3=-\frac{3}{2}$ και $\delta=3\cdot\frac{3}{2}-1=\frac{7}{2}$. Άρα $z_1=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i$ και $z_2=\frac{3}{2}+\frac{7}{2}i$.

1.106.α) $f(2013)+f(2014)+f(2015)+f(2016)=(2\alpha+\alpha i)\left(i^{2013}+i^{2014}+i^{2015}+i^{2016}\right)$

$$=(2\alpha+\alpha i)(i-1-i+1)=0.$$

β) Για $\nu=4\kappa+2$ είναι $f(\nu)=i^{4\kappa+2}\cdot(2\alpha+\alpha i)=-2\alpha-\alpha i$.

Ο $f(\nu)$ έχει εικόνα το $M(-2\alpha,-\alpha)$ που ανήκει στην ευθεία

1.107.α) $x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=3$ $\quad \Delta=1$

β) $x^2-2x+10=0 \Leftrightarrow x=1\pm 3i$, $\quad \Delta=-36$

γ) $x^2-x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\quad \Delta=-3$

1.108.α) Περνάμε σε σχέσεις συζυγών, οπότε έχουμε: $\overline{3\overline{w}+\overline{z}}=4 \Leftrightarrow 3w+z=4$.

Άρα έχουμε το σύστημα $\begin{cases}iz-3w=-5+4i\\ 3w+z=4 \qquad (1)\end{cases}$

Προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε:

$$iz+z=-1+4i \Leftrightarrow (1+i)z=-1+4i \Leftrightarrow z=\frac{-1+4i}{1+i} \Leftrightarrow z=\frac{(-1+4i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \Leftrightarrow$$

$z=\dfrac{-1+i+4i+4}{2} \Leftrightarrow z=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}i$. Από την (1) είναι $3w=4-z \Leftrightarrow w=\dfrac{4-z}{3}$

Οπότε $w=\dfrac{4-\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i\right)}{3}=\dfrac{\frac{5}{2}-\frac{5}{2}i}{3}\Leftrightarrow w=\frac{5}{6}-\frac{5}{6}i$.

β) Στην εξίσωση $2\bar{z}_2+\bar{z}_1=3$ περνάμε σε σχέσεις συζυγών και στα δύο μέλη, οπότε

$2z_2+z_1=3$ και έχουμε το σύστημα $\begin{cases} iz_1-2z_2=-4+3i \\ z_1+2z_2=3 \end{cases}\quad (2)$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$iz_1+z_1=-1+3i\Leftrightarrow z_1=\dfrac{-1+3i}{1+i}=\dfrac{(-1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\Leftrightarrow$

$z_1=\dfrac{-1+i+3i+3}{2}\Leftrightarrow z_1=\dfrac{2+4i}{2}\Leftrightarrow z_1=1+2i$ και από την (2) είναι

$1+2i+2z_2=3\Leftrightarrow 2z_2=2-2i\Leftrightarrow z_2=1-i$.

γ) $\begin{cases} 2z-i\bar{w}=1+i \\ (1+i)\bar{z}+w=2-i \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \overline{2z-i\bar{w}}=\overline{1+i} \\ (1+i)\bar{z}+w=2-i \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2\bar{z}+iw=1-i \\ (1+i)\bar{z}+w=2-i \end{cases}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow$

$z=\frac{3}{10}+\frac{9}{10}i,\ \ w=\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i$

1.109. Από το σύστημα των $z+w=2+i$ και $z-w=2-\lambda i$, προκύπτει: $z=2+\dfrac{1-\lambda}{2}i$ και

$w=\dfrac{1+\lambda}{2}i$. Αντικαθιστώντας στη σχέση $z^2=w+9i$, προκύπτει $\lambda=-3$.

Τότε $z=2+2i$ και $w=-i$.

1.110.α) Εστω $z=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$. Τότε:

$\bar{z}-iz^2=2i\Leftrightarrow x-yi-i(x+yi)^2=2i\Leftrightarrow x-yi-i\left(x^2-y^2+2xyi\right)=2i\Leftrightarrow$

$x-yi-\left(x^2-y^2\right)i-2xyi^2=2i\Leftrightarrow (x+2xy)-\left(x^2-y^2+y\right)i=2i\Leftrightarrow$

$\begin{cases} x+2xy=0 \\ -\left(x^2-y^2+y\right)=2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x(1+2y)=0 \\ x^2-y^2+y=-2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=0 \text{ ή } y=-\frac{1}{2} \\ x^2-y^2+y=-2 \end{cases}$

Αν $x=0$, τότε $-y^2+y=-2\Leftrightarrow y^2-y-2=0\Leftrightarrow y=-1$ ή $y=2$ οπότε

$z=x+yi=0-i=-i$ ή $z=2i$.

Αν $y=-\frac{1}{2}$, τότε $x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=-2\Leftrightarrow x^2=-2+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^2=-\frac{9}{4}$, αδύνατο.

β) Εστω $z=x+yi$. Τότε:

$z^2+2z=(x+yi)^2+2(x+yi)=x^2-y^2+2xyi+2x+2yi=\left(x^2-y^2+2x\right)+2(x+1)yi$

Είναι $\mathrm{Re}\left(z^2+2z\right)=x^2-y^2+2x$ και $\mathrm{Im}\left(z^2+2z\right)=2(x+1)y$.

Άρα $\begin{cases} \mathrm{Re}\left(z^2+2z\right)=-1 \\ \mathrm{Im}\left(z^2+2z\right)=2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2-y^2+2x=-1 \\ 2(x+1)y=2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2+2x+1=y^2 \\ (x+1)y=1 \end{cases}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}(x+1)^2=y^2\\(x+1)y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=\pm y\\(x+1)y=1\end{cases}\ (1)$$

- Αν $x+1=y$, τότε η (1) γίνεται $y\cdot y=1\Leftrightarrow y^2=1\Leftrightarrow y=\pm1$.
  Για $y=1$ είναι $x+1=1\Leftrightarrow x=0$ και $z=i$.
  Για $y=-1$ είναι $x+1=-1\Leftrightarrow x=-2$ και $z=-2-i$.
- Αν $x+1=-y$, τότε η (1) γίνεται $-y\cdot y=1\Leftrightarrow y^2=-1$, που είναι αδύνατο.

1.111.α) $3(z-i)+4(iz+1)=0\Leftrightarrow 3z-3i+4iz+4=0\Leftrightarrow(3+4i)z=-4+3i\Leftrightarrow z=\dfrac{-4+3i}{3+4i}=i$

β) Αν $z=x+yi$, τότε: $(1-i)^2(x+yi)-3=x-yi+2i\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{3},\ y=\dfrac{4}{3}$

γ) Αν $z=x+yi$, τότε:

$$z^2=\bar z\Leftrightarrow(x+yi)^2=x-yi\Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi=x-yi\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=x\\2xy=-y\end{cases}\Leftrightarrow$$

$\begin{cases}x^2-y^2=x\\y=0 \text{ ή } x=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$. Αν $y=0$, τότε $x^2=x\Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$, άρα $z=0$ ή $z=1$

Αν $x=-\dfrac{1}{2}$, τότε $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2-y^2=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow y^2=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow y=\pm\dfrac{\sqrt3}{2}$, άρα $z=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt3}{2}i$

1.112. Εστω $z=x+yi$, τότε: $(x+yi)^2+2(x-yi)^2+(x+yi)-(x-yi)+9=0\Leftrightarrow$

$$x^2+2xyi-y^2+2x^2-4xyi-2y^2+x+yi-x+yi+9=0\Leftrightarrow$$

$$(3x^2-3y^2+9)+(2y-2xy)i=0\Leftrightarrow\ldots z=1\pm i\sqrt2$$

1.113. Η άλλη ρίζα είναι το $\overline{2-i}=2+i$. Είναι $S=-\alpha\Leftrightarrow 2-i+2+i=-\alpha\Leftrightarrow\alpha=-4$ και $P=\beta\Leftrightarrow(2-i)(2+i)=\beta\Leftrightarrow\beta=4+1=5$

1.114.α) $\dfrac{z_2}{z_1}=\dfrac{3+4i}{1-2i}=\dfrac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=-1+2i$

β) $(-1+2i)^2+\alpha(-1+2i)+\beta=0\Leftrightarrow(\beta-\alpha-3)+2(\alpha-2)i=0\Leftrightarrow\beta-\alpha+3=0$ και $\alpha-2=0\Leftrightarrow\alpha=2$, οπότε $\beta=-1$

1.115. $\Delta=-4$, $z_1=1+i$, $z_1=1-i$

$$z_1^{\nu}+z_2^{\nu}=0\Leftrightarrow(1+i)^{\nu}+(1-i)^{\nu}=0\Leftrightarrow(-i^2+i)^{\nu}+(1-i)^{\nu}=0\Leftrightarrow\left[i(1-i)\right]^{\nu}+(1-i)^{\nu}=0\Leftrightarrow$$

$i^{\nu}(1-i)^{\nu}+(1-i)^{\nu}=0\Leftrightarrow(i^{\nu}+1)(1-i)^{\nu}=0\Leftrightarrow i^{\nu}=-1$ ή $(1-i)^{\nu}=0$ που είναι αδύνατο

$i^{\nu}=-1\Leftrightarrow\nu=4\kappa+2,\ \kappa\in\mathbb{N}$. Επειδή $\nu>0\Leftrightarrow 4\kappa+2>0\Leftrightarrow\kappa>-\dfrac{1}{2}$, άρα $\kappa_{min}=0$

και $\nu_{min}=2$

1.116.α) $f(x)=(3-5i)^x-(-5i^2+3i)^x=(3-5i)^x-i^x(3-5i)^x=(3-5i)^x\cdot(1-i^x)$

β) $f(2016)=(3-5i)^{2016}\cdot(1-i^{2016})=(3-5i)^{2016}\cdot(1-1)=0$.

γ) $f(4\kappa+1)=(3-5i)^{4\kappa+1}\cdot(1-i^{4\kappa+1})=(3-5i)^{4\kappa+1}\cdot(1-i)$ και

$f(-4\kappa-1)=(3-5i)^{-4\kappa-1}\cdot(1-i^{-4\kappa-1})=\dfrac{1}{(3-5i)^{4\kappa+1}}\cdot\left(1-\dfrac{1}{i}\right)=\dfrac{1}{(3-5i)^{4\kappa+1}}\cdot(1+i)$. Άρα:

$f(4\kappa+1)\cdot f(-4\kappa-1)=(3-5i)^{4\kappa+1}\cdot(1-i)\dfrac{1}{(3-5i)^{4\kappa+1}}(1+i)=(1-i)(1+i)=2\in\mathbb{R}$.

1.117.α) Είναι: $z=(y-xi)^\nu-(x+yi)^\nu=(y-xi)^\nu-(-xi^2+yi)^\nu=(y-xi)^\nu-[i(y-xi)]^\nu\Leftrightarrow$

$z=(y-xi)^\nu-i^\nu\cdot(y-xi)^\nu=(y-xi)^\nu\cdot(1-i^\nu)=w$.

β) $\underbrace{(y-xi)^\nu-(y+xi)^\nu}_{z=w}+(y-xi)^\nu\cdot(1+i^\nu)=18\Leftrightarrow$

$w+(y-xi)^\nu\cdot(1+i^\nu)=18\Leftrightarrow(y-xi)^\nu\cdot(1-i^\nu)+(y-xi)^\nu\cdot(1+i^\nu)=18\Leftrightarrow$

$2\cdot(y-xi)^\nu=32\Leftrightarrow(y-xi)^\nu=16\ \ (1)$

Οπότε και $(y-xi)^\nu=16\Leftrightarrow\overline{(y-xi)^\nu}=16\Leftrightarrow(y+xi)^\nu=16\ \ (2)$

Πολλαπλασιάζοντας τις (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει:

$(y-xi)^\nu\cdot(y+xi)^\nu=16\cdot16\Leftrightarrow[(y-xi)\cdot(y+xi)]^\nu=256\Leftrightarrow$

$(x^2+y^2)^\nu=256\Leftrightarrow 2^\nu=2^8\Leftrightarrow\nu=8$.

1.118.α) $z_1=2+3i=-2i^2+3i=i(3-2i)=i\cdot z_2\Leftrightarrow\dfrac{z_1}{z_2}=i$

β) $z_1^{2014}+z_2^{2014}=(iz_2)^{2014}+z_2^{2014}=i^{2014}\cdot z_2^{2014}+z_2^{2014}=$

$=i^{4\cdot503+2}\cdot z_2^{2014}+z_2^{2014}=-z_2^{2014}+z_2^{2014}=0$

γ) Επειδή $z_1=iz_2$, έχουμε: $w=\dfrac{\lambda\cdot iz_2-iz_2}{z_2-\lambda z_2}=\dfrac{iz_2\cdot(\lambda-1)}{-z_2(\lambda-1)}=-i$

1.119.α) $w\in\mathbb{R}\Leftrightarrow w=\overline{w}\Leftrightarrow\dfrac{z}{z^2+1}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z}^2+1}\Leftrightarrow z\overline{z}^2+z=\overline{z}z^2+\overline{z}\Leftrightarrow z\overline{z}^2+z-\overline{z}z^2-\overline{z}=0\Leftrightarrow$

$z\overline{z}(\overline{z}-z)-(\overline{z}-z)=0\Leftrightarrow(\overline{z}-z)(z\overline{z}-1)=0\Leftrightarrow z=\overline{z}$ ή $z\overline{z}=1\Leftrightarrow\overline{z}=\dfrac{1}{z}$

β) $\dfrac{z}{z^2+1}=\dfrac{\sqrt3}{3}\Leftrightarrow\sqrt3z^2-3z+\sqrt3=0\ \ \Delta=-3$ και $z_1=\dfrac{\sqrt3}{2}+\dfrac{1}{2}i$, $z_1=\dfrac{\sqrt3}{2}-\dfrac{1}{2}i$

γ) Από τους τύπους Viette είναι $z_1+z_2=-\dfrac{-3}{\sqrt3}=\sqrt3$ και $z_1z_2=\dfrac{\sqrt3}{\sqrt3}=1$.

Τότε $K = \dfrac{1^3 - i}{4 + \sqrt{3}^2} = \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{7}i$

1.120.α) Η εξίσωση $P(z) = 0$ είναι 2ου βαθμού με $\Delta = -4 < 0$, οπότε

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm i\sqrt{4}}{2} = -1 \pm i$$

$$z_1^{16} + z_2^{16} = (-1+i)^{16} + (-1-i)^{16} = \left[(-1+i)^2\right]^8 + \left[(-1-i)^2\right]^8 \Leftrightarrow$$

$$z_1^{8\kappa} + z_2^{8\kappa} = \left(\cancel{1} - 2i + \cancel{i^2}\right)^8 + \left(\cancel{1} + 2i + \cancel{i^2}\right)^8 = (-2i)^8 + (2i)^8 \Leftrightarrow$$

$$z_1^{8\kappa} + z_2^{8\kappa} = 2^8 i^8 + 2^8 i^8 = 2^8 + 2^8 = 2 \cdot 2^8 = 2^9$$

β) Εστω ότι ο $z_1 = -1 - i$ είναι ρίζα του $Q(z)$ (θα ήταν το ίδιο να επιλεγεί ως ρίζα του $Q(z)$, το z_2)

Τότε: $Q(-1-i) = 0 \Leftrightarrow (-1-i)^3 + \alpha(-1-i)^2 + \beta(-1-i) - 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0,\ \beta = -2$.

1.171.i) $|z_1| = |3 - i| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

ii) $|z_2| = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{12 + 16} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

iii) $|z_3| = |-2i| = |-2| \cdot |i| = 2 \cdot 1 = 2$

iv) $|z_4| = \left|\dfrac{2 - 3i}{2 + 3i}\right| = \dfrac{|2 - 3i|}{\left|\overline{2 - 3i}\right|} = \dfrac{|2 - 3i|}{|2 - 3i|} = 1$

v) $|z_5| = |(2+i)(3-i)| = |2+i| \cdot |3-i| = \sqrt{2^2 + 1^2}\sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}\sqrt{10} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

vi) $|z_6| = \left|(2-i)^6\right| = |2-i|^6 = \left(\sqrt{5}\right)^6 = 5^3 = 125$

vii) $|z_7| = \left|\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right|^{12} \cdot \left|\dfrac{\sqrt{8}+i}{3}\right|^5 = \left(\sqrt{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right)^{12} \cdot \left(\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{8}}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2}\right)^5 \Leftrightarrow$

$$|z_7| = \left(\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}\right)^{12} \cdot \left(\sqrt{\frac{8}{9} + \frac{1}{9}}\right)^5 = 1^{12} \cdot 1^5 = 1$$

1.172. $|z| = |-\bar{z}| - z + |3 + 4i|\,i \Leftrightarrow \cancel{|z|} = \cancel{|z|} - z + \sqrt{3^2 + 4^2}\,i \Leftrightarrow z = 5i$ και $|z| = 5$.

1.173. $5wz + 16 = 8\bar{z} - 10w \Leftrightarrow 5(z+2)w = 8(\bar{z} - 2)$, άρα

$5|z+2||w| = 8|\bar{z} - 2| \Leftrightarrow 10|\bar{w}| = 8|z - 2| \Leftrightarrow 10|\bar{w}| = 160 \Leftrightarrow |\bar{w}| = 16$.

1.174. $z - 12 = \left(\sqrt{3}z + 16\right)i \Leftrightarrow z\left(1 - i\sqrt{3}\right) = 12 + 16i \Leftrightarrow z = \dfrac{12 + 16i}{1 - i\sqrt{3}}$ και

$$|z|=\frac{|12+16i|}{\left|1-i\sqrt{3}\right|}=\frac{20}{2}=10\,.$$

1.175. Αν $z=\alpha+\beta i$ τότε $|z|^2=\alpha^2+\beta^2$. Οπότε:

$$|z|=|\alpha+\beta i|=\frac{|3+2i|^{18}}{\left|\sqrt{12}+i\right|^{18}}\left|\sqrt{5}-i\right|\cdot\left|1+i\sqrt{5}\right|=\frac{\left(\sqrt{13}\right)^{18}}{\left(\sqrt{13}\right)^{18}}\cdot\sqrt{5+1}\sqrt{1+5}=\sqrt{6}\sqrt{6}=6$$

τότε θα ισχύει $\alpha^2+\beta^2=|z|^2=6^2=36$.

1.176. **α)** $z=\dfrac{-1+i}{(-1+i)^2-1+i+1}=\dfrac{-1+i}{1-2i+i^2+i}=\dfrac{-1+i}{-i}=\dfrac{(-1+i)i}{-i^2}=-1-i\,,\ |z|=\sqrt{2}$

$$\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\ \left|z^8\right|=|z|^8=\left(\sqrt{2}\right)^8=2^4=16$$

β) $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\bar{z}\Leftrightarrow\dfrac{w}{w^2+w+1}=\dfrac{\bar{w}}{\bar{w}^2+\bar{w}+1}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow$ ισχύει

1.177. Είναι $(1-i)^6=\left[(1-i)^2\right]^3=\left(1+i^2-2i\right)^3=(-2i)^3=-8i^3=8i$, οπότε:

$$|6+8i|^{\nu}-82=10^{\nu-1}-(1-i)^6 i\Leftrightarrow\left(\sqrt{8^2+6^2}\right)^{\nu}-82=10^{\nu-1}-8i\cdot i\Leftrightarrow$$

$$10^{\nu}-82=10^{\nu-1}-8i^2\Leftrightarrow 10^{\nu}-\frac{10^{\nu}}{10}=90\Leftrightarrow\frac{9\cdot 10^{\nu}}{10}=90\Leftrightarrow$$

$$9\cdot 10^{\nu}=900\Leftrightarrow 10^{\nu}=100=10^2\Leftrightarrow\nu=2\,.$$

1.178. $|z+w|^2=(z+w)(\bar{z}+\bar{w})=z\bar{z}+z\bar{w}+\bar{z}w+w\bar{w}=|z|^2+\left(z\bar{w}+\overline{z\bar{w}}\right)+|w|^2$

$$=|z|^2+|w|^2+2\mathrm{Re}(z\bar{w})$$

1.179. $|2z_1-z_2|^2-2|z_1-z_2|^2=(2z_1-z_2)(2\bar{z}_1-\bar{z}_2)-2(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$

$$=2z_1\bar{z}_1-\cancel{2z_1\bar{z}_2}-\cancel{2\bar{z}_1z_2}+z_2\bar{z}_2-2z_1\bar{z}_1+\cancel{2z_1\bar{z}_2}+\cancel{2\bar{z}_1z_2}-2\bar{z}_2z_2$$

$$=2|z_1|^2-|z_2|^2$$

1.180. $|\bar{z}_1-z_2|^2-\left(|z_1|-|z_2|\right)^2=(\bar{z}_1-z_2)(z_1-\bar{z}_2)-\left(|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1||z_2|\right)=$

$$=(\bar{z}_1-z_2)(z_1-\bar{z}_2)-|z_1|^2-|z_2|^2+2|z_1||z_2|$$

$$=-\left(z_1z_2+\overline{z_1z_2}\right)+2|z_1z_2|=-2\mathrm{Re}(z_1z_2)+2|z_1z_2|$$

$$=2|z_1z_2|-2\mathrm{Re}(z_1z_2)\,.$$

1.181. Αρκεί να δείξουμε ότι $\mathrm{Im}(z)=0 \Leftrightarrow \frac{z-\bar z}{2i}=0 \Leftrightarrow \bar z = z$.

Είναι: $\left|\frac{2+iz}{2-iz}\right|=1 \Leftrightarrow \frac{|2+iz|}{|2-iz|}=1 \Leftrightarrow |2+iz|=|2-iz| \Leftrightarrow |2+iz|^2=|2-iz|^2 \Leftrightarrow$

$(2+iz)(2-i\bar z)=(2-iz)(2+i\bar z) \Leftrightarrow 4-2i\bar z+2iz+z\bar z=4+2i\bar z-2iz+z\bar z \Leftrightarrow$

$4iz-4i\bar z=0 \Leftrightarrow 4i(z-\bar z)=0 \Leftrightarrow z=\bar z \Leftrightarrow z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)=0$.

1.182. $\left|\frac{iz-1}{iz+1}\right|=1 \Leftrightarrow |iz-1|^2=|iz+1|^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow z=\bar z$

1.183. Είναι $\mathrm{Re}(z^2)=\frac{z^2+\bar z^2}{2}$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι: $\frac{z^2+\bar z^2}{2}=3 \Leftrightarrow z^2+\bar z^2=6$.

Εχουμε: $|z^2-1|=|z^2-5| \Leftrightarrow |z^2-1|^2=|z^2-5|^2 \Leftrightarrow$

$(z^2-1)(\bar z^2-1)=(z^2-5)(\bar z^2-5) \Leftrightarrow z^2\bar z^2-z^2-\bar z^2+1=z^2\bar z^2-5z^2-5\bar z^2+25 \Leftrightarrow$

$4z^2+4\bar z^2=24 \Leftrightarrow z^2+\bar z^2=6 \Leftrightarrow \frac{z^2+\bar z^2}{2}=3 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z^2)=3$

1.184. $w\in I \Leftrightarrow \bar w=-w \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}=-\frac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow \frac{\bar z-1}{\bar z+1}=-\frac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow$

$(\bar z-1)(z+1)=-(\bar z+1)(z-1) \Leftrightarrow z\bar z+\cancel{\bar z}-\cancel{z}-1=-z\bar z+\cancel{\bar z}-\cancel{z}+1 \Leftrightarrow 2z\bar z=2 \Leftrightarrow$

$|z|^2=1 \Leftrightarrow |z|=1$

1.185. $w=\frac{2-z}{3z+1} \Leftrightarrow 3wz+w=2-z \Leftrightarrow (3w+1)z=2-w \Leftrightarrow z=\frac{2-w}{3w+1}$. Τότε:

$\left|z+\frac{1}{3}\right|=5 \Leftrightarrow \left|\frac{2-w}{3w+1}+\frac{1}{3}\right|=5 \Leftrightarrow \left|\frac{6-3w+3w+1}{3(3w+1)}\right|=5 \Leftrightarrow \frac{5}{3|3w+1|}=5 \Leftrightarrow$

$3|3w+1|=1 \Leftrightarrow |3w+1|=\frac{1}{3}$.

1.186. $|z-12|=3|z-4| \Leftrightarrow |z-12|^2=9|z-4|^2 \Leftrightarrow$

$(z-12)(\bar z-12)=9(z-4)(\bar z-4) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow |z|^2-3z-3\bar z=0$

$|z-3|=3 \Leftrightarrow |z-3|^2=9 \Leftrightarrow (z-3)(\bar z-3)=9 \Leftrightarrow |z|^2-3z-3\bar z=0$

1.187. Είναι $|5w-2|=\left|5\frac{1-2z}{5z-2}-\frac{\overset{5z-2}{\breve{2}}}{1}\right|=\left|\frac{5-10z-10z+4}{5z-2}\right|=\left|\frac{1}{5z-2}\right|=\frac{1}{|5z-2|}=\frac{1}{1}=1$

1.188. $2|z|=|z-3| \Leftrightarrow 4|z|^2=|z-3|^2 \Leftrightarrow 4z\bar z=(z-3)(\bar z-3) \Leftrightarrow 4z\bar z=z\bar z-3z-3\bar z+9 \Leftrightarrow$

$3z\bar z+3z+3z-9=0 \overset{:3}{\Leftrightarrow} z\bar z+z+\bar z-3=0 \quad (1)$

$|z+1|=2 \Leftrightarrow |z+1|^2=4 \Leftrightarrow (z+1)(\bar{z}+1)=4 \Leftrightarrow$
$z\bar{z}+z+\bar{z}+1=4 \Leftrightarrow z\bar{z}+z+\bar{z}-3=0$ ισχύει λόγω της (1).

1.189. $|z-4i|=2|z+i| \Leftrightarrow |z-4i|^2=4|z+i|^2 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow 3|z|^2-8iz+8i\bar{z}-12=0$

$|3z+8i|=10 \Leftrightarrow |3z+8i|^2=100 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow 3|z|^2-8iz+8i\bar{z}-12=0$

1.190. $w+\frac{1}{w}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow w+\frac{1}{w}=\bar{w}+\frac{1}{\bar{w}} \Leftrightarrow ww\bar{w}+\bar{w}=w\bar{w}\bar{w}+w \Leftrightarrow$

$w|w|^2+\bar{w}-\bar{w}|w|^2-w=0 \Leftrightarrow \left(|w|^2-1\right)(w-\bar{w})=0 \Leftrightarrow |w|=1$ ή $w=\bar{w} \Leftrightarrow w\in\mathbb{R}$

1.191. $w\in\mathbb{R} \Leftrightarrow w=\bar{w} \Leftrightarrow \frac{i(z_1+z_2)}{z_1-z_2}=\frac{-i(\bar{z}_1+\bar{z}_2)}{\bar{z}_1-\bar{z}_2} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow |z_1|=|z_2|$

1.192. **α)** $w\in I \Leftrightarrow w=-\bar{w} \Leftrightarrow \frac{z-xi}{iz-x}=-\frac{\bar{z}+xi}{-i\bar{z}-x} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow z=-\bar{z} \Leftrightarrow z\in I$

β) $|w|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-xi}{iz-x}\right|=1 \Leftrightarrow |z+xi|^2=|iz-x|^2 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow z=\bar{z} \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$

1.193. **α)** Ο w είναι φανταστικός αν και μόνο αν

$w=-\bar{w} \Leftrightarrow \frac{z+\alpha i}{iz+\alpha}=-\overline{\left(\frac{z+\alpha i}{iz+\alpha}\right)} \Leftrightarrow \frac{z+\alpha i}{iz+\alpha}=-\frac{\bar{z}-\alpha i}{-i\bar{z}+\alpha} \Leftrightarrow$

$(z+\alpha i)(i\bar{z}+\alpha)=-(\bar{z}-\alpha i)(iz+\alpha) \Leftrightarrow -iz\bar{z}+\alpha z+\alpha\bar{z}+\alpha^2\cdot i=iz\bar{z}-\alpha\bar{z}-\alpha z+\alpha^2\cdot i \Leftrightarrow$

$2\alpha z=-2\alpha\bar{z} \Leftrightarrow z=-\bar{z} \Leftrightarrow z\in I$

β) $|w|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{z+\alpha i}{iz+\alpha}\right|=1 \Leftrightarrow \frac{|z+\alpha i|}{|iz+\alpha|}=1 \Leftrightarrow |z+\alpha i|=|iz+\alpha| \Leftrightarrow |z+\alpha i|^2=|iz+\alpha|^2 \Leftrightarrow$

$(z+\alpha i)\overline{(z+\alpha i)}=(iz+\alpha)\overline{(iz+\alpha)} \Leftrightarrow (z+\alpha i)(\bar{z}-\alpha i)=(iz+\alpha)(-i\bar{z}+\alpha) \Leftrightarrow$

$z\bar{z}-\alpha zi+\alpha i\bar{z}+\alpha^2=z\bar{z}+\alpha iz-\alpha i\bar{z}+\alpha^2 \Leftrightarrow -2\alpha zi=-2\alpha\bar{z}i \Leftrightarrow z=\bar{z} \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$

1.194. $|z-w|^2=|z+w|^2 \Leftrightarrow (z-w)(\bar{z}-\bar{w})=(z+w)(\bar{z}+\bar{w}) \Leftrightarrow$

$z\bar{w}=-\bar{z}w \Leftrightarrow \frac{z}{w}=-\frac{\bar{z}}{\bar{w}} \Leftrightarrow \frac{z}{w}\in I$

1.195. Πρέπει $z-|z|\neq 0 \Leftrightarrow |z|\neq z \;\; (1)$

$w\in\mathbb{R} \Leftrightarrow w=\bar{w} \Leftrightarrow \frac{z+2|z|}{z-|z|}=\frac{\bar{z}+2|z|}{\bar{z}-|z|} \Leftrightarrow$

$\cancel{z\bar{z}}-z|z|+2\bar{z}|z|-\cancel{2|z|^2}=\cancel{z\bar{z}}+2z|z|-\bar{z}|z|-\cancel{2|z|^2} \Leftrightarrow 3\bar{z}|z|-3z|z|=0 \Leftrightarrow$

$3|z|(\bar{z}-z)=0 \overset{|z|\neq 0}{\Leftrightarrow} z=\bar{z} \Leftrightarrow z=x\in\mathbb{R}$. Τότε $(1)\Rightarrow |x|\neq x \Leftrightarrow x<0$

1.196. $|z-w|=|1-z\bar{w}| \Leftrightarrow |z-w|^2=|1-z\bar{w}|^2 \Leftrightarrow (z-w)(\bar{z}-\bar{w})=(1-z\bar{w})(1-\bar{z}w) \Leftrightarrow$

$z\bar{z}-\cancel{z\bar{w}}-\cancel{\bar{z}w}+w\bar{w}=1-\cancel{z\bar{w}}-\cancel{\bar{z}w}+z\bar{w}\bar{z}w \Leftrightarrow$

$|z|^2+|w|^2-1-|z|^2|w|^2=0 \Leftrightarrow \left(1-|w|^2\right)\left(|z|^2-1\right)=0 \Leftrightarrow |z|=1$ ή $|w|=1$

1.197. $w^2+w+1=0 \Leftrightarrow (w-1)\left(w^2+w+1\right)=0 \Leftrightarrow w^3-1=0 \Leftrightarrow w^3=1$, άρα και

$|w|^3=1 \Leftrightarrow |w|=1,\ w^2+w+1=0 \Leftrightarrow w+1=-w^2$ και $|w+1|=\left|-w^2\right|=|w|^2=1.$

Αντίστροφα

$|w+1|^2=1 \Leftrightarrow (w+1)(\bar{w}+1)=1 \Leftrightarrow |w|^2+w+\bar{w}+1=1 \Leftrightarrow 1+w+\dfrac{1}{w}=0 \Leftrightarrow w^2+w+1=0$

1.198. $\left(\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}\right)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}=\overline{\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}} \Leftrightarrow \dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}+\dfrac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} \Leftrightarrow$

$z_1z_2\bar{z}_1\bar{z}_2\dfrac{z_1}{z_2}+z_1z_2\bar{z}_1\bar{z}_2\dfrac{z_2}{z_1}=z_1z_2\bar{z}_1\bar{z}_2\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}+z_1z_2\bar{z}_1\bar{z}_2\dfrac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} \Leftrightarrow$

$|z_1|^2z_1\bar{z}_2+|z_2|^2\bar{z}_1z_2=|z_1|^2\bar{z}_1z_2+|z_2|^2z_1\bar{z}_2 \Leftrightarrow |z_1|^2z_1\bar{z}_2+|z_2|^2\bar{z}_1z_2-|z_1|^2\bar{z}_1z_2-|z_2|^2z_1\bar{z}_2=0 \Leftrightarrow$

$|z_1|^2(z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2)-|z_2|^2(z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2)=0 \Leftrightarrow (z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2)\left(|z_1|^2-|z_2|^2\right)=0 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2=0 \Leftrightarrow$

$z_1\bar{z}_2=\bar{z}_1z_2 \Leftrightarrow \dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \Leftrightarrow \dfrac{z_1}{z_2}\in\mathbb{R}$ ή $|z_1|^2=|z_2|^2 \Leftrightarrow |z_1|=|z_2|$

1.199. $|z_1|=2 \Leftrightarrow |z_1|^2=4 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1=4 \Leftrightarrow \bar{z}_1=\dfrac{4}{z_1}$ και όμοια $\bar{z}_2=\dfrac{4}{z_2}$.

$2|z_3|=2 \Leftrightarrow |z_3|=1 \Leftrightarrow |z_3|^2=1 \Leftrightarrow z_3\bar{z}_3=1 \Leftrightarrow \bar{z}_3=\dfrac{1}{z_3}$. Είναι:

$|z_1+z_2+z_3|=|\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3|=\left|\dfrac{4}{z_1}+\dfrac{4}{z_2}+\dfrac{1}{z_3}\right|=\left|\dfrac{4z_2z_3+4z_1z_3+z_1z_2}{z_1z_2z_3}\right|=\dfrac{|4z_2z_3+4z_1z_3+z_1z_2|}{|z_1||z_2||z_3|} \Leftrightarrow$

$|z_1+z_2+z_3|=\dfrac{|4z_2z_3+4z_1z_3+z_1z_2|}{2\cdot 2\cdot 1}=\dfrac{1}{4}|4z_2z_3+4z_1z_3+z_1z_2|$

1.200. $|z_1|=|z_2|=1 \Leftrightarrow \bar{z}_1=\dfrac{1}{z_1}$ και $\bar{z}_2=\dfrac{1}{z_2}$

$|z_1+z_2+2014z_1z_2-1|=|\bar{z}_1+\bar{z}_2+2014\bar{z}_1\bar{z}_2-1|=\left|\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}+2014\dfrac{1}{z_1}\dfrac{1}{z_2}-1\right|=$

$\left|\dfrac{z_1+z_2-z_1z_2+2014}{z_1z_2}\right|=\dfrac{|z_1+z_2-z_1z_2+2014|}{|z_1||z_2|}=|z_1+z_2-z_1z_2+2014|$

1.201. Είναι $|z_1|=1\Leftrightarrow |z_1|^2=1\Leftrightarrow z_1\bar{z}_1=1\Leftrightarrow \bar{z}_1=\dfrac{1}{z_1}$,

$|z_2|=3\Leftrightarrow |z_2|^2=9\Leftrightarrow z_2\bar{z}_2=9\Leftrightarrow \bar{z}_2=\dfrac{9}{z_2}$

και $|z_3|=5\Leftrightarrow |z_3|^2=25\Leftrightarrow z_3\bar{z}_3=25\Leftrightarrow \bar{z}_3=\dfrac{25}{z_3}$, οπότε

$$|z_1+z_2+z_3|=|\overline{z_1+z_2+z_3}|=|\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3|=\left|\frac{1}{z_1}+\frac{9}{z_2}+\frac{25}{z_3}\right|=\left|\frac{z_2z_3+9z_1z_3+25z_1z_2}{z_1z_2z_3}\right|=$$

$$=\frac{|z_2z_3+9z_1z_3+25z_1z_2|}{|z_1|\cdot|z_2|\cdot|z_3|}=\frac{|z_2z_3+9z_1z_3+25z_1z_2|}{1\cdot3\cdot5}=\frac{1}{15}|z_2z_3+9z_1z_3+25z_1z_2|$$

1.202. $|z_1|=|z_2|=|z_2|=1\Leftrightarrow |z_1|=1\Leftrightarrow \bar{z}_1=\dfrac{1}{z_1},\ \bar{z}_2=\dfrac{1}{z_2},\ \bar{z}_3=\dfrac{1}{z_3}$

α) $|z_1+z_2+z_3|=|\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3|=\left|\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_3}\right|=\left|\dfrac{z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3}{z_1z_2z_3}\right|=$

$$\frac{|z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3|}{|z_1||z_2||z_3|}=|z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3|$$

β) $\bar{w}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}+\dfrac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}=\dfrac{\frac{1}{z_1}}{\frac{1}{z_2}}+\dfrac{\frac{1}{z_2}}{\frac{1}{z_1}}=\dfrac{z_2}{z_1}+\dfrac{z_1}{z_2}=w\Leftrightarrow w\in\mathbb{R}$

1.203.α) Αν $z_1+z_2+z_3=0\Leftrightarrow z_2+z_3=-z_1$, τότε $|z_2+z_3|=|-z_1|=|z_1|=\lambda$

Όμως $|z_2+z_3|\le|z_2|+|z_3|=\dfrac{\lambda}{2}+\dfrac{\lambda}{3}=\dfrac{5\lambda}{6}\Leftrightarrow \lambda\le\dfrac{5\lambda}{6}$ που είναι αδύνατο.

β) $|z_1|=\lambda\Leftrightarrow \bar{z}_1=\dfrac{\lambda^2}{2z_1}$, $|z_2|=\dfrac{\lambda}{2}\Leftrightarrow \bar{z}_1=\dfrac{\lambda^2}{4z_2}$ και $|z_3|=\dfrac{\lambda}{3}\Leftrightarrow \bar{z}_3=\dfrac{\lambda^2}{9z_3}$

$$|z_1+z_2+z_3|=|\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3|=\left|\frac{\lambda^2}{2z_1}+\frac{\lambda^2}{4z_2}+\frac{\lambda^2}{9z_3}\right|=\lambda^2\left|\frac{36z_2z_3+9z_1z_3+4z_1z_2}{36z_1z_2z_3}\right|=$$

$$\lambda^2\frac{|36z_2z_3+9z_1z_3+4z_1z_2|}{36\lambda\cdot\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{\lambda}{3}}=\frac{6}{\lambda}|36z_2z_3+9z_1z_3+4z_1z_2|\Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{36z_2z_3+9z_1z_3+4z_1z_2}{z_1+z_2+z_3}\right|=6\lambda$$

1.204. Επειδή $|z|=|w|=1$,έχουμε

$|z|^2=1\Leftrightarrow z\bar{z}=1\Leftrightarrow \bar{z}=\dfrac{1}{z}$ και $|w|^2=1\Leftrightarrow w\bar{w}=1\Leftrightarrow \bar{w}=\dfrac{1}{w}$.

Είναι $\overline{z_1} = \bar{z} + \bar{w} + \kappa \bar{z}\bar{w} - 1 = \frac{1}{z} + \frac{1}{w} + \kappa \frac{1}{z}\frac{1}{w} - 1 = \frac{w + z + \kappa - zw}{zw} \Leftrightarrow \overline{z_1} = \frac{z_2}{zw}$,

άρα $|z_1| = |\overline{z_1}| = \left|\frac{z_2}{zw}\right| = \frac{|z_2|}{|z|\cdot|w|} = \frac{|z_2|}{1\cdot 1} \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

1.205. $|z_1| = |z_2| = \frac{|z_3|}{2} = 1 \Leftrightarrow \overline{z_1} = \frac{1}{z_1},\ \overline{z_2} = \frac{1}{z_2},\ \overline{z_3} = \frac{4}{z_3}$

$$2z_1 + 2z_2 + z_3 = 4 \Leftrightarrow 2\overline{z_1} + 2\overline{z_2} + \overline{z_3} = 4 \Leftrightarrow 2\frac{1}{z_1} + 2\frac{1}{z_2} + \frac{4}{z_3} = 4 \Leftrightarrow$$

$$2z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 4$$

1.206. $|z| = |w| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z},\ \bar{w} = \frac{1}{w}$

$$z + 3w - 1 = 0 \Leftrightarrow \overline{z + 3w - 1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{z} + \frac{3}{w} - 1 = 0 \Leftrightarrow w + 3z - zw = 0$$

1.207. $\overline{z_1} = \frac{1}{z_1},\ \overline{z_2} = \frac{1}{z_2}$

α) $$\bar{w} = \left(\frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{\overline{z_1} - \overline{z_2}}\right)^{2\kappa} = \left(\frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}}{\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}}\right)^{2\kappa} = \left(\frac{\frac{z_2 + z_1}{\cancel{z_1z_2}}}{\frac{z_2 - z_1}{\cancel{z_1z_2}}}\right)^{2\kappa} = \left(\frac{z_2 + z_1}{z_2 - z_1}\right)^{2\kappa}$$

$$= \left(-\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}\right)^{2\kappa} = \left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}\right)^{2\kappa}$$

β) $\bar{u} = \left(\frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{\overline{z_1} - \overline{z_2}}\right)^{2\kappa + 1} = \ldots = -u \Leftrightarrow u \in I$

1.208. $\left|(z - \alpha)^{\nu}\right| = \left|(z + \alpha)^{\nu}\right| \Leftrightarrow |z - \alpha|^{\nu} = |z + \alpha|^{\nu} \Leftrightarrow |z - \alpha| = |z + \alpha| \Leftrightarrow$

$$|z - \alpha|^2 = |z + \alpha|^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \bar{z} = -z$$

1.209. $\left(\frac{z + 1}{2z + 5}\right)^{\nu} = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z + 1}{2z + 5}\right|^{\nu} = 1 \Leftrightarrow \frac{|z + 1|}{|2z + 5|} = 1 \Leftrightarrow |z + 1|^2 = |2z + 5|^2 \Leftrightarrow \ldots$

1.210. $|z_1 + z_2| = |z_1| = |z_2| = 1 \Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 = 1 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = 1 \Leftrightarrow$

$$|z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + |z_2|^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$1 + z_1\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_1}z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1z_2 + z_1^2 + z_2^2 = 0 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)(z_1z_2 + z_1^2 + z_2^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$z_1^3 - z_2^3 = 0 \Leftrightarrow z_1^3 = z_2^3$$

$z_1^{252} = z_2^{252} \Leftrightarrow \left(z_1^3\right)^{84} = \left(z_2^3\right)^{84}$ ισχύει

1.211. **α)** $\alpha+\beta=-\gamma \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2=(-\gamma)^2 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=\gamma^2 \Leftrightarrow -\gamma^2+2\alpha\beta=\gamma^2 \Leftrightarrow$

$2\alpha\beta=2\gamma^2 \Leftrightarrow \alpha\beta=\gamma^2$ και $|\alpha\beta|=|\gamma^2| \Leftrightarrow |\alpha||\beta||\gamma|=|\gamma|^3$ (1)

Όμοια $|\alpha||\beta||\gamma|=|\beta|^3$ και $|\alpha||\beta||\gamma|=|\alpha|^3$, άρα $|\alpha|^3=|\beta|^3=|\gamma|^3 \Leftrightarrow |\alpha|=|\beta|=|\gamma|$

β) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \Leftrightarrow 2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha=0 \Leftrightarrow$

$(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0$

Οι μιγαδικοί $\alpha-\beta, \beta-\gamma, \gamma-\alpha$ ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του προηγούμενου σκέλους, οπότε $|\alpha-\beta|=|\beta-\gamma|=|\gamma-\alpha|$.

1.212. $|z-2|<|z+2| \Leftrightarrow |z-2|^2<|z+2|^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow z+\bar{z}>0 \Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z)>0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)>0$

1.213. $|1-z|>|z| \Leftrightarrow |1-z|^2>|z|^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow z+\bar{z}<1 \Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z)<1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)<\dfrac{1}{2}$

1.214. $\left(1+|z|^2\right)\left(1+|w|^2\right) \geq |z-w|^2 \Leftrightarrow 1+|w|^2+|z|^2+|z|^2|w|^2 \geq (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) \Leftrightarrow$

$1+\cancel{|w|^2}+\cancel{|z|^2}+|z|^2|w|^2 \geq \cancel{|z|^2}-z\bar{w}-\bar{z}w+\cancel{|w|^2} \Leftrightarrow$

$1+z\bar{z}w\bar{w}+z\bar{w}+\bar{z}w \geq 0 \Leftrightarrow z\bar{w}(\bar{z}w+1)+(\bar{z}w+1) \geq 0 \Leftrightarrow (\bar{z}w+1)(z\bar{w}+1) \geq 0 \Leftrightarrow$

$(\bar{z}w+1)\overline{(\bar{z}w+1)} \geq 0 \Leftrightarrow |\bar{z}w+1|^2 \geq 0$ ισχύει.

1.215. $|2z-5|^2 \leq |6z-5|^2 \Leftrightarrow (2z-5)(2\bar{z}-5) \leq (6z-5)(6\bar{z}-5) \Leftrightarrow$

$4z\bar{z}-10z-10\bar{z}+\cancel{25} \leq 36z\bar{z}-30z-30\bar{z}+\cancel{25} \Leftrightarrow$

$32z\bar{z}-20z-20\bar{z} \geq 0 \Leftrightarrow 8|z|^2-5(z+\bar{z}) \geq 0$.

Αν $z=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$, τότε: $8\left(x^2+y^2\right)-5\cdot 2x \geq 0 \Leftrightarrow 8x^2-10x+8y^2 \geq 0$.

Επειδή η προηγούμενη ισχύει για κάθε x, y, είναι $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow$

$100-256y^2 \leq 0 \Leftrightarrow y^2 \geq \dfrac{25}{64} \Leftrightarrow |y| \geq \dfrac{5}{8}$

1.216. $|2z+\bar{w}|^2>|2+zw|^2 \Leftrightarrow (2z+\bar{w})(2\bar{z}+w)>(2+zw)(2+\bar{z}\bar{w}) \Leftrightarrow$

$4|z|^2+\cancel{2zw}+\cancel{2\bar{z}\bar{w}}+|w|^2>4+\cancel{2\bar{z}\bar{w}}+\cancel{2zw}+|z|^2|w|^2 \Leftrightarrow$

$4|z|^2+|w|^2-4-|z|^2|w|^2>0 \Leftrightarrow \left(4-|w|^2\right)\left(|z|^2-1\right)>0$ που ισχύει αφού $|z|<1$ και $|w|>2$

1.217. $9|z-w|^2<|\bar{z}w-9|^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left(|z|^2-9\right)\left(9-|w|^2\right)<0$ ισχύει αφού $|z|<3$ και $|w|<3$

1.218. $|z_1-z_2|<|1-\bar{z}_1z_2| \Leftrightarrow |z_1-z_2|^2<|1-\bar{z}_1z_2|^2 \Leftrightarrow$

$(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)<(1-\bar{z}_1z_2)(1-z_1\bar{z}_2)\Leftrightarrow$

$z_1\bar{z}_1-z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2+z_2\bar{z}_2<1-z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2+z_1\bar{z}_1z_2\bar{z}_2 \Leftrightarrow 1+z_1\bar{z}_1z_2\bar{z}_2-z_1\bar{z}_1-z_2\bar{z}_2>0\Leftrightarrow$

$1+|z_1|^2|z_2|^2-|z_1|^2-|z_2|^2>0\Leftrightarrow 1-|z_1|^2-|z_2|^2\left(1-|z_1|^2\right)>0\Leftrightarrow$

$\left(1-|z_1|^2\right)\left(1-|z_2|^2\right)>0$,που ισχύει, καθώς από την υπόθεση έχουμε ότι:

$|z_1|<1\Leftrightarrow|z_1|^2<1\Leftrightarrow 1-|z_1|^2>0$ και όμοια $1-|z_2|^2>0$.

1.219. **α)** $w=z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2}=2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$

β) $|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2\geq 0\Leftrightarrow z_1\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2+z_2\bar{z}_2\geq 0\Leftrightarrow$

$z_1(\bar{z}_1+\bar{z}_2)+z_2(\bar{z}_1+\bar{z}_2)\geq 0\Leftrightarrow (\bar{z}_1+\bar{z}_2)(z_1+z_2)\geq 0\Leftrightarrow|z_1+z_2|^2\geq 0$

1.220. $w\bar{z}+z\bar{w}\leq|w|^2+|z|^2\Leftrightarrow w\bar{z}+z\bar{w}-w\bar{w}-z\bar{z}\leq 0\Leftrightarrow \bar{z}(w-z)-\bar{w}(w-z)\leq 0\Leftrightarrow$

$-(w-z)(\bar{w}-\bar{z})\leq 0\Leftrightarrow|w-z|^2\geq 0$ ισχύει

1.221. $\Delta=4|z_1-z_2|^2-4\left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)=4\left[(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)-1-|z_1|^2-|z_1|^2-|z_1|^2|z_2|^2\right]$

$\Delta=-4|\bar{z}_1z_2+1|^2\leq 0$

1.222. $\Delta=16|z|^2+16\left[|w|^2+(z\bar{w}+\bar{z}w)\right]=16(z\bar{z}+w\bar{w}+z\bar{w}+\bar{z}w)=$

$16\left[z(\bar{z}+\bar{w})+w(\bar{z}+\bar{w})\right]=16|z+w|^2\geq 0$

1.223. $\left(|z|+|z+1|\right)^2\leq\left(|z-1|+|z+2|\right)^2\Leftrightarrow$

$|z|^2+2|z||z+1|+|z+1|^2\leq|z-1|^2+2|z-1||z+2|+|z+2|^2\Leftrightarrow ....\Leftrightarrow$

$|z^2+z|\leq|z^2+z-2|+2$ που ισχύει από τη τριγωνική ανισότητα.

1.224. $\big||z_1|-|z_2|\big|\leq|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|\Leftrightarrow|5-15|\leq|z_1+z_2|\leq 5+15\Leftrightarrow 10\leq|z_1+z_2|\leq 20$

1.225. $\left|\left(\sqrt{3}-i\right)z^2+iz\right|\leq\left|\left(\sqrt{3}-i\right)z^2\right|+|iz|=\left|\sqrt{3}-i\right||z|^2+|z|=2|z|^2+|z|<2\frac{1}{16}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$

1.226. $|z\sigma\upsilon\nu\theta-w^2\eta\mu\theta|\leq|z\sigma\upsilon\nu\theta|+|w^2\eta\mu\theta|=|z||\sigma\upsilon\nu\theta|+|w|^2|\eta\mu\theta|\leq|z|+|w|^2\leq 3+4=7$

1.227. Είναι $z^3+\bar{z}^3=128$, οπότε $|z^3+\bar{z}^3|=|128|=128$.

Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε $|z^3+\bar{z}^3|\leq|z|^3+|\bar{z}|^3=2|z|^3\quad(|\bar{z}|=|z|)$, οπότε

$128\leq 2|z|^3\Leftrightarrow 64\leq|z|^3\Leftrightarrow|z|\geq 4$.

1.228. Εστω $|z|\le 1$. Από τη σχέση $z^5-5z+10=0$ έχουμε $10=5z-z^5$

$|10|=|5z-z^5|\le|5z|+|z^5|=5|z|+|z|^5\le 5\cdot 1+1^5=6$ που είναι άτοπο.

Άρα $|z|>1$.

1.229. $|32i|=\left|\frac{1}{\overline{z}^2}-\frac{1}{z^2}\right|\le\left|\frac{1}{\overline{z}^2}\right|+\left|\frac{1}{z^2}\right|=\left|\frac{1}{z^2}\right|+\left|\frac{1}{z^2}\right|=\frac{2}{|z|^2}\Leftrightarrow 32\le\frac{2}{|z|^2}\Leftrightarrow$

$32|z|^2\le 2\Leftrightarrow|z|^2\le\frac{1}{16}\Leftrightarrow|z|\le\frac{1}{4}$

1.230. $|w^2+w|+|w^2+1|+4|w+1|\ge\left|w^2+w-\left(w^2+1\right)\right|+4|w+1|=|w-1|+4|w+1|\Leftrightarrow$

$|w^2+w|+|w^2+1|+4|w+1|\ge|w-1|+|w+1|\ge\left|w-1-\left(w+1\right)\right|=\left|\cancel{w}-1-\cancel{w}-1\right|=2$

1.231. **1^{ος} τρόπος:**

Είναι $|z-2w|=|z+6i-6i-2w+8-8|=\left|\left(z+6i\right)-2\left(w-4\right)-\left(8+6i\right)\right|$

Οπότε $|z-2w|\le|z+6i|+2|w-4|+|8+6i|=6+4+\sqrt{8^2+6^2}\Leftrightarrow|z-2w|\le 10+10=20$.

2^{ος} τρόπος:

Εστω $z+6i=z_1\Leftrightarrow z=z_1-6i$ με $|z_1|=6$ και $w-4=w_1\Leftrightarrow w=w_1+4$ με $|w_1|=2$.

Τότε $|z-2w|=\left|z_1-6i-2\left(w_1+4\right)\right|=|z_1-2w_1-8-6i|$,οπότε:

$|z-2w|\le|z_1|+2|w_1|+|8+6i|=6+4+\sqrt{8^2+6^2}=10+10=20$.

1.232. $1=|z-3|\ge\big||z|-3\big|\Leftrightarrow -1\le|z|-3\le 1\Leftrightarrow 2\le|z|\le 4$

1.233. Είναι $|z|=|z-3+3|\ge\big||z-3|-3\big|=|1-3|=2$ και

$|z-1|\le 3\Leftrightarrow|z-1|^2\le 9\Leftrightarrow\left(z-1\right)\left(\overline{z}-1\right)\le 9\Leftrightarrow z\overline{z}-z-\overline{z}+1\le 9\Leftrightarrow$

$|z|^2\le 8+2\left(z+\overline{z}\right)$ (1)

$|z-3|=1\Leftrightarrow|z-3|^2=1\Leftrightarrow\left(z-3\right)\left(\overline{z}-3\right)=1\Leftrightarrow z\overline{z}-3z-3\overline{z}+9=1\Leftrightarrow$

$|z|^2+8=3\left(z+\overline{z}\right)\Leftrightarrow z+\overline{z}=\frac{|z|^2+8}{3}$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$|z|^2\le 8+2\frac{|z|^2+8}{3}\Leftrightarrow 3|z|^2\le 24+2|z|^2+16\Leftrightarrow|z|^2\le 40\Leftrightarrow|z|\le\sqrt{40}$

1.234. Εστω $z-2+3i=w\Leftrightarrow z=w+2-3i$,$|w|\le 3$.

$|z-7-9i|=|w+2-3i-7-9i|=|w-5-12i|\le|w|+|5+12i|\le 3+13=16$ και

$|z-7-9i|=|w-5-12i|\ge\big||w|-|5+12i|\big|=\big||w|-13\big|$ (1)

Επειδή $|w| \le 3$ είναι $|w| - 13 < 0$, άρα $\left||w| - 13\right| = 13 - |w|$ και η (1) γίνεται:

$|z - 7 - 9i| \ge 13 - |w| \ge 13 - 3 = 10$

1.235. Εστω $z - 1 + 2i = w \Leftrightarrow z = w + 1 - 2i$,$|w| \le 3$.

$|z - 4 + 6i| = |w + 1 - 2i - 4 + 6i| = |w - 3 + 4i| \le |w| + |-3 + 4i| \le 3 + 5 = 8$ και

$|z - 4 + 6i| = |w - 3 + 4i| \ge \left||w| - |-3 + 4i|\right| = \left||w| - 5\right|$ (1)

Επειδή $|w| \le 3$ είναι $|w| - 5 < 0$, άρα $\left||w| - 5\right| = 5 - |w|$ και η (1) γίνεται:

$|z - 4 + 6i| \ge \left||w| - 5\right| = 5 - |w| \ge 5 - 3 = 2$

1.236. Εστω $z - 1 + \sqrt{3}i = w \Leftrightarrow z = w + 1 - i\sqrt{3}$, $|w| = 6$.

$|z| = \left|w + 1 - i\sqrt{3}\right| \le |w| + \left|1 - i\sqrt{3}\right| = 6 + 2 = 8$ και

$|z| = \left|w + 1 - i\sqrt{3}\right| \ge \left||w| - \left|1 - i\sqrt{3}\right|\right| = |6 - 2| = 4$

1.237. $\left||w| - |z_1|\right| \le |w + z_1| \le |w| + |z_1| \Leftrightarrow 2 \le |w + z_1| \le 6$ (1) και

$\left||w| - |z_2|\right| \le |w + z_2| \le |w| + |z_2| \Leftrightarrow 2 \le |w + z_2| \le 6 \Leftrightarrow \frac{1}{6} \le \frac{1}{|w + z_2|} \le \frac{1}{2}$ (2)

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (1), (2), έχουμε: $\frac{1}{3} \le \left|\frac{w + z_1}{w + z_2}\right| \le 3$

1.238. $|z + 1| \le |z| + 1$ και $|z - 2| \le |z - 1| + 1$, με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$|z + 1| + |z - 2| \le 2 + |z| + |z - 1|$

1.239. $\frac{z - z_1}{z_2 - z} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| \Leftrightarrow (z - z_1)|z_2| = |z_1|(z_2 - z) \Leftrightarrow z|z_2| - z_1|z_2| = z_2|z_1| - z|z_1| \Leftrightarrow$

$z|z_2| + z|z_1| = z_2|z_1| + z_1|z_2| \Leftrightarrow z\left(|z_1| + |z_2|\right) = z_2|z_1| + z_1|z_2| \Leftrightarrow z = \frac{z_2|z_1| + z_1|z_2|}{|z_1| + |z_2|}$

Άρα

$$|z| = \left|\frac{z_2|z_1| + z_1|z_2|}{|z_1| + |z_2|}\right| = \frac{\left|z_2|z_1| + z_1|z_2|\right|}{|z_1| + |z_2|} \le \frac{\left|z_2|z_1|\right| + \left|z_1|z_2|\right|}{|z_1| + |z_2|} = \frac{|z_1||z_2| + |z_2||z_1|}{|z_1| + |z_2|} = \frac{2|z_1 z_2|}{|z_1| + |z_2|}$$

1.240. **α)** Εστω $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$. Η εξίσωση γίνεται:

$$4(x + yi)^2 + 8(x^2 + y^2) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2 + 4y^2 = 3 \\ 8xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2 + 4y^2 = 3 \\ x = 0 \text{ ή } y = 0 \end{cases}$$

Αν $x = 0$, τότε $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $z = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$, ενώ αν $y = 0$, τότε $x = \pm\frac{1}{2}$ και $z = \pm\frac{1}{2}$

β) Εστω $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$\sqrt{x^2+y^2}+x+yi=2+i \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+x=2\\ y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x^2+1}=2-x\\ y=1\end{cases}$$

Πρέπει $2-x\ge 0 \Leftrightarrow x\le 2$,τότε $x^2+1=(2-x)^2 \Leftrightarrow x^2+1=4-4x+x^2 \Leftrightarrow x=\frac{3}{4}$.

Άρα $z=\frac{3}{4}+i$.

γ) Εστω $z=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$.Η εξίσωση γίνεται:

$$\left|x+(y-1)i\right|=2(x-yi) \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x^2+(y-1)^2}=2x\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x^2+1}=2x>0\\ y=0\end{cases} \Rightarrow$$

$x^2+1=4x^2 \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}$, άρα $z=\frac{\sqrt{3}}{3}$

1.241.α) $\bar{z}^3\cdot z^7=1 \Rightarrow \left|\bar{z}^3 z^7\right|=|1| \Leftrightarrow \left|\bar{z}^3\right|\cdot\left|z^7\right|=1 \Leftrightarrow |\bar{z}|^3\cdot|z|^7=1$. Όμως, $|\bar{z}|=|z|$, άρα

$|z|^3\cdot|z|^7=1 \Leftrightarrow |z|^{10}=1 \Leftrightarrow |z|=1 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow z\bar{z}=1 \Leftrightarrow \bar{z}=\frac{1}{z}\ (1)$

Οπότε η εξίσωση $\bar{z}^3\cdot z^7=1$, με βάση την (1) γίνεται: $\left(\frac{1}{z}\right)^3 z^7=1 \Leftrightarrow \frac{1}{z^3}z^7=1 \Leftrightarrow$

$z^4=1 \Leftrightarrow z^4-1=0 \Leftrightarrow (z^2-1)(z^2+1)=0 \Leftrightarrow (z-1)(z+1)(z^2+1)=0$

Άρα $z=1$ ή $z=-1$ ή $z^2=-1$, δηλαδή $z=1$ ή $z=-1$ ή $z=i$ ή $z=-i$.

β) $\bar{z}^3\cdot z^6=1 \Rightarrow \left|\bar{z}^3 z^6\right|=|1| \Leftrightarrow \left|\bar{z}^3\right|\cdot\left|z^6\right|=1 \Leftrightarrow |\bar{z}|^3\cdot|z|^6=1 \Leftrightarrow$

$|z|^3\cdot|z|^6=1 \Leftrightarrow |z|^9=1 \Leftrightarrow |z|=1 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow z\bar{z}=1 \Leftrightarrow \bar{z}=\frac{1}{z}$

$\bar{z}^3\cdot z^6=1 \Rightarrow \left(\frac{1}{z}\right)^3 z^6=1 \Leftrightarrow \frac{1}{z^3}z^6=1 \Leftrightarrow$

$z^3=1 \Leftrightarrow z^3-1=0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1)=0 \Leftrightarrow z=1$ ή

$z^2+z+1=0 \Leftrightarrow z=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1.242. Εστω $z=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$, τότε $|z-1|=|z-i| \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow y=x$

$|z-1|=|z-2| \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$. Άρα $z=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$

1.243. $z^3-2\left|z^2\right|-3|z|=0 \Leftrightarrow z^3=2\left|z^2\right|+3|z|$ και

$\left|z^3\right|=\left|2\left|z^2\right|+3|z|\right| \Leftrightarrow |z|^3=2|z|^2+3|z| \Leftrightarrow |z|^3-2|z|^2-3|z|=0 \Leftrightarrow |z|\left(|z|^2-2|z|-3\right)=0 \Leftrightarrow$

$|z|=0$ ή $|z|^2-2|z|-3=0 \Leftrightarrow |z|=3$ ή $|z|=-1$ που απορρίπτεται

Αν $|z|=0$, η εξίσωση γίνεται: $z^3=0 \Leftrightarrow z=0$.

Αν $|z|=3$, η εξίσωση γίνεται: $z^3-3^3=0 \Leftrightarrow (z-3)(z^3+3z+9)=0 \Leftrightarrow z=3$ ή

$z^3+3z+9=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{-3\pm 3i\sqrt{3}}{2}$

1.244. Εστω ότι υπάρχει $\rho\in\mathbb{R}$: $\left|(1-i\rho)^{1821}\right|=\left|\dfrac{3+4i}{4-3i}\right| \Leftrightarrow |1-i\rho|^{1821}=\dfrac{\cancel{\sqrt{3^2+4^2}}}{\cancel{\sqrt{4^2+3^2}}} \Leftrightarrow$

$|1-i\rho|=1 \Leftrightarrow \sqrt{1+\rho^2}=1 \Leftrightarrow \rho=0$.

Τότε η αρχική γίνεται: $1=\dfrac{3+4i}{4-3i} \Leftrightarrow 3+4i=4+3i$ που είναι αδύνατο.

1.245. Εστω ότι υπάρχει $\rho\in\mathbb{R}$: $(\rho+i)^{2014}=1$ (1), τότε:

$|\rho+i|^{2014}=1 \Leftrightarrow |\rho+i|=1 \Leftrightarrow \sqrt{\rho^2+1}=1 \Leftrightarrow \rho=0$

Η (1) γίνεται $i^{2014}=1 \Leftrightarrow i^{4\cdot 503+2}=1 \Leftrightarrow -1=1$ που είναι αδύνατο.

1.246. $\left|\left(\sqrt{3}+i\right)^{\nu}\right|=|-64| \Leftrightarrow \left|\sqrt{3}+i\right|^{\nu}=64 \Leftrightarrow \left(\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}\right)^{\nu}=64 \Leftrightarrow 2^{\nu}=2^6 \Leftrightarrow \nu=6$

$\left(\sqrt{3}+i\right)^6=\left[\left(\sqrt{3}+i\right)^2\right]^3=\left(3+2i\sqrt{3}-1\right)^3=\left(2+2i\sqrt{3}\right)^3=$

$=2^3+3\cdot 2^2\cdot 2i\sqrt{3}+3\cdot 2\cdot\left(2i\sqrt{3}\right)^2+\left(2i\sqrt{3}\right)^3=8+24i\sqrt{3}-72-24i=-64$

1.247. α) Είναι $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{3+i}{1-3i}=\dfrac{(3+i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\dfrac{3+9i+i-3}{1+9}=\dfrac{10i}{10}=i$

και $|iz_1+z_2|^2=|i(3+i)+i-3i|^2=|3i-1+1-3i|^2=0$

β) Επειδή $\dfrac{z_1}{z_2}=i \Leftrightarrow z_1=iz_2$ (1) έχουμε

$z_1^{2014}+z_2^{2014}=(iz_2)^{2014}+z_2^{2014}=i^{2014}\cdot z_2^{2014}+z_2^{2014}=$

$=i^{4\cdot 503+2}\cdot z_2^{2014}+z_2^{2014}=-z_2^{2014}+z_2^{2014}=0$

γ) $w=\dfrac{kz_1-iz_2}{z_2-kz_2}\overset{(1)}{=}\dfrac{kiz_2-iz_2}{z_2-kz_2}=\dfrac{iz_2(k-1)}{z_2(1-k)}=-i$, άρα $\mathrm{Im}(w)=-1$.

1.248. α) Είναι $w\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{w}=w \Leftrightarrow \dfrac{\overline{z}}{\overline{z}^2+1}=\dfrac{z}{z^2+1} \Leftrightarrow \overline{z}(z^2+1)=z(\overline{z}^2+1) \Leftrightarrow$

$z^2\overline{z}+\overline{z}=z\overline{z}^2+z \Leftrightarrow z^2\overline{z}-z\overline{z}^2+\overline{z}-z=0 \Leftrightarrow z\overline{z}(z-\overline{z})-(z-\overline{z})=0 \Leftrightarrow$

$(z-\overline{z})\cdot(z\overline{z}-1)=0 \Leftrightarrow z=\overline{z}$ ή $z\overline{z}=1$

δηλαδή $z\in\mathbb{R}$ ή $z\overline{z}=|z|^2=1 \Leftrightarrow |z|=1$

β) Εχουμε $\dfrac{z}{z^2+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \dfrac{z}{z^2+1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow z^2+1=\sqrt{3}z \Leftrightarrow z^2-\sqrt{3}z+1=0$,

$\Delta = 3-4 = -1 < 0$, άρα $z_{1,2} = \dfrac{\sqrt{3} \pm i}{2}$ δηλαδή $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$, $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$

γ) Είναι $z_1 \cdot z_2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} = 1$ και

$z_1 + z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i + \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i = \sqrt{3}$

Οπότε η παράσταση Κ γίνεται: $K = \dfrac{(z_1 z_2)^3 - i}{4 - (z_1 + z_2)^2} = \dfrac{1^3 - i}{4 - (\sqrt{3})^2} = \dfrac{1-i}{1} = 1-i$

1.249.α) Είναι $2\bar{z}^5 + 5z^5 = 7$ άρα και $\overline{2z^5 + 5\bar{z}^5} = 7 \Leftrightarrow 2\bar{z}^5 + 5z^5 = 7$.

β) $\begin{cases} 2z^5 + 5\bar{z}^5 = 7 \\ 2\bar{z}^5 + 5z^5 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4z^5 - 10\bar{z}^5 = -14 \\ 25z^5 + 10\bar{z}^5 = 35 \end{cases}$ και με πρόσθεση κατά

μέλη έχουμε: $21z^5 = 21 \Leftrightarrow z^5 = 1$.

γ) Είναι $|z^5| = 1 \Leftrightarrow |z|^5 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{1}{z}$.

Τότε: $\bar{w} = \overline{z^2 + \dfrac{1}{z^2}} = \bar{z}^2 + \dfrac{1}{\bar{z}^2} = \dfrac{1}{z^2} + z^2 = w \Leftrightarrow w \in \mathbb{R}$.

1.250.α) $\left|z^{1821}\right| = \left|\dfrac{3+4i}{5}\right| \Leftrightarrow |z|^{1821} = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$

β) $z^{1821} = \dfrac{3+4i}{5} \Leftrightarrow (\alpha + \beta i)^{1821} = \dfrac{3+4i}{5} \Leftrightarrow \left(-\alpha i^2 + \beta i\right)^{1821} = \dfrac{3+4i}{5} \Leftrightarrow$

$i^{1821}(\beta - \alpha i)^{1821} = \dfrac{3+4i}{5} \Leftrightarrow i(\beta - \alpha i)^{1821} = \dfrac{3+4i}{5} \Leftrightarrow (\beta - \alpha i)^{1821} = \dfrac{3+4i}{5i} \Leftrightarrow$

$(\beta - \alpha i)^{1821} = \dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{5}i$

γ) $|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{1}{z}$, $w = \bar{z} - \dfrac{1}{\bar{z}} = \dfrac{1}{z} - z = -w \Leftrightarrow w \in I$

1.251.α) Εστω $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$.Τότε:

$$w = \frac{x + yi - 12}{x + yi - 3} = \frac{(x-12) + yi}{(x-3) + yi} = \frac{\left[(x-12) + yi\right]\left[(x-3) - yi\right]}{(x-3)^2 + y^2} =$$

$$= \frac{(x-12)(x-3) + y(x-3)i - y(x-12)i + y^2}{(x-3)^2 + y^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 3x - 12x + 36 + y^2}{(x-3)^2 + y^2} + i\frac{xy - 3y - xy + 12y}{(x-3)^2 + y^2} =$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - 15x + 36}{(x-3)^2 + y^2} + i\frac{9y}{(x-3)^2 + y^2}$$

β) $|w|^2 = w\overline{w} = \frac{z-12}{z-3}\cdot\frac{\overline{z}-12}{\overline{z}-3} = \frac{z\overline{z}-12z-12\overline{z}+144}{z\overline{z}-3z-3\overline{z}+9} = \frac{|z|^2-12z-12\overline{z}+144}{|z|^2-3z-3\overline{z}+9} =$

$= \frac{36-12z-12\overline{z}+144}{36-3z-3\overline{z}+9} = \frac{180-12z-12\overline{z}}{45-3z-3\overline{z}} = \frac{12\left(15-z-\overline{z}\right)}{3\left(15-z-\overline{z}\right)} = \frac{12}{3} = 4$,

αφού ισχύει $z+\overline{z} \le 2|z| \Leftrightarrow z+\overline{z} \le 12 \Leftrightarrow 12-z-\overline{z} \ge 0 \Leftrightarrow 15-z-\overline{z} \ge 3 > 0$, οπότε $15-z-\overline{z} \ne 0$.

Άρα είναι $|w|^2 = 4 \Leftrightarrow |w| = 2$.

γ) $w+\frac{\kappa}{w} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow w+\frac{\kappa}{w} = \overline{w}+\frac{\kappa}{\overline{w}} \Leftrightarrow w-\overline{w} = \frac{\kappa}{\overline{w}}-\frac{\kappa}{w} \Leftrightarrow w-\overline{w} = \kappa\frac{w-\overline{w}}{w\overline{w}}$.

Επειδή $w \notin \mathbb{R}$, $\overline{w} \ne w$, ισχύει $1 = \frac{\kappa}{w\overline{w}} \Leftrightarrow w\overline{w} = \kappa \Leftrightarrow |w|^2 = \kappa \Leftrightarrow \kappa = 4$.

1.252.α) $w = \frac{z-9}{z-1} \Leftrightarrow wz-w = z-9 \Leftrightarrow z = \frac{w-9}{w-1}$,

$|z| = \left|\frac{w-9}{w-1}\right| = 3 \Leftrightarrow |w-9| = 3|w-1| \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow |w| = 3$

β) $|w| = 3 \Leftrightarrow \overline{w} = \frac{9}{w}$

$$\overline{z}_1 = \frac{\overline{w}^2+9}{\overline{w}} = \frac{\frac{81}{w^2}+9}{\frac{9}{w}} = \frac{9\frac{w^2+9}{w^2}}{\frac{9}{w}} = \frac{w^2+9}{w} = z_1$$

1.253.α) $z^3+|z| = 0 \Leftrightarrow z^3 = -|z|$, άρα και $|z^3| = |-|z|| \Leftrightarrow |z|^3-|z| = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$ ή $|z| = 1$

β) Αν $|z| = 0$, τότε $z = 0$,

Αν $|z| = 1$, τότε $z^3+|z| = 0 \Leftrightarrow z^3+1 = 0 \Leftrightarrow (z+1)\left(z^2-z+1\right) = 0 \Leftrightarrow z = -1$ ή

$z^2-z+1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$

γ) i. $z_1^2 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ **ii.** $z_1^3+z_2^3 = -1-1 = -2$

iii. $z_1^{2013}+z_2^{2013} = \left(z_1^3\right)^{671}+\left(z_2^3\right)^{671} = -1-1 = -2$

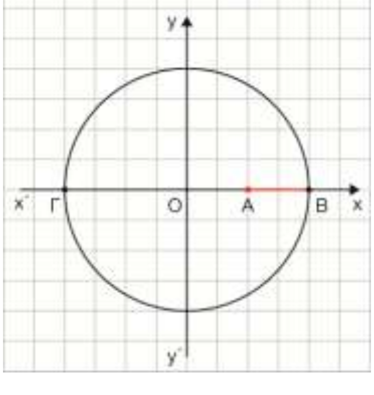
1.254.α)

$|z+16| = 4|z+1| \Leftrightarrow |z+16|^2 = 16|z+1|^2 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow |z| = 4$

β) Εστω $A(2,0)$, τότε $|z-2|_{min} = (AB) = 2$ και

$|z-2|_{max} = (A\Gamma) = 6$

γ) i. $|z_1| = 4 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 16 \Leftrightarrow \overline{z}_1 = \frac{16}{z_1}$



ii. $$\overline{w}=\frac{\overline{z}_1^{\nu}+\overline{z}_2^{\nu}}{\left(\overline{z}_1+\overline{z}_2\right)^{\nu}}=\frac{\dfrac{16^{\nu}}{z_1^{\nu}}+\dfrac{16^{\nu}}{z_2^{\nu}}}{\left(\dfrac{16}{z_1}+\dfrac{16}{z_2}\right)^{\nu}}=\frac{16^{\nu}\dfrac{z_2^{\nu}+z_1^{\nu}}{z_1^{\nu}z_2^{\nu}}}{\left(16\dfrac{z_2+z_1}{z_1z_2}\right)^{\nu}}=$$

$$\frac{\cancel{16^{\nu}}\dfrac{z_2^{\nu}+z_1^{\nu}}{\cancel{z_1^{\nu}z_2^{\nu}}}}{\cancel{16^{\nu}}\dfrac{\left(z_2+z_1\right)^{\nu}}{\cancel{z_1^{\nu}z_2^{\nu}}}}=w$$

1.255.α) $|z_1|=1\Leftrightarrow |z_1|^2=1\Leftrightarrow \overline{z}_1=\dfrac{1}{z_1}$

β) $$\overline{w}=\frac{\overline{z}_1-\overline{z}_2}{1+\overline{z}_1\overline{z}_2}=\frac{\dfrac{1}{z_1}-\dfrac{1}{z_2}}{1+\dfrac{1}{z_1}\dfrac{1}{z_2}}=\frac{\dfrac{z_2-z_1}{\cancel{z_1z_2}}}{\dfrac{z_1z_2+1}{\cancel{z_1z_2}}}=-w$$

γ) $z_1+z_2-z_1z_2+1=0\Leftrightarrow \overline{z}_1+\overline{z}_2-\overline{z}_1\overline{z}_2+1=0\Leftrightarrow \dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}-\dfrac{1}{z_1}\dfrac{1}{z_1}+1=0\Leftrightarrow$

$z_1+z_2+z_1z_2-1=0$

δ) $\Pi=|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=\left(z_1+z_2\right)\left(\overline{z}_1+\overline{z}_2\right)+\left(z_1-z_2\right)\left(\overline{z}_1+\overline{z}_2\right)\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow$

$\Pi=2|z_1|^2+2|z_2|^2=4$

1.256.α) $|z_1+z_2|=|z_1|=|z_2|\Leftrightarrow \dfrac{|z_1+z_2|}{|z_2|}=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}=1\Leftrightarrow \left|\dfrac{z_1}{z_2}+1\right|=\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=1$

Εστω $w=\dfrac{z_1}{z_2}$, τότε: $|w+1|=1$ και $|w|=1$. Άρα $|w+1|^2=1\Leftrightarrow$

$(w+1)\left(\overline{w}+1\right)=1\Leftrightarrow w\overline{w}+w+\overline{w}+1=1\Leftrightarrow 1+w+\overline{w}=0\ \ (1)$

Όμως $|w|=1\Leftrightarrow |w|^2=1\Leftrightarrow w\overline{w}=1\Leftrightarrow \overline{w}=\dfrac{1}{w}$, οπότε η (1) γίνεται:

$1+w+\dfrac{1}{w}=0\Leftrightarrow w+w^2+1=0\Leftrightarrow \left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2+\dfrac{z_1}{z_2}+1=0$.

β) Είναι $w^2+w+1=0$, άρα $w^3-1=(w-1)\left(w^2+w+1\right)=0\Leftrightarrow w^3=1\Leftrightarrow$

$\dfrac{z_1^3}{z_2^3}=1\Leftrightarrow z_1^3=z_2^3$.

γ) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}-1\right|=\sqrt{3}\Leftrightarrow |w-1|=\sqrt{3}\Leftrightarrow |w-1|^2=3\Leftrightarrow (w-1)\left(\overline{w}-1\right)=3\Leftrightarrow$

$w\overline{w}-w-\overline{w}+1=3\Leftrightarrow 1-w-\overline{w}+1=3\Leftrightarrow w+\overline{w}+1=0$ που ισχύει.

1.257.α) $(z-2i)^{100}+(2i)^{51}\cdot\left(\overline{z}+2i\right)^{49}=0\Leftrightarrow (z-2i)^{100}+2^{51}\cdot i^{51}\cdot\left(\overline{z}+2i\right)^{49}=0\Leftrightarrow$

$(z-2i)^{100}-2^{51}\cdot i\cdot\left(\overline{z-2i}\right)^{49}=0 \Leftrightarrow (z-2i)^{100}=2^{51}\cdot i\cdot\left(\overline{z-2i}\right)^{49}$

Άρα και $\left|(z-2i)^{100}\right|=\left|2^{51}\cdot i\cdot\left(\overline{z-2i}\right)^{49}\right| \Leftrightarrow |z-2i|^{100}=2^{51}\cdot|i||z-2i|^{49}\Leftrightarrow$

$\frac{|z-2i|^{100}}{|z-2i|^{49}}=2^{51}\Leftrightarrow |z-2i|^{51}=2^{51}\Leftrightarrow |z-2i|=2$

β) $(z-2i)^{100}=2^{51}\cdot i\cdot\left(\overline{z-2i}\right)^{49}\Leftrightarrow (z-2i)^{100}\cdot(z-2i)^{49}=2^{51}\cdot i\cdot\left(\overline{z-2i}\right)^{49}\cdot(z-2i)^{49}\Leftrightarrow$

$(z-2i)^{149}=2^{51}\cdot i\cdot\left(|z-2i|^2\right)^{49}\Leftrightarrow (z-2i)^{149}=2^{51}\cdot i\cdot\left(2^2\right)^{49}=2^{51}\cdot i\cdot 2^{98}=2^{149}\cdot i$

άρα $w=(z-2i)^{149}\in I$

1.258.α) $|z+w|=|z-w|\Leftrightarrow |z+w|^2=|z-w|^2\Leftrightarrow ....\Leftrightarrow z\overline{w}=-\overline{z}w\Leftrightarrow \frac{z}{w}=-\frac{\overline{z}}{\overline{w}}$

β) $\left|\frac{iz}{z-w}\right|+\left|\frac{i\overline{w}}{z+w}\right|=\frac{|i||z|}{|z-w|}+\frac{|i||\overline{w}|}{|z+w|}=\frac{|z|}{|z-w|}+\frac{|w|}{|z+w|}=\frac{|z|+|w|}{|z-w|}$

Είναι $|z-w|\le|z|+|w|\Leftrightarrow 1\le\frac{|z|+|w|}{|z-w|}$

1.259.α) Είναι $\frac{1}{z^{10}}+\frac{1}{\overline{z}^{10}}=2^{-9}=\frac{1}{2^9}\Leftrightarrow\frac{\overline{z}^{10}+z^{10}}{z^{10}\cdot\overline{z}^{10}}=\frac{1}{2^9}\Leftrightarrow 2^9\overline{z}^{10}+2^9z^{10}=\left(z\overline{z}\right)^{10}\Leftrightarrow$

$2^9\overline{z}^{10}+2^9z^{10}=\left(|z|^2\right)^{10}=|z|^{20}$

Πολλαπλασιάζοντας την προηγούμενη εξίσωση με z^{10}, προκύπτει:

$2^9\overline{z}^{10}\cdot z^{10}+2^9z^{20}=|z|^{20}\cdot z^{10}\Leftrightarrow 2^9|z|^{20}+2^9z^{20}=|z|^{20}\cdot z^{10}\Leftrightarrow$

$2^9z^{20}=|z|^{20}\cdot z^{10}-2^9|z|^{20}\Leftrightarrow 2^9z^{20}=|z|^{20}\cdot\left(z^{10}-2^9\right)$

Άρα και $\left|2^9z^{20}\right|=\left||z|^{20}\cdot\left(z^{10}-2^9\right)\right|\Leftrightarrow 2^9|z|^{20}=|z|^{20}\left|z^{10}-2^9\right|\Leftrightarrow\left|z^{10}-2^9\right|=2^9$

β) Όμως από την τριγωνική ανισότητα ισχύει: $\left|z^{10}-2^9\right|\ge\left||z|^{10}-2^9\right|$ άρα

$\left||z|^{10}-2^9\right|\le 2^9\Leftrightarrow\ -2^9\le|z|^{10}-2^9\le 2^9\Leftrightarrow 0\le|z|^{10}\le 2\cdot 2^9$, δηλαδή

$|z|^{10}\le 2^{10}\Leftrightarrow|z|\le 2$

1.302. Εστω $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$. Τότε: $Re^2(z)+Im^2(z)-2=2\left(Re(z)-Im(z)\right)\Leftrightarrow$

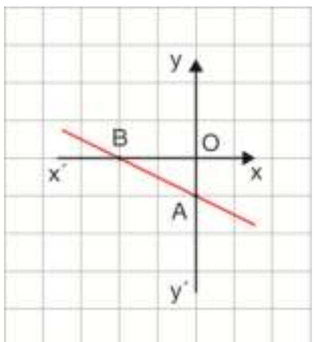
$x^2+y^2-2=2x-2y\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+2y+1=4\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=4$

Κύκλος με $K(1,-1)$, $\rho=2$.

1.303.α) Αν $A(1,0)$, $B(0,-2)$ και $M(z)$, τότε

$|z-1|=|z+2i|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{MB}\right|$

β) Εστω $z=x+yi$, τότε:



$$|(x-1)+yi|=|x+(y+2)i| \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 2x+4y+3=0$$

1.304. α) Εστω $z=x+yi$, τότε:

$$|(x-2)+(y+3)i|=|(x-1)+(y-4)i| \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow y=\frac{1}{7}x+\frac{2}{7}$$

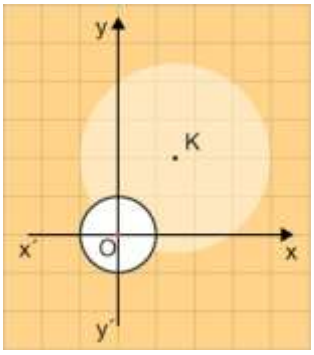
β) Εστω $A(2,-6)$ και $B(-1,15)$. Είναι $\lambda_{AB}=\dfrac{15+6}{-1-2}=-7$ και $\lambda_{AB}\lambda_{\varepsilon}=-1$

1.305. $|4z-2iz+3|=7 \Leftrightarrow |(4-2i)z+3|=7 \Leftrightarrow |4-2i|\left|z+\dfrac{3}{4-2i}\right|=7 \Leftrightarrow$

$$\sqrt{20}\left|z+\frac{3(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)}\right|=7 \Leftrightarrow \left|z+\frac{3}{5}+\frac{3}{10}i\right|=\frac{7}{2\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{10}$$

Κύκλος με κέντρο $K\left(-\dfrac{3}{5},-\dfrac{3}{10}\right)$ και ακτίνα $\rho=\dfrac{7\sqrt{5}}{10}$.

1.306. Επειδή $|z|\geq 2$ η εικόνα Μ του z δεν βρίσκεται στο εσωτερικού του κύκλου κέντρου Ο και ακτίνας 2. Επειδή $|z-3-4i|\leq 5$, το Μ βρίσκεται και στον κυκλικό δίσκο κέντρου $K(3,4)$ και ακτίνας 5.



1.307. α) $|z+4+i|^2-|z+1-i|^2=3 \Leftrightarrow |(x+4)+(y+1)i|^2-|(x+1)+(y-1)i|^2=3 \Leftrightarrow$

$$x^2+8x+16+y^2+2y+1-x^2-2x-1-y^2+2y-1=3 \Leftrightarrow$$

$$3x+2y=-6$$

β) $|z-1|^2+|z-3-2i|^2=6 \Leftrightarrow |x+yi-1|^2+|x+yi-3-2i|^2=6 \Leftrightarrow$

$$|(x-1)+yi|^2+|(x-3)+(y-2)i|^2=6 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(x-3)^2+(y-2)^2=6 \Leftrightarrow$$

$$x^2-2x+1+y^2+x^2-6x+9+y^2-4y+4=6 \Leftrightarrow$$

$$2x^2-8x+2y^2-4y=-8 \Leftrightarrow x^2-4x+y^2-2y=-4 \Leftrightarrow$$

$$x^2-4x+4+y^2-2y+1=1 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=1.$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x,y)$ είναι κύκλος με κέντρο $K(2,1)$ και ακτίνα $\rho=1$.

1.308. i. $w\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(w)=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x+6y-12=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=25$

Κύκλος με κέντρο $K(2,-3)$ και ακτίνα $\rho=5$.

ii. $w\in I \Leftrightarrow \mathrm{Re}(w)=0 \Leftrightarrow x^2-y^2-4=0 \Leftrightarrow x^2-y^2=4$. Υπερβολή με $\alpha=\beta=2$

και εστίες $E'\left(-2\sqrt{2},0\right)$ και $E\left(2\sqrt{2},0\right)$

1.309. Εστω $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$. Τότε:

$$z^2-4\bar{z}=\bar{z}^2-4z \Leftrightarrow (x+yi)^2-4(x-yi)=(x-yi)^2-4(x+yi)\Leftrightarrow$$
$$x^2+2xyi+y^2i^2-4x+4yi=x^2-2xyi+y^2i^2-4x-4yi\Leftrightarrow$$
$$2xyi+4yi=-2xyi-4yi \Leftrightarrow 4xyi+8yi=0\Leftrightarrow 4yi(x+2)=0\Leftrightarrow y=0 \text{ ή } x=-2.$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος του M αποτελείται από τα σημεία του άξονα $x'x$ και από τα σημεία της ευθείας $x=-2$.

1.310. α) Εστω $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$. Τότε: $3z+3\bar{z}+4iz-4i\bar{z}=-7\Leftrightarrow$

$$3(x+yi)+3(x-yi)+4i(x+yi)-4i(x-yi)=-7\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow 6x-8y+7=0$$

β) $z\bar{z}=z+\bar{z}\Leftrightarrow (x+yi)(x-yi)=x+yi+x-yi\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1$

γ) $(\bar{z}-z)^2=z+\bar{z}\Leftrightarrow (x-yi-x-yi)^2=x+yi+x-yi\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow y^2=-\frac{1}{2}x$

δ) $4(z-\bar{z})^2-9(z+\bar{z})^2=-144\Leftrightarrow$

$$4(x+yi-x+yi)^2-9(x+yi+x-yi)=-144\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

1.311. Εστω A,B οι εικόνες των μιγαδικών z_1,z_2 αντίστοιχα. Τότε:

$$|z-z_1|^2+|z-z_2|^2=100 \Leftrightarrow |z-z_1|^2+|z-z_2|^2=|z_1-z_2|^2 \Leftrightarrow \left|\vec{AM}\right|^2+\left|\vec{BM}\right|^2=\left|\vec{AB}\right|^2$$

Δηλαδή οι πλευρές του τριγώνου MAB ικανοποιούν το πυθαγόρειο θεώρημα, οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την AB. Άρα ο γεωμετρικός τόπος του $M(z)$ είναι κύκλος διαμέτρου AB.

1.312. $\left|\frac{z-1}{z+i}\right|=1\Leftrightarrow \frac{|z-1|}{|z+i|}=1\Leftrightarrow |z-1|=|z+i|\Leftrightarrow |z-1|^2=|z+i|^2\Leftrightarrow$

$$(z-1)(\bar{z}-1)=(z+i)(\bar{z}-1)\Leftrightarrow z\bar{z}-z-\bar{z}+1=z\bar{z}-iz+i\bar{z}+1\Leftrightarrow$$
$$-(z+\bar{z})=-i(z-\bar{z})\Leftrightarrow z+\bar{z}=i(z-\bar{z}) \quad (1)$$

Αν $z=x+yi$ τότε η (1) γίνεται: $2x=i\cdot 2yi\Leftrightarrow x=-y\Leftrightarrow y=-x$.

Επομένως οι εικόνες των μιγαδικών z βρίσκονται επί της ευθείας $y=-x$.

1.313. Εστω $z=x+yi$ και $z_0=x_0+y_0i$, τότε: $|z|^2-2\mathrm{Re}(z\bar{z}_0)-\rho^2+|z_0|^2=0\Leftrightarrow$

$$x^2+y^2-2\mathrm{Re}\left[(x+yi)(x_0+y_0i)\right]-\rho^2+x_0^2+y_0^2=0\Leftrightarrow$$
$$x^2+y^2-2xx_0+2yy_0-\rho^2+x_0^2+y_0^2=0\Leftrightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$$

1.314. α) Εστω $z=x+yi$. τότε: $|z-3|=3+\mathrm{Re}(z)\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+y^2}=3+x$

Πρέπει $3+x\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -3$. Τότε $(x-3)^2+y^2=(x+3)^2 \Leftrightarrow y^2=12x$

Παραβολή με εστία $E(3,0)$ και διευθετούσα $\delta: x=-3\ (p=6)$.

β) $|z-2i|=2+\mathrm{Im}(z) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-2)^2}=2+y$. Πρέπει $2+y\ge 0 \Leftrightarrow y\ge -2$. Τότε $x^2+(y-2)^2=(y+2)^2 \Leftrightarrow x^2=8y$.

Παραβολή με εστία $E(0,2)$ και διευθετούσα $\delta: y=-2\ (p=4)$.

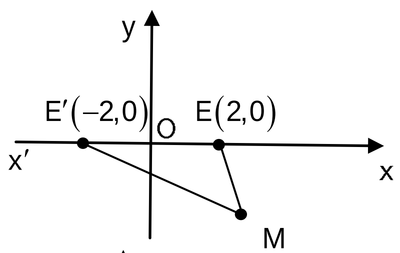
1.315.α) $|z+2|+|z-2|=5 \Leftrightarrow |\overrightarrow{ME'}|+|\overrightarrow{ME}|=2\alpha$.

Ελλειψη με εστίες τα $E'(-2,0), E(2,0)$ και μεγάλο άξονα $AA'=2\alpha=5$

β) $|z+5|+|z-5|=26 \Leftrightarrow |\overrightarrow{ME'}|+|\overrightarrow{ME}|=2\alpha$

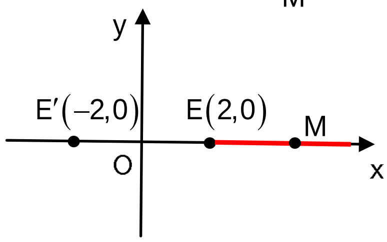
Ελλειψη με εστίες τα $E'(-5,0), E(5,0)$ και μεγάλο άξονα $AA'=2\alpha=13$

1.316.α) $|z+2|-|z-2|=4 \Leftrightarrow |\overrightarrow{ME'}|-|\overrightarrow{ME}|=|\overrightarrow{E'E}|=4$



Αν το $M(z)$ βρίσκεται εκτός του άξονα x΄x, τότε από την τριγωνική ανισότητα ισχύει ότι: $\left||\overrightarrow{ME'}|-|\overrightarrow{ME}|\right|<|\overrightarrow{E'E}|=4$.

Αν το M βρίσκεται στην ημιευθεία $E'x'$, τότε $|\overrightarrow{ME'}|<|\overrightarrow{ME}|$ και $|\overrightarrow{ME'}|-|\overrightarrow{ME}|<0$



Για οποιοδήποτε σημείο της ημιευθείας Ex παρατηρούμε ότι ισχύει:
$|\overrightarrow{ME'}|-|\overrightarrow{ME}|=|\overrightarrow{ME}|+|\overrightarrow{E'E}|-|\overrightarrow{ME}|=|\overrightarrow{E'E}|=4$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος του M είναι η ημιευθεία Ex.

β) $|z-5|=|z+5|+6 \Leftrightarrow |z-5|-|z+5|=6 \Leftrightarrow |\overrightarrow{ME}|-|\overrightarrow{ME'}|=2\alpha$

Ο κλάδος της υπερβολής με εστίες τα $E'(-5,0), E(5,0)$ και κορυφές $A'(-3,0), A(3,0)$ που βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο $\left(|\overrightarrow{ME}|>|\overrightarrow{ME'}|\right)$.

1.317.α) $|z+3i|+|\bar{z}+3i|=10 \Leftrightarrow |z+3i|+|\overline{z-3i}|=10 \Leftrightarrow |z+3i|+|z-3i|=10$

Ο γ.τ. των εικόνων M του μιγαδικού z είναι έλλειψη με εστίες $E'(0,-3), E(0,3)$ και μεγάλο άξονα $AA'=2\alpha=10$.

β) Εστω $z=x+yi$, τότε: $|9z+\bar{z}|=40 \Leftrightarrow |9x+9yi+x-yi|=40 \Leftrightarrow$

$$|10x+8yi|=40 \Leftrightarrow 100x^2+64y^2=1600 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$$

$\alpha=4,\ \beta=5,\ \gamma=3$. Ελλειψη με εστίες $E'(0,-3), E(0,3)$ και μεγάλο άξονα $AA'=2\alpha=10$.

1.318. Εστω $z=x+yi$. Επειδή $|z+4|+|z-4|=10$, η εικόνα του z βρίσκεται σε έλλειψη με $\alpha=5,\ \beta=3,\ \gamma=4$

$|7z-3\bar{z}+2\mathrm{Re}(z)|=30\Leftrightarrow|7x+7yi-3x+3yi+2x|=30\Leftrightarrow$

$|6x+10yi|=30\Leftrightarrow|3x+5yi|=15\Leftrightarrow 9x^2+25y^2=225\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ που ισχύει αφού είναι η προηγούμενη έλλειψη.

1.319. Εστω $z=x+yi$. Τότε:

$$w=\frac{(z-i)(\bar{z}-i)}{z-\bar{z}}=\frac{(x+(y-1)i)(x-(y+1)i)}{2yi}=-\frac{x}{y}-\frac{x^2+y^2-1}{2y}i$$

α) $\mathrm{Im}(z)=0\Leftrightarrow\dfrac{x^2+y^2-1}{2y}=0\Leftrightarrow x^2+y^2=1$ μοναδιαίος κύκλος εκτός του $(\pm1,0)$

β) $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Re}(z)\Leftrightarrow\dfrac{x^2+y^2-1}{2y}=\dfrac{x}{y}\Leftrightarrow x^2-2x+y^2-1=0\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2=2$

Κύκλος με κέντρο $K(1,0)$ εκτός των $\left(1\pm\sqrt{2},0\right)$.

1.320. α) $w=\dfrac{z-2i}{z+1}=\dfrac{x+(y-2)i}{(x+1)+yi}=\dfrac{x^2+x+y^2-2y}{(x+1)^2+y^2}+\dfrac{y-2x-2}{(x+1)^2+y^2}i$

β) $\mathrm{Im}(w)=0\Leftrightarrow\dfrac{y-2x-2}{(x+1)^2+y^2}=0\Leftrightarrow y=2x+2$

γ) $|w|=1\Leftrightarrow|z-2i|=|z+1|\Leftrightarrow|z-2i|^2=|z+1|^2\Leftrightarrow...\Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{4}$

1.321. i) $w=\dfrac{z-2}{2z-1}=\dfrac{2x^2-5x+2+2y^2}{(2x-1)^2+4y^2}+\dfrac{3y}{(2x-1)^2+4y^2}i$

ii) α) $w\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\mathrm{Im}(w)=0\Leftrightarrow\dfrac{3y}{(2x-1)^2+4y^2}=0\Leftrightarrow y=0$, άρα το Μ βρίσκεται στον x΄x εκτός από το $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$.

β) $w\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\mathrm{Re}(w)=0\Leftrightarrow\dfrac{2x^2-5x+2+2y^2}{(2x-1)^2+4y^2}=0\Leftrightarrow$

$2x^2-5x+2+2y^2=0\Leftrightarrow\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2+y^2=\dfrac{9}{16}$ κύκλος με κέντρο $K\left(\dfrac{5}{4},0\right)$ και $\rho=\dfrac{3}{4}$

1.322. $\dfrac{z}{z+2i}=\dfrac{x+yi}{x+(y+2)i}=\dfrac{(x+yi)(x-(y+2)i)}{(x+(y+2)i)(x-(y+2)i)}=\dfrac{x^2+y^2+2y}{x^2+(y+2)^2}-\dfrac{2x}{x^2+(y+2)^2}i$

Είναι $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z}{z+2i}\right)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+y^2+2y}{x^2+(y+2)^2}=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+2y=0 \Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=1$

κύκλος με $K(0,-1)$ και $\rho=1$ εκτός του $(0,-2)$.

1.323. $\dfrac{\overline{z}^2}{z-1}=\dfrac{(x-yi)^2}{(x-1)+yi}=\dfrac{(x^2-2xyi-y^2)((x-1)-yi)}{((x-1)+yi)((x-1)-yi)}=$

$$=\frac{(x^2-y^2)(x-1)-2xy^2}{(x-1)^2+y^2}-\frac{y(3x^2-2x-y^2)}{(x-1)^2+y^2}i$$

$$\frac{\overline{z}^2}{z-1}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{\overline{z}^2}{z-1}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{y(3x^2-2x-y^2)}{(x-1)^2+y^2}=0 \Leftrightarrow y=0 \text{ ή } 3x^2-2x-y^2=0$$

Ο γ.τ. του $M(z)$ αποτελείται από τα σημεία του άξονα x΄x εκτός από το $(1,0)$ και από τα σημεία της γραμμής $3x^2-2x-y^2=0$.

1.324. $w=\dfrac{z-2i}{2z-1}=\dfrac{2x^2-x+2y^2-4y}{(2x-1)^2+4y^2}+\dfrac{-4x-y+2}{(2x-1)^2+4y^2}i$

$$w\in I \Leftrightarrow \operatorname{Re}(w)=0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-x+2y^2-4y}{(2x-1)^2+4y^2}=0 \Leftrightarrow 2x^2-x+2y^2-4y=0 \Leftrightarrow$$

$\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+(y-1)^2=\dfrac{17}{16}$ κύκλος με $K\left(\dfrac{1}{4},1\right)$ και $\rho=\dfrac{\sqrt{17}}{4}$ εκτός του $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$

1.325. $w=\dfrac{z+1}{z-2i}=\dfrac{x^2+x+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2}+\dfrac{2x-y+2}{x^2+(y-2)^2}i$

$$w\in I \Leftrightarrow \operatorname{Re}(w)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2}=0 \Leftrightarrow x^2+x+y^2-2y=0 \Leftrightarrow$$

$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\dfrac{5}{4}$. Κύκλος με $K\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$ και $\rho=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ εκτός του $(0,2)$.

1.326. $(1+i)^{12}=\left((1+i)^2\right)^6=(2i)^6=-64$

$(6+8i)^{2|z|+1}-(1+i)^{12}=990\cdot 10^{|z|}+1064 \Leftrightarrow (6+8i)^{2|z|+1}+64=990\cdot 10^{|z|}+1064 \Leftrightarrow$

$(6+8i)^{2|z|+1}=990\cdot 10^{|z|}+1000$, άρα και

$\left|(6+8i)^{2|z|+1}\right|=\left|990\cdot 10^{|z|}+1000\right| \Leftrightarrow |6+8i|^{2|z|+1}=990\cdot 10^{|z|}+1000 \Leftrightarrow$

$10^{2|z|+1}=990\cdot 10^{|z|}+1000 \Leftrightarrow 10\left(10^{|z|}\right)^2-990\cdot 10^{|z|}-1000=0 \Leftrightarrow$

$\left(10^{|z|}\right)^2-99\cdot 10^{|z|}-100=0 \Leftrightarrow 10^{|z|}=-1$ που είναι αδύνατο ή

$10^{|z|}=100 \Leftrightarrow |z|=2$

1.327. $(4-3i)^{2|z|}=10+3\cdot5^{|z|}$. Είναι

$$\left|(4-3i)^{2|z|}\right|=\left|10+3\cdot5^{|z|}\right|\Leftrightarrow|4-3i|^{2|z|}=10+3\cdot5^{|z|}\Leftrightarrow5^{2|z|}-3\cdot5^{|z|}-10=0\Leftrightarrow$$

$5^{|z|}=-2$ αδύνατο ή $5^{|z|}=5\Leftrightarrow|z|=1$

1.328.i. $|4z+\bar{z}|=15\Leftrightarrow|5x+3yi|=15\Leftrightarrow25x^2+9y^2=225\Leftrightarrow\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

ii. Ορισμός έλλειψης $\alpha=5,\ \beta=3,\ \gamma=4$

iii. $\left(|z-4i|+|z+4i|\right)^2=100\Leftrightarrow|z-4i|^2+2|z-4i||z+4i|+|z+4i|^2=100\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow$

$\left|z^2\right|+\left|z^2+16\right|=34$

1.329. Είναι $\alpha^2=4\Leftrightarrow\alpha=2$, $\beta^2=3\Leftrightarrow4-\gamma^2=3\Leftrightarrow\gamma^2=1\Leftrightarrow\gamma=1$.

Η έλλειψη έχει εστίες $E'(-1,0)$, $E(1,0)$ και μεγάλο άξονα $(AA')=2\alpha=4$

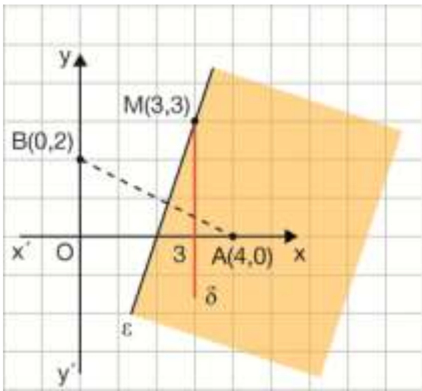
Από τον ορισμό της έλλειψης, έχουμε:

$$|z+1|+|z-1|=4\Leftrightarrow\left(|z+1|+|z-1|\right)^2=4^2\Leftrightarrow|z+1|^2+2|z+1||z-1|+|z-1|^2=16\Leftrightarrow$$

$$(z+1)(\bar{z}+1)+2\left|z^2-1\right|+(z-1)(\bar{z}-1)=16\Leftrightarrow$$

$$z\bar{z}+z+\bar{z}+1+2\left|z^2-1\right|+z\bar{z}-z-\bar{z}+1=16\Leftrightarrow2z\bar{z}+2\left|z^2-1\right|=14\Leftrightarrow$$

$$\left|z^2\right|+\left|z^2-1\right|=7$$



1.330. $|z-2i|^2=|z-4|^2\Leftrightarrow$

$$(z-2i)\left(\bar{z}-2i\right)=(z-4)\left(\bar{z}-4\right)\Leftrightarrow$$

$$z\bar{z}+2iz-2i\bar{z}+4=z\bar{z}-4z-4\bar{z}+16\Leftrightarrow$$

$$2i\left(z-\bar{z}\right)+4\left(z+\bar{z}\right)-12=0$$

Αν $z=x+yi$, τότε $z-\bar{z}=2yi$, $z+\bar{z}=2x$,

άρα: $2i(2yi)+4\cdot2x-12=0\Leftrightarrow-4y+8x-12=0$

και $\varepsilon: y=2x-3$.

Επειδή $|z-2i|\geq|z-4|$, το σύνολο των εικόνων του z είναι το ημιεπίπεδο (ε, A).

Επίσης $z+\bar{z}=6\Leftrightarrow2x=6\Leftrightarrow x=3$.

Άρα για να ισχύουν και τα δύο ταυτόχρονα, πρέπει οι z να ανήκουν στην ημιευθεία $M\delta$, όπου $M(3,3)$.

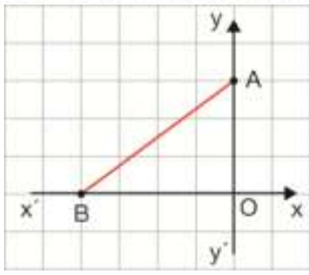
1.331. Εστω $z=x+yi$, τότε: $|2-x-yi|^2\leq4-|x+yi|^2\Leftrightarrow$

$$(2-x)^2+y^2\leq4-\left(x^2+y^2\right)\Leftrightarrow4-4x+x^2+y^2\leq4-x^2-y^2\Leftrightarrow$$

$$2x^2+2y^2-4x\leq0\Leftrightarrow x^2+y^2-2x\leq0\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2\leq1\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2\leq1$$

Άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι τα σημεία του κυκλικού δίσκου

$C:(x-1)^2+y^2\leq1$ με κέντρο το σημείο $K(1,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.



1.332. Εστω $A(3,0)$, $B(-4,0)$ και $M(z)$. Τότε

$|z-3i|+|z+4|=5 \Leftrightarrow |\overrightarrow{MA}|+|\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{AB}|$, αφού

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$ Άρα ο γ.τ. του M είναι το

ευθύγραμμο τμήμα AB.

1.333.α) $g\left(\sqrt{3}+2i\right)=\dfrac{i\left(\sqrt{3}-2i\right)-1}{\sqrt{3}+2i-i}=\dfrac{i\sqrt{3}+2-1}{\sqrt{3}+i}=\dfrac{\left(i\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}{\left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}=\dfrac{3i+\sqrt{3}+\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}^2+1}\Leftrightarrow$

$$g\left(\sqrt{3}+2i\right)=\frac{2\sqrt{3}+2i}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

β) Εχουμε $g(z)=1+i\Leftrightarrow \dfrac{i\bar{z}-1}{z-i}=1+i\Leftrightarrow i\bar{z}-1=(1+i)(z-i)\Leftrightarrow i\bar{z}-1=z-i+iz+1$.

Εστω $z=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$ τότε

$i(x-yi)-1=x+yi-i+i(x+yi)+1\Leftrightarrow xi+y-1=x+yi-i+xi-y+1\Leftrightarrow$

$(x-2y+2)+(y-1)i=0\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+2=0 \\ y-1=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ άρα

$z=i$ που απορρίπτεται. Οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

γ) $g(z)=\dfrac{i(x-yi)-1}{x+yi-i}=\dfrac{xi+y-1}{x+(y-1)i}=\dfrac{\left[(y-1)+xi\right]\left[x-(y-1)i\right]}{x^2+(y-1)^2}=$

$$=\frac{x(y-1)+x(y-1)}{x^2+(y-1)^2}+i\frac{x^2-(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}=\frac{2x(y-1)}{x^2+(y-1)^2}+i\frac{x^2-(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}$$

i) $g(z)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \operatorname{Im}(g(z))=0\Leftrightarrow \dfrac{x^2-(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}=0\Leftrightarrow x^2-(y-1)^2=0\Leftrightarrow$

$(x-y+1)(x+y-1)=0$. Άρα ο γ.τ. είναι οι ευθείες $x-y+1=0$ ή $x+y-1=0$ εκτός του σημείου $A(0,1)$.

ii) $g(z)\in I\Leftrightarrow \operatorname{Re}(g(z))=0\Leftrightarrow 2x(y-1)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $y=1$ εκτός του σημείου $A(0,1)$.

1.334. $w=\left(1-\dfrac{iz-2}{z+2i}\right)^{4k+1}=\left(1-\dfrac{i\left(z-\dfrac{2}{i}\right)}{z+2i}\right)^{4k+1}=\left(1-\dfrac{i\cancel{(z+2i)}}{\cancel{z+2i}}\right)^{4k+1}=(1-i)^{4k+1}\Leftrightarrow$

$$w=\left\{\left[(1-i)^2\right]^2\right\}^k(1-i)=(-4)^k(1-i)=(-4)^k-(-4)^k i$$

Η εικόνα του w είναι το σημείο $\left((-4)^k,-(-4)^k\right)$ και επαληθεύει την $y=-x$

1.335.α) $\Delta = 4\eta\mu^2 2\alpha - 8\eta\mu^2 2\alpha = -4\eta\mu^2 2\alpha \le 0$

$$z_{1,2} = \frac{2\eta\mu 2\alpha \pm i \cdot 2\eta\mu 2\alpha}{2} = \eta\mu 2\alpha\left(1 \pm i\right)$$

β) Η λύση $z = \eta\mu 2\alpha + i \cdot \eta\mu 2\alpha$ επαληθεύει την $y = x$ και η $z = \eta\mu 2\alpha - i \cdot \eta\mu 2\alpha$ την $y = -x$

1.336. $\left|(2z-1)^\nu\right| = \left|(z-i)^\nu\right| \Leftrightarrow |2z-1|^\nu = |z-i|^\nu \Leftrightarrow |2z-1| = |z-i| \Leftrightarrow$

$$\left|2(x+yi)-1\right|^2 = |x+yi-i|^2 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \left(x-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

1.337. $\left|(z-2)^\kappa \cdot |z-4|^\kappa\right| = \left|(z-4)^{2\kappa}\right| \Leftrightarrow |z-2|^\kappa \cancel{|z-4|^\kappa} = \left(|z-4|^\kappa\right)^{\cancel{2}} \Leftrightarrow$

$$|z-2|^\kappa = |z-4|^\kappa \Leftrightarrow |z-2|^2 = |z-4|^2 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x = 3$$

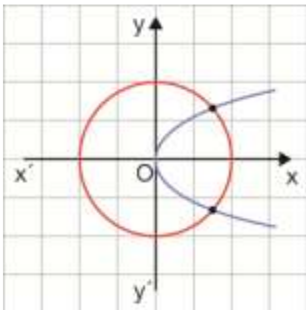
1.338. $\left|(2z-1)^\nu\right| = \left|(z+3)^\nu\right| \Leftrightarrow |2z-1|^\nu = |z+3|^\nu \Leftrightarrow \left|2(x+yi)-1\right|^2 = |x+yi+3|^2 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow$

$$\left(x-\frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{49}{9}$$

1.339.α) $\left|(3z-2i)^\nu\right| = \left|(2iz+1)^\nu\right| \Leftrightarrow |3z-2i|^\nu = |2iz+1|^\nu \Leftrightarrow$

$$\left|3(x+yi)-2i\right|^2 = \left|2i(x+yi)+1\right|^2 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x^2 + \left(y-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}.$$

β) Επειδή $d\left(K, x'x\right) = \frac{4}{5} > \frac{1}{5} = \rho$, ο κύκλος δεν τέμνει τον άξονα x΄x , οπότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.



1.340. $z^2 + \bar{z}^2 + 8\left(z+\bar{z}\right) - 2|\bar{z}|^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$x^2 + 2xyi - y^2 + x^2 - 2xyi - y^2 + 8 \cdot 2x - 2x^2 - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$y^2 = 4x$$

Ο γ.τ του $M(z)$ αποτελείται από τα σημεία του κυκλικού δίσκου κέντρου Ο και ακτίνας 4, που βρίσκονται στο εσωτερικό της παραβολής $y^2 = 4x$.

1.341. $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3\lambda - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{x}{2} \\ y = 3\dfrac{x}{2} - 1 \end{cases} \Rightarrow y = \dfrac{3}{2}x - 1$. Ο γ.τ του $M(z)$ είναι η ευθεία $y = \dfrac{3}{2}x - 1$

1.342. $\begin{cases} x = 2\eta\mu\theta \\ y = 3\sigma\upsilon\nu\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu\theta = \dfrac{x}{2} \\ \sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{y}{3} \end{cases}$. Είναι $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

1.343.α) $z(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda - 3i} = \dfrac{\lambda + 3i}{(\lambda - 3i)(\lambda + 3i)} = \dfrac{\lambda + 3i}{(\lambda^2 + 9)} = \dfrac{\lambda}{\lambda^2 + 9} + \dfrac{3}{\lambda^2 + 9}i$.

Είναι: $z(1) = \dfrac{1}{10} + \dfrac{3}{10}i$ και $z(2) = \dfrac{2}{13} + \dfrac{3}{13}i$. Οπότε:

$$w = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}i + \frac{1}{\frac{2}{13} + \frac{3}{13}i} = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}i + 2 - 3i = \frac{21}{10} - \frac{27}{10}i.$$

β) Είναι $\mathrm{Re}(z(\lambda)) = \dfrac{\lambda}{\lambda^2 + 9}$ και $\mathrm{Im}(z(\lambda)) = \dfrac{3}{\lambda^2 + 9}$, οπότε:

$$\mathrm{Re}(z(\lambda)) + \mathrm{Im}(z(\lambda)) = 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\lambda^2 + 9} + \frac{3}{\lambda^2 + 9} = 0 \Leftrightarrow \lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -3.$$

Τότε $z(-3) = \dfrac{-3}{18} + \dfrac{3}{18}i = -\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6}i$.

γ) Εστω $z(\lambda) = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$. Τότε $\begin{cases} x = \dfrac{\lambda}{\lambda^2 + 9} \\ y = \dfrac{3}{\lambda^2 + 9} \end{cases}$ (1), άρα $\begin{cases} x^2 = \dfrac{\lambda^2}{(\lambda^2 + 9)^2} \\ y^2 = \dfrac{9}{(\lambda^2 + 9)^2} \end{cases}$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε $x^2 + y^2 = \dfrac{\lambda^2 + 9}{(\lambda^2 + 9)^2} = \dfrac{1}{\lambda^2 + 9}$.

Από την σχέση (1) όμως έχουμε $y = \dfrac{3}{\lambda^2 + 9} \Leftrightarrow \dfrac{y}{3} = \dfrac{1}{\lambda^2 + 9}$.

Άρα $x^2 + y^2 = \dfrac{y}{3} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2\cdot\dfrac{y}{6} + \dfrac{1}{36} \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \dfrac{1}{6}\right)^2 = \dfrac{1}{36}$.

Οπότε ο γ.τ. του $M(z)$ είναι κύκλος με κέντρο $K\left(0, \dfrac{1}{6}\right)$ και ακτίνα $\rho = \dfrac{1}{6}$

1.344. $\overline{z - zi} = \dfrac{1}{\lambda} + \lambda i \Leftrightarrow x + y = \dfrac{1}{\lambda}$ και $x - y = \lambda$. Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη, έχουμε: $x^2 - y^2 = 1$. O γ.τ. του $M(z)$ είναι ισοσκελής υπερβολή με $\alpha = \beta = 1$ και $\gamma = \sqrt{2}$.

1.345. $4x(1-i) + 3y(1+i) = \dfrac{144}{\lambda} - \lambda i \Leftrightarrow 4x + 3y = \dfrac{144}{\lambda}$ και $4x - 3y = \lambda$.

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη, έχουμε: $16x^2 - 9y^2 = 144 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

1.346.α) $\Delta = -4\eta\mu^2\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta \le 0$, $z_{1,2} = \dfrac{2}{\sigma\upsilon\nu\theta} \pm i\varepsilon\varphi\theta$

β) Αν $z = x + yi$, τότε: $x = \dfrac{2}{\sigma\upsilon\nu\theta} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta = \dfrac{4}{x^2}$ και

$y = \varepsilon\varphi\theta \Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2\theta = y^2 \Leftrightarrow \dfrac{\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = y^2 \Leftrightarrow \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = y^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} - 1 = y^2 \Leftrightarrow$

$\dfrac{x^2}{4} - 1 = y^2 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$ $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = \sqrt{5}$. Εστίες $E'\left(-\sqrt{5}, 0\right)$, $E\left(\sqrt{5}, 0\right)$

1.347.α) $x = \lambda + 1 \Leftrightarrow \lambda = x - 1$, $y = 2\lambda - 1 = 2(x-1) - 1 = 2x - 3$

β) $\lambda_\delta \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_\delta = -\dfrac{1}{2}$ και $\delta: y - 2 = -\dfrac{1}{2}x \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{2}x + 2$

γ) Από το σύστημα των ε, δ προκύπτει $x = 2$, $y = 1$, άρα $z = 2 + i$

1.348.α) $z_1 = \dfrac{8}{5} - \dfrac{19}{5}i$, $z_2 = -\beta + \alpha i$

β) $10z_1 = 4\bar{z}_2 \Leftrightarrow 16 - 38i = -4\beta - 4\alpha i \Leftrightarrow \beta = -4,\ \alpha = \dfrac{19}{2}$

γ) Είναι $3\alpha + \beta + 7 = 0$ (1) και $w = 5\alpha\bar{z}_1 - 3\beta i = 5\alpha\left(\dfrac{8}{5} + \dfrac{19}{5}i\right) - 3\beta i = 8\alpha + (19\alpha - 3\beta)i$

Αν $w = x + yi$, τότε $x = 8\alpha \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{x}{8}$ και $y = 19\alpha - 3\beta \Leftrightarrow \beta = \dfrac{19x}{24} - \dfrac{y}{3}$.

Με αντικατάσταση στην (1), προκύπτει: $7x - 2y + 42 = 0$

1.349. $|w| = \left|\dfrac{8}{z}\right| = \dfrac{8}{|z|} = 2$. Κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα 2.

1.350. Εστω $z = \alpha + \beta i$. Είναι $|z| = 2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 4$ (1)

Είναι $w = z + \dfrac{8i}{\bar{z}} = z + \dfrac{8iz}{z \cdot \bar{z}} = z + \dfrac{8i}{|z|^2} \Leftrightarrow w = z + \dfrac{8iz}{4} = z + 2iz = (1 + 2i)(\alpha + \beta i) \Leftrightarrow$

$w = (\alpha - 2\beta) + (2\alpha + \beta)i$

Αν $w = x + yi$, τότε $x = \alpha - 2\beta$ και $y = 2\alpha + \beta$, τότε

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta = x \\ 2\alpha + \beta = y \end{cases} \begin{vmatrix} \\ \cdot 2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta = x & (2) \\ 4\alpha + 2\beta = 2y \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει:

$5\alpha = x + 2y \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{x + 2y}{5}$ και λόγω της (2) είναι $\beta = \dfrac{y - 2x}{5}$. Η σχέση (1) γίνεται:

$\left(\dfrac{y + 2x}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{y - 2x}{5}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 + 4y^2 + 4xy}{25} + \dfrac{y^2 + 4x^2 - 4xy}{25} = 4 \Leftrightarrow$

$x^2 + 4y^2 + 4xy + y^2 + 4x^2 - 4xy = 100 \Leftrightarrow 5x^2 + 5y^2 = 100 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 20$

Επομένως, ο γ.τ. των εικόνων $N(w)$, είναι κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα $\rho=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

1.351. Επειδή $|z|=\frac{1}{3}$, θέτουμε $z=\alpha+\beta i$ και ισχύει $\alpha^2+\beta^2=\frac{1}{9}$ (1)

Εστω $w=x+yi$. Τότε:

$$w=z-\frac{1}{z}\Leftrightarrow x+yi=\alpha+\beta i-\frac{1}{\alpha+\beta i}\Leftrightarrow x+yi=\alpha+\beta i-\frac{\alpha-\beta i}{\alpha^2+\beta^2}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$x+yi=\alpha+\beta i-\frac{\alpha-\beta i}{\frac{1}{9}}\Leftrightarrow x+yi=\alpha+\beta i-9\alpha+9\beta i\Leftrightarrow x+yi=-8\alpha+10\beta i$$

Οπότε $\begin{cases}x=-8\alpha\\ y=10\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{x}{8}=\alpha\\ \frac{y}{10}=\beta\end{cases}$

Η (1) γίνεται:

$$\left(-\frac{x}{8}\right)^2+\left(\frac{y}{10}\right)^2=\frac{1}{9}\Leftrightarrow\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=\frac{1}{9}\Leftrightarrow\frac{9x^2}{64}+\frac{9y^2}{100}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{\frac{64}{9}}+\frac{y^2}{\frac{100}{9}}=1$$

Άρα ο γ.τ. της εικόνας του μιγαδικού w είναι η έλλειψη $\frac{x^2}{\frac{64}{9}}+\frac{y^2}{\frac{100}{9}}=1$.

1.352. Εστω $z=\alpha+\beta i$ και $w=x+yi$. Τότε $\alpha^2+\beta^2=4$ (1) και

$$w=z+\frac{1}{z}=\alpha+\beta i+\frac{1}{\alpha+\beta i}=\alpha+\beta i+\frac{\alpha-\beta i}{\cancel{\alpha^2+\beta^2}^{\,4}}=\alpha+\beta i+\frac{\alpha}{4}-\frac{\beta}{4}i=\frac{5\alpha}{4}+\frac{3\beta}{4}i\Leftrightarrow$$

$$x=\frac{5\alpha}{4}\Leftrightarrow\alpha=\frac{4x}{5}\text{ και }y=\frac{3\beta}{4}\Leftrightarrow\beta=\frac{4y}{3}$$

Η (1) γίνεται: $\frac{16x^2}{25}+\frac{16y^2}{9}=4\Leftrightarrow\frac{x^2}{\frac{25}{4}}+\frac{y^2}{\frac{9}{4}}=1$

1.353. Εστω $z=\alpha+\beta i$ και $w=x+yi$. Τότε $|z|=2\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2=4$ (1) και

$$w=2z+\bar{z}=3\alpha-\beta i\Leftrightarrow x=3\alpha\Leftrightarrow\alpha=\frac{x}{3}\text{ και }\beta=-y.$$

$$(1)\Rightarrow\frac{x^2}{9}+y^2=4\Leftrightarrow\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$$

1.354. **α)** $w=\frac{z+12}{z-12}=\frac{9x^2+16y^2-144}{(3x-12)^2+16y^2}+\frac{96y}{(3x-12)^2+16y^2}i$

$$\operatorname{Re}(w)=0 \Leftrightarrow \frac{9x^2+16y^2-144}{(3x-12)^2+16y^2}=0 \Leftrightarrow 9x^2+16y^2-144=0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1 \ (1)$$

β) Αν $z=\alpha+\beta i$, τότε $\alpha=3x \Leftrightarrow x=\dfrac{\alpha}{3}$ και $\beta=-4y \Leftrightarrow y=-\dfrac{\beta}{4}$.

$$(1) \Rightarrow \frac{\alpha^2}{144}+\frac{\beta^2}{144}=1 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2=144$$

1.355. $\Delta=-16\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2 w$, $z_{1,2}=\alpha\eta\mu w \pm 2\alpha i\sigma\upsilon\nu w$

α) $x=\alpha\eta\mu w \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{x}{\eta\mu w}$, $y=-2\alpha\sigma\upsilon\nu w \Leftrightarrow y=-2\dfrac{x}{\eta\mu w}\sigma\upsilon\nu w=-2\sigma\varphi w\cdot x$

β) $\eta\mu w=\dfrac{x}{\alpha}$, $\sigma\upsilon\nu w=-\dfrac{y}{2\alpha}$ και $\eta\mu^2 w+\sigma\upsilon\nu^2 w=\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{4\alpha^2}=1$

1.356. $z=2-\sigma\upsilon\nu\theta-i\eta\mu\theta \Leftrightarrow z-2=-\sigma\upsilon\nu\theta-i\eta\mu\theta$, $|z-2|=\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta}=1 \Leftrightarrow$

$$\left|\frac{3}{w}-2\right|=1 \Leftrightarrow |3-2w|=|w| \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=1$$

1.357.α) $|z+2|=2|z-4| \Leftrightarrow |z+2|^2=4|z-4|^2 \Leftrightarrow (z+2)(\bar z+2)=4(z-4)(\bar z-4) \Leftrightarrow$

$z\bar z+2z+2\bar z+4=4(z\bar z-4z-4\bar z+16) \Leftrightarrow z\bar z+2z+2\bar z+4=16z-16\bar z+64 \Leftrightarrow$

$3z\bar z-18z-18\bar z+60=0 \Leftrightarrow z\bar z-6z-6z+20=0 \Leftrightarrow z\bar z-6z-6z+36=16 \Leftrightarrow$

$z(\bar z-6)-6(\bar z-6)=16 \Leftrightarrow (z-6)(\bar z-6)=16 \Leftrightarrow |z-6|^2=16 \Leftrightarrow |z-6|=4$

Οπότε ο γ.τ. του z είναι ο κύκλος με κέντρο το $K(6,0)$ και ακτίνα $\rho_1=4$.

β) $w=\dfrac{z-10}{z-6} \Leftrightarrow wz-6w=z-10 \Leftrightarrow wz-z=6w-10 \Leftrightarrow z(w-1)=6w-10 \ (1)$

Αν $w=1$, τότε η (1) είναι αδύνατη, οπότε για $w\neq 1$ ισχύει: $z=\dfrac{6w-10}{w-1}$

Είναι $|z-6|=4 \Leftrightarrow \left|\dfrac{6w-10}{w-1}-6\right|=4 \Leftrightarrow \left|\dfrac{\cancel{6w}-10-\cancel{6w}+6}{w-1}\right|=4 \Leftrightarrow$

$$\frac{4}{|w-1|}=4 \Leftrightarrow |w-1|=1$$

Άρα , ο γ.τ. του w είναι κύκλος με κέντρο το $(1,0)$ και ακτίνα $\rho_2=1$.

γ) Επειδή: $(K\Lambda)=\sqrt{(6-1)^2+0}=5=\rho_1+\rho_2$,οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

1.358.α) Αν $z=x+yi$, τότε $w=(z+1)(\bar z-2i)=x^2+y^2+2y+x-(2x+y+2)i$

β) $w\in\mathbb{R} \Leftrightarrow 2x+y+2=0$

γ) $w\in I \Leftrightarrow x^2+y^2+2y+x=0 \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\dfrac{5}{4}$

1.359. α) $2z - i\bar{z} = 3 \Leftrightarrow 2x + 2yi - i(x - yi) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

β) $|w + z| = |z^2| \Leftrightarrow |w + 2 + i| = 5$

γ) $u = \dfrac{2 - i + i(2+i)}{2 - i - 1} = i$, $u^{2010} = \left(i^4\right)^{502} i^2 = -1$

1.360. $(AB) = |z_1 - z_2| = |2 - 4i + 3 - i| = |5 - 5i| = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{50}$

$(B\Gamma) = |z_2 - z_3| = |-3 + i - 1 - 5i| = |-4 - 4i| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{32}$ και

$(A\Gamma) = |z_1 - z_3| = |2 - 4i - 1 - 5i| = |1 - 9i| = \sqrt{1^2 + (-9)^2} = \sqrt{82}$.

Παρατηρούμε ότι

$(A\Gamma)^2 = (AB)^2 + (B\Gamma)^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{82}\right)^2 = \left(\sqrt{50}\right)^2 + \left(\sqrt{32}\right)^2 \Leftrightarrow 82 = 50 + 32$,

οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο B

1.361. Για τα μήκη των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, ισχύει:

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = |iz - z| = |z \cdot (-1 + i)| = |z| \cdot |-1 + i| = |z| \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \cdot |z|$

$\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right| = |-iz - z| = |-z \cdot (1 + i)| = |z| \cdot |1 + i| = |z| \cdot \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \cdot |z|$ και

$\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right| = |-iz - iz| = |-2iz| = |-2i| \cdot |z| = 2|z|$.

Επειδή $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|$, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές. Ακόμη, έχουμε:

$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2 = \left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|^2 \Leftrightarrow 2|z|^2 + 2|z|^2 = 4|z|^2$, που ισχύει.

Δηλαδή οι πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$ ικανοποιούν το πυθαγόρειο θεώρημα, οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $A = 90°$.

1.362. $2i\bar{z} - z^2 = 0 \Leftrightarrow 2i(x - yi) - (x + yi)^2 = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left(2y - x^2 + y^2\right) + 2x(1 - y)i = 0 \Leftrightarrow$

$2y - x^2 + y^2 = 0 \;(1)$ ή $x(1 - y) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $y = 1$.

Αν $x = 0$, $(1) \Rightarrow 2y + y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$ απορρίπτεται ή $y = -2$, δηλαδή $A(0, -2)$.

Αν $y = 1$, τότε $(1) \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$, $B\left(\sqrt{3}, 1\right)$, $\Gamma\left(-\sqrt{3}, 1\right)$.

Είναι $(AB) = (A\Gamma) = (B\Gamma) = 2\sqrt{3}$, οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

1.363. $z^2 + i(i - 2\bar{z} \cdot i) + 2 = 0 \Leftrightarrow (x + yi)^2 + i^2(1 - 2x + 2yi) + 2 = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$

$x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0$ και $2y(1 - x) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ή $x = 1$.

Αν $y = 0$, τότε $x = -1$, άρα $A(-1, 0)$ και αν $x = 1$, τότε $y = \pm 2$, άρα

$B(1, 2)$, $\Gamma(1, -2)$

Είναι $(AB) = (A\Gamma) = 2\sqrt{2}$

1.364. $A(-1,2)$, $B(-1,-2)$, $\Gamma(1,0)$

α) $A\Gamma^2+B\Gamma^2=AB^2 \Leftrightarrow \Gamma=90^\circ$

β) Επειδή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου είναι το μέσο της υποτείνουσας ΑΒ. Είναι $K(-1,0)$ και $\rho=(KA)=2$, άρα

$C:(x+1)^2+y^2=4$

1.365. $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2=\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|^2 \Leftrightarrow |2-z-z|^2+|2+z-z|^2=|2+z-2+z|^2 \Leftrightarrow$

$|2-2z|^2+4=4|z|^2 \Leftrightarrow (2-2z)(2-2\overline{z})+4=4|z|^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x=1$. Άρα $z=1+\lambda i,\ \lambda\in\mathbb{R}$

1.366. Εστω Α,Β,Γ οι εικόνες των μιγαδικών z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1+i\sqrt{3}z_2$ αντίστοιχα.

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|(z_1+z_2)-(z_2-z_2)\right|=|z+z_2-z_1+z_2|=|2z_2|=2|z_2|$.

$\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|=\left|(z_1-z_2)-\left(z_1+i\sqrt{3}z_2\right)\right|=\left|z_1-z_2-z_1-i\sqrt{3}z_2\right| \Leftrightarrow$

$\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|=\left|-z_2+i\sqrt{3}z_2\right|=\left|\left(-1+i\sqrt{3}\right)z_2\right|=\left|\left(-1-i\sqrt{3}\right)\right||z_2|=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\,|z_2|=2|z_2|$

$\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|=\left|(z_1+z_2)-\left(z_1+i\sqrt{3}z_2\right)\right|=\left|z_1+z_2-z_1-i\sqrt{3}z_2\right| \Leftrightarrow$

$\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|=\left|z_2\left(1-i\sqrt{3}\right)\right|=\left|1-i\sqrt{3}\right||z_2|=2|z_2|$

Επειδή $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|=\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|$, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

1.367. $|w_1-w_2|=|z_1||z_2-z_3|$, $|w_2-w_3|=|z_3||z_1-z_2|$, $|w_3-w_1|=|z_2||z_3-z_1|$

Αρκεί $|z_2-z_3|=|z_1-z_2|=|z_3-z_1|$

$z_1+z_2+z_3=0 \Leftrightarrow z_2=-z_1-z_3$ και

$|z_2-z_3|=|z_1-z_2| \Leftrightarrow |-z_1-z_3-z_3|=|z_1+z_1+z_3| \Leftrightarrow |-z_1-2z_3|^2=|2z_1+z_3|^2 \Leftrightarrow \ldots$

1.368. Είναι $\left|\overrightarrow{OA}\right|=|z_1|$, $\left|\overrightarrow{OB}\right|=|z_2|$ και $\left|\overrightarrow{AB}\right|=|z_1-z_2|$. Επειδή το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο στο Ο, ισχύει:

$\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\left|\overrightarrow{OB}\right|^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 \Leftrightarrow |z_1|^2+|z_2|^2=|z_1-z_2|^2 \Leftrightarrow z_1\cdot\overline{z_1}+z_2\cdot\overline{z_2}=(z_1-z_2)\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right) \Leftrightarrow$

$z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2} \Leftrightarrow z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=0$

$|z_1-z_2|=|z_1+z_2| \Leftrightarrow |z_1-z_2|^2=|z_1+z_2|^2 \Leftrightarrow (z_1-z_2)\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)=(z_1+z_2)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right) \Leftrightarrow$

$z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}=z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2} \Leftrightarrow$

$2z_1\overline{z_2}+2\overline{z_1}z_2=0 \Leftrightarrow z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=0$ που ισχύει.

1.369. Επειδή το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές, ισχύει ότι:

$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|$ ή $\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$ ή $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Αν $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right|$, τότε $|z| = |w| \Leftrightarrow |z| = |z(1+\alpha i)| \Leftrightarrow |z| = |z||1+\alpha i| \overset{|z|\neq 0}{\Leftrightarrow}$

$|1+\alpha i| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+\alpha^2} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 0$ που είναι αδύνατο.

Αν $\left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$, τότε $|w| = |z-w| \Leftrightarrow |z(1+\alpha i)| = |z - z(1+\alpha i)| \Leftrightarrow$

$|z||1+\alpha i| = |-z\alpha i| \Leftrightarrow |z||1+\alpha i| = |z|\alpha \Leftrightarrow \sqrt{1+\alpha^2} = \alpha \Leftrightarrow 1+\alpha^2 = \alpha^2$ που είναι αδύνατο.

Αν $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$, τότε $|z| = |z-w| \Leftrightarrow$

$|z| = |z - z(1+\alpha i)| \Leftrightarrow |z| = |-z\alpha i| \Leftrightarrow |z| = |z|\alpha \overset{|z|\neq 0}{\Leftrightarrow} \alpha = 1.$

Τότε $w = z(1+i)$ και $|w| = |z(1+i)| = |z||1+i| = \sqrt{2}|z|$.

Είναι $|z-w|^2 + |z|^2 = |z|^2 + |z|^2 = 2|z|^2$ και $|w|^2 = 2|z|^2$, δηλαδή $|z-w|^2 + |z|^2 = |w|^2 \Leftrightarrow$

$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OB}\right|^2$ οπότε το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο στο A.

1.370. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{A\Gamma}\right| = \left|\overrightarrow{B\Gamma}\right| \Leftrightarrow |z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = |z_3 - z_2|$. Είναι

$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3 \Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 - z_1z_2 = z_2z_3 + z_1z_3 - z_3^2 \Leftrightarrow$

$z_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2 = z_3(z_2 - z_3) - z_1(z_2 - z_3) \Leftrightarrow (z_1 - z_2)^2 = (z_3 - z_1)(z_2 - z_3)$

Άρα $|z_1 - z_2|^2 = |(z_3 - z_1)(z_2 - z_3)| \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^3 = |z_1 - z_2||z_3 - z_1||z_2 - z_3|$

Όμοια αποδεικνύεται ότι $|z_2 - z_3|^3 = |z_1 - z_2||z_3 - z_1||z_2 - z_3|$

και $|z_3 - z_1|^3 = |z_1 - z_2||z_3 - z_1||z_2 - z_3|$

οπότε $|z_1 - z_2|^3 = |z_2 - z_3|^3 = |z_3 - z_1|^3 \Leftrightarrow |z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$.

1.371. Εστω z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 - 4z + \lambda = 0$.

Τότε $z_1 + z_2 = 4$ και $z_1 \cdot z_2 = \lambda$.

Πρέπει $\left|\overrightarrow{MA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{MB}\right| = 1 \Leftrightarrow |w - z_1| \cdot |w - z_2| = 1 \Leftrightarrow$

$|(w - z_1)(w - z_2)| = 1 \Leftrightarrow |w^2 - z_1w - z_2w + z_1z_2| = 1 \Leftrightarrow$

$|w^2 - (z_1 + z_2)w + z_1z_2| = 1 \Leftrightarrow |(2-i)^2 - 4\cdot(2-i) + \lambda| = 1 \Leftrightarrow$

$|4 + i^2 - 4i - 8 + 4i + \lambda| = 1 \Leftrightarrow |\lambda - 5| = 1 \Leftrightarrow \lambda - 5 = \pm 1 \Leftrightarrow \lambda = 6$ ή $\lambda = 4$.

1.372. Επειδή $(OA) = 2(OB)$, ισχύει ότι $|z| = 2|w|$.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο OAB έχουμε:

$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 \Leftrightarrow |z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 \Leftrightarrow (z-w)(\bar{z} - \bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{w} \Leftrightarrow$

$z\bar{z} - z\bar{w} - \bar{z}w + w\bar{w} = z\bar{z} + w\bar{w} \Leftrightarrow z\bar{w} + \bar{z}w = 0 \quad (1)$

Εστω ότι $|z| = 2|w| = \lambda > 0$, τότε $|z|^2 = \lambda^2 \Leftrightarrow z\bar{z} = \lambda^2 \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{\lambda^2}{z}$ και

$|w| = \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow |w|^2 = \frac{\lambda^2}{4} \Leftrightarrow w\overline{w} = \frac{\lambda^2}{4} \Leftrightarrow \overline{w} = \frac{\lambda^2}{4w}$.

Η (1) γίνεται: $\frac{z\lambda^2}{4w} + \frac{\lambda^2}{z} w = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 z^2 + 4\lambda^2 w^2 = 0 \Leftrightarrow z^2 + 4w^2 = 0$

1.373. **α)** Είναι $\Delta = 4 - 4\cdot 2 = -4 < 0$, οπότε $z_{1,2} = \frac{-2 \pm 2i}{4}$

ή $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ και $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

β) Είναι $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = -\frac{1}{2}(1-i)$, οπότε $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

$z^2 = \frac{1}{4}(1-i)^2 = \frac{1}{4}(1-2i-1) = -\frac{1}{2}i$, άρα $B\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

Ομοίως $z^3 = z^2 z = -\frac{1}{2}i\left[-\frac{1}{2}(1-i)\right] = \frac{1}{4}i(1-i) = \frac{1}{4}i + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$, άρα $\Gamma\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

.Εχουμε:

$(AB) = \sqrt{\left(0 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$(A\Gamma) = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{10}{16}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$ και

$(B\Gamma) = \sqrt{\left(0 - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{10}{16}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

Είναι $(A\Gamma) = (B\Gamma)$, οπότε το $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και επειδή

$(A\Gamma)^2 + (B\Gamma)^2 = (AB)^2 \Leftrightarrow \frac{10}{16} + \frac{10}{16} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$,

1.374. Θα δείξουμε ότι $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$ Από την υπόθεση ισχύει

$(z_3 - z_1)(z_2 - z_3) = (z_1 - z_2)^2$ ή $(z_1 - z_2)(z_3 - z_1)(z_2 - z_3) = (z_2 - z_3)^3$ (1)

Ομοίως $(z_1 - z_2)(z_3 - z_1) = (z_2 - z_3)^2$ ή $(z_2 - z_3)(z_1 - z_2)(z_3 - z_1) = (z_2 - z_3)^3$ (2)

Τότε από (1) και (2) έχουμε $(z_2 - z_3)^3 = (z_1 - z_2)^3$ ή $|z_2 - z_3| = |z_1 - z_2|$ (3)

Από την υπόθεση έχουμε $(z_1 - z_2)(z_3 - z_1) = (z_2 - z_3)^2$ ή $|z_1 - z_2||z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|^2$

ή $|z_2 - z_3||z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|^2$ ή $|z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$ (4)

Από (3), (4) έχουμε $|z_2 - z_3| = |z_1 - z_2| = |z_3 - z_1|$.

Άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

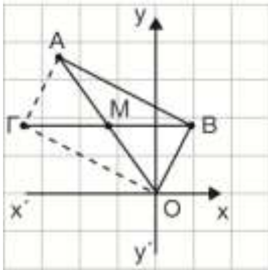
1.375. **α)** Εστω $w = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$. Τότε

$z = (1+i)(x+yi) = x + yi + xi - y = (x-y) + (x+y)i$.

Είναι $\left|\overrightarrow{OA}\right|^2=(x-y)^2+(x+y)^2=x^2-2xy+y^2+x^2+2xy+y^2 \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{OA}\right|^2=2x^2+2y^2$,

$\left|\overrightarrow{OB}\right|^2=x^2+y^2$ και $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=|z-w|^2=\left|(x-y)+(x+y)i-x-yi\right|=|-y+xi|=y^2+x^2$.

Παρατηρούμε ότι $\left|\overrightarrow{OB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=2x^2+2y^2=\left|\overrightarrow{OA}\right|^2$,



οπότε το τρίγωνο ΟΒΑ είναι ορθογώνιο στο Β.

β) Εστω Μ το μέσο της υποτείνουσας ΟΑ του τριγώνου ΟΒΑ.

Τότε $x_M=\dfrac{0+x-y}{2}=\dfrac{x-y}{2}$ και $y_M=\dfrac{0+x+y}{2}=\dfrac{x+y}{2}$.

Όμως το Μ είναι μέσο και της $B\Gamma$, οπότε:

$x_M=\dfrac{x_B+x_\Gamma}{2}=\dfrac{x+x_\Gamma}{2}$ και $y_M=\dfrac{y_B+y_\Gamma}{2}=\dfrac{y+y_\Gamma}{2}$, άρα

$$\begin{cases}\dfrac{x+x_\Gamma}{2}=\dfrac{x-y}{2}\\[2mm] \dfrac{y+y_\Gamma}{2}=\dfrac{x+y}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_\Gamma=-y\\ y_\Gamma=x\end{cases}$$, οπότε $\Gamma(-y,x)$ και $z_1=-y+xi$.

1.376. Εστω $z_1=\alpha+\beta i$, $z_2=\gamma+\delta i$

Τότε $z_1+z_2=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$ και $z_1-z_2=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i$ και $A(\alpha+\gamma,\ \beta+\delta)$, $B(\alpha-\gamma,\beta-\delta)$ Εχουμε διαδοχικά $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ ή

$(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)+(\beta+\delta)(\beta-\delta)=0 \Leftrightarrow \alpha^2-\gamma^2+\beta^2-\delta^2=0 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2=\gamma^2+\delta^2 \quad (1)$

$|z_1|=|z_2| \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{\gamma^2+\delta^2}$ που ισχύει λόγω της (1).

1.377.α) $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}=1 \Leftrightarrow z_1^2+z_2^2=z_1z_2 \ (1) \Leftrightarrow z_1^2-z_1z_2+z_2^2=0$

Είναι $z_1^3+z_2^3=(z_1+z_2)(z_1^2-z_1z_2+z_2^2)=0 \Leftrightarrow z_1^3+z_2^3=0 \Leftrightarrow z_1^3=-z_2^3$, άρα

$\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^3=-1$ και $\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^3=-1$.

Είναι $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{2004}+\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^{2007}+\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{2010}=\left[\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^3\right]^{668}+\left[\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^3\right]^{669}+\left[\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^3\right]^{670}=$

$$(-1)^{668}+(-1)^{669}+(-1)^{670}=1-1++1=1$$

β) Εστω Α,Β οι εικόνες των μιγαδικών z_1,z_2 αντίστοιχα. Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right| \Leftrightarrow |z_1|=|z_2|=|z_1-z_2|$

Ισχύει: $\left|z_1^3\right|=\left|-z_2^3\right| \Leftrightarrow |z_1|^3=|z_2|^3 \Leftrightarrow |z_1|=|z_2|$

Από τη σχέση (1) έχουμε: $z_1^2+z_2^2-z_1z_2=0 \Leftrightarrow z_1^2+z_2^2-2z_1z_2=-z_1z_2 \Leftrightarrow$

$$(z_1-z_2)^2=-z_1z_2$$

Οπότε $\left|(z_1-z_2)^2\right| = |-z_1z_2| \Leftrightarrow |z_1-z_2|^2 = |z_1||z_2| \Leftrightarrow |z_1-z_2|^2 = |z_1|^2 \Leftrightarrow |z_1-z_2| = |z_1|$

1.378 $z^2|z|^{2010} + w^2|w|^{2010} = 0 \Leftrightarrow z^2|z|^{2010} = -w^2|w|^{2010}$

$\left|z^2|z|^{2010}\right| = \left|-w^2|w|^{2010}\right| \Leftrightarrow |z|^2|z|^{2010} = |w|^2|w|^{2010} \Leftrightarrow |z|^{2012} = |w|^{2012} \Leftrightarrow |z| = |w|$

1.379. $3|2x+y+2i|^2 - |2x+y+i-1|^2 = 14 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow y = -2x+1$ ή $y = -2x-2$

Τα σημεία τομής με τους άξονες είναι: $A(0,1)$, $B\left(\frac{1}{2},0\right)$, $\Gamma(0,-2)$ και $\Delta(-1,0)$.

$$E = (OAB) + (OA\Gamma) + (O\Gamma\Delta) + (OB\Delta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{9}{4}$$

1.380.α) $\left|\overrightarrow{OK}\right|^2 + \left|\overrightarrow{O\Lambda}\right| = \left|\overrightarrow{K\Lambda}\right|^2 \Leftrightarrow |z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = |z_1+z_2-z_1+z_2|^2 \Leftrightarrow$

$(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2) + (z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2) = 4|z_2|^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right|$

β) $|z_1| = |z_2| = |z_1-z_2| = 1$, $|z_1|^2 = 1 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}$, όμοια $\bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}$

$|z_1-z_2|^2 = 1 \Leftrightarrow (z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2) = 1 \Leftrightarrow |z_1|^2 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 + |z_2|^2 = 1 \Leftrightarrow$

$1 - z_1\frac{1}{z_2} + z_2\frac{1}{z_1} = 0 \Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 = z_1z_2$

1.381. $z^4 \cdot \bar{w} = 1 \Leftrightarrow \bar{w} = \frac{1}{z^4} \Leftrightarrow w = \frac{1}{\bar{z}^4}$, τότε

$\bar{z}^4 \cdot w^2 = 1 \Rightarrow \bar{z}^4\frac{1}{\bar{z}^8} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\bar{z}^4} = 1 \Leftrightarrow \bar{z}^4 = 1 \Leftrightarrow z^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z^2-1)(z^2+1) = 0 \Leftrightarrow$

$z = \pm 1,\ \pm i$

1.382. Εστω $w = \kappa \in \mathbb{R}^*$, δηλαδή $\frac{z_2-z_1}{z_4-z_3} = \kappa \Leftrightarrow z_2 - z_1 = \kappa(z_4-z_3)$,

άρα $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \kappa\left(\overrightarrow{O\Delta} - \overrightarrow{O\Gamma}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \kappa\overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

1.383.α) A, B, Γ συνευθειακά $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{B\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{B\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \lambda\left(\overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OB}\right)$,

$\lambda \in \mathbb{R}$. Οπότε $z_2 - z_1 = \lambda(z_3 - z_2) \Leftrightarrow \frac{z_1-z_2}{z_2-z_3} = \lambda \in \mathbb{R}$.

β) Εστω $w_1 = z$, $w_2 = z-1$, $w_3 = z^2$.

Τότε με βάση το ερώτημα α. τα A, B, Γ είναι συνευθειακά, αν ο μιγαδικός

$w = \frac{w_1-w_2}{w_2-w_3} = \frac{1}{z-1-z^2} \in \mathbb{R}$, οπότε

$w = \bar{w} \Leftrightarrow \frac{1}{z-1-z^2} = \frac{1}{\bar{z}-1-\bar{z}^2} \Leftrightarrow z-1-z^2 = \bar{z}-1-\bar{z}^2 \Leftrightarrow$

$$z^2-\bar{z}^2-z+\bar{z}=0 \Leftrightarrow (z-\bar{z})(z+\bar{z}+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z=\bar{z} \\ z+\bar{z}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z\in\mathbb{R} \\ 2x=1 \end{cases}$$

Άρα ο γ.τ. του z είναι ο άξονας $x'x$ εκτός του σημείου $(0,0)$ η ευθεία $x=\frac{1}{2}$ εκτός των σημείων $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $(1,0)$.

1.384. Ο αριθμός z είναι φανταστικός αν και μόνο αν ισχύει

$\bar{z}=-z$ ή $\overline{\left(\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right)}=-\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ ή $\frac{\bar{z}_1+\bar{z}_2}{\bar{z}_1-\bar{z}_2}=-\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ ή ... $2z\bar{z}_1=2z_2\bar{z}_2$

ή $|z_1|^2=|z_2|^2$ ή $|z_1|=|z_2|$ ή $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$

Η ισότητα $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$ δείχνει ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές ή ότι τα σημεία Ο, Α, Β είναι συνευθειακά.

1.385 $(AB)=|z_1-z_2|=|2i-1-i|=|-1+i|=\sqrt{2}$, $(B\Gamma)=|z_2-z_3|=|1+i-3-i|=|-2|=2$

$(A\Gamma)=|z_1-z_3|=|2i-3-i|=|-3+i|=\sqrt{10}$ και

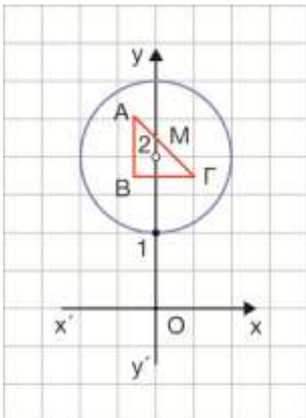
$(K\Lambda)=|w_1-w_2|=|-1+i-i|=|-1|=1$, $(\Lambda M)=|w_2-w_3|=|i-1-2i|=|-1-i|=\sqrt{2}$

$(KM)=|w_3-w_1|=|1+2i+1-i|=|2+i|=\sqrt{5}$.Παρατηρούμε ότι:

$\frac{(AB)}{(K\Lambda)}=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$, $\frac{(B\Gamma)}{(\Lambda M)}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ και

$\frac{(A\Gamma)}{(KM)}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{10}{5}}=\sqrt{2}$

Άρα τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $K\Lambda M$ είναι όμοια.



1.386. Εστω Μ η εικόνα του μιγαδικού $2i$. Τότε $M(0,2)$.

Είναι $z_1=2i-w \Leftrightarrow -w=z_1-2i$, οπότε και $|z_1-2i|=|-w|=|w|<1$ και $z_2=2i-w^2 \Leftrightarrow -w^2=z_2-2i$, άρα και $|z_2-2i|=|-w^2|=|w|^2<1$. Δηλαδή οι z_1, z_2, z_3 επαληθεύουν τη σχέση $|z-2i|<1$, οπότε οι εικόνες τους είναι εσωτερικά σημεία κύκλου, με κέντρο το Μ και ακτίνα 1. Επειδή το Ο είναι εξωτερικό σημείο του κυκλικού δίσκου που έχει κέντρο το Μ και ακτίνα 1, θα είναι και εξωτερικό σημείο του τριγώνου $AB\Gamma$.

1.387.α) Εστω $z=x+yi, x,y\in\mathbb{R}$, τότε $|z|=|z-2i| \Leftrightarrow |x+yi|=|x+(y-2)i| \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow y=1$

β) $|z|=2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2+1=2 \Leftrightarrow x=\pm1,\ z=\pm1+i$

γ) $z_1^4+z_2^4=\left[\left(1+i\right)^2\right]^2+\left[\left(-1+i\right)^2\right]^2=\left(2i\right)^2+\left(-2i\right)^2=-4-4=-8$

1.388.α) $\left(2-i\right)^2+\alpha\left(2-i\right)+\beta=0\Leftrightarrow...\Leftrightarrow\alpha=-4$ και $\beta=5$

β) $z_1=2-i$, $z_2=\bar{z}_1=2+i$

γ) $\left|z+z_1+i\right|=\left|z-z_2+2\right|\Leftrightarrow\left|z+2\right|=\left|z-i\right|\Leftrightarrow...\Leftrightarrow 4x+2y+3=0$

1.389.α) $\left|(1+iz)^{2014}(1-i\eta\mu\alpha)\right|=\left|(1-iz)^{2014}(1+i\eta\mu\alpha)\right|\Leftrightarrow$

$\left|(1+iz)^{2014}\right|\left|1-i\eta\mu\alpha\right|=\left|(1-iz)^{2014}\right|\left|1+i\eta\mu\alpha\right|\Leftrightarrow$

$\left|1+iz\right|^{2014}\cancel{\sqrt{1+\eta\mu^2\alpha}}=\left|1-iz\right|^{2014}\cancel{\sqrt{1+\eta\mu^2\alpha}}\Leftrightarrow\left|1+iz\right|^{2014}=\left|1-iz\right|^{2014}\Leftrightarrow$

$\left|1+iz\right|=\left|1-iz\right|$

β) $\left|1+iz\right|=\left|1-iz\right|\Leftrightarrow\left|i\left(z+\frac{1}{i}\right)\right|=\left|-i\left(z-\frac{1}{i}\right)\right|\Leftrightarrow\left|i\right|\left|z+\frac{i}{i^2}\right|=\left|-i\right|\left|z-\frac{i}{i^2}\right|\Leftrightarrow$

$\left|z-i\right|=\left|z+i\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{MB}\right|$

γ) $\left|z-i\right|^2=\left|z+i\right|^2\Leftrightarrow...\Leftrightarrow z=\bar{z}$

1.390.α) $\left|\left(1+iz\right)^{\nu}\right|=\left|\frac{4+2i}{\sqrt{2}+3\sqrt{2}i}\right|\Leftrightarrow\left|1+iz\right|^{\nu}=\frac{\sqrt{16+4}}{\sqrt{2+18}}\Leftrightarrow\left|1+iz\right|^{\nu}=1\Leftrightarrow\left|1+iz\right|=1$

β) $\left|1+iz\right|=1\Leftrightarrow\left|i\left(z+\frac{1}{i}\right)\right|=1\Leftrightarrow\left|i\right|\left|z+\frac{i}{i^2}\right|=1\Leftrightarrow\left|z-i\right|=1$

γ) $\left|z-i\right|\geq\left|\left|z\right|-\left|i\right|\right|\Leftrightarrow\left|\left|z\right|-1\right|\leq 1\Leftrightarrow -1\leq\left|z\right|-1\leq 1\Leftrightarrow 0\leq\left|z\right|\leq 2$

1.391. $\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2+\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 i=\alpha+\left(1-\alpha\right)i\Leftrightarrow\left(\frac{2x}{2}\right)^2+\left(\frac{2yi}{2i}\right)^2 i=\alpha+\left(1-\alpha\right)i\Leftrightarrow$

$x^2+y^2 i=\alpha+\left(1-\alpha\right)i$

α) $y=0\Leftrightarrow x^2+0\cdot i=\alpha+\left(1-\alpha\right)i\Leftrightarrow x^2=\alpha$ και $1-\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=1$

β) $\alpha=0$, τότε $x^2+y^2 i=i\Leftrightarrow x=0$ και $y=\pm1$, τότε $z=\pm i$, $z^2=-1\Leftrightarrow z^2+1=0$

γ) Επειδή $\alpha=x^2\geq 0$ και $1-\alpha=y^2\geq 0\Leftrightarrow\alpha\leq 1$, είναι $0\leq\alpha\leq 1$

δ) $x^2+y^2=\alpha+1-\alpha=1$

1.392.α) $\Delta=-3$, $z_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

β) i. Εστω $z=x+yi, x,y\in\mathbb{R}$, τότε $f\left(z\right)=z^2+z+1=\left(x^2-y^2+x+1\right)+y\left(2x+1\right)i$

$f\left(z\right)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow y=0$ ή $x=-\frac{1}{2}$

ii. $A\left(0,1\right)$, $M\left(x,y\right)$, $N\left(-3,2\right)$, $\overrightarrow{AM}=\left(x,y-1\right)$, $\overrightarrow{AN}=\left(-3,1\right)$

$\overrightarrow{AM}\parallel\overrightarrow{AN}\Leftrightarrow\det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x & y-1\\-3 & 1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow x+3y-3=0$

1.393.α) $z_1 = f(2) = \dfrac{2+2i}{1-2} = -2-2i$, $|z_1| = 2\sqrt{2}$

β) $\left|\dfrac{f(z)-2}{f(z)+i}\right| = \left|\dfrac{\dfrac{2+i\bar{z}}{1-\bar{z}}-2}{\dfrac{2+i\bar{z}}{1-\bar{z}}+i}\right| = \left|\dfrac{\dfrac{2+i\bar{z}-2+2\bar{z}}{\cancel{1-\bar{z}}}}{\dfrac{2+i\bar{z}+i-i\bar{z}}{\cancel{1-\bar{z}}}}\right| = \left|\dfrac{\bar{z}\,\cancel{(2+i)}}{\cancel{2+i}}\right| = |\bar{z}| = |z|$

γ) $\left|\dfrac{f(z)-2}{f(z)+i}\right| = 1 \Leftrightarrow |f(z)-2| = |f(z)+i| \Leftrightarrow |f(z)-2|^2 = |f(z)+i|^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 4x+2y-3=0$

1.394.α) Εστω $z = x+yi, x,y \in \mathbb{R}$ με $z \neq 0$, τότε:

$$2z+\frac{8}{z} = 2(x+yi)+\frac{8}{x+yi} = 2x+2yi+\frac{8(x-yi)}{x^2+y^2} =$$

$$= \left(2x+\frac{8x}{x^2+y^2}\right)+\left(2y-\frac{8y}{x^2+y^2}\right)i$$

Είναι $\text{Re}\left(2z+\dfrac{8}{z}\right) = 4\text{Re}(z) \Leftrightarrow 2x+\dfrac{8x}{x^2+y^2} = 4x \Leftrightarrow$

$$\frac{8x}{x^2+y^2} = 2x \Leftrightarrow 8x = 2x\left(x^2+y^2\right) \Leftrightarrow 2x\left(x^2+y^2\right)-8x = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x\left(x^2+y^2-4\right) = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x^2+y^2=4$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z αποτελείται από τα σημεία του άξονα y΄y εκτός του $O(0,0)$ και από τα σημεία του κύκλου που έχει κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα 2.

β) i Αν $\text{Re}(z) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ τότε

$$\text{Im}(u) = 2y-\frac{8y}{x^2+y^2} = 2y-\frac{8y}{4} = 2y-2y = 0 \text{ άρα } u \in \mathbb{R}.$$

γ) Επειδή οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 ανήκουν στον κύκλο $C: x^2+y^2=4$, ισχύει:

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 = z_2\bar{z}_2 = z_3\bar{z}_3 = 4 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \frac{4}{z_1},\ \bar{z}_2 = \frac{4}{z_2} \text{ και } \bar{z}_3 = \frac{4}{z_3}.$$

Είναι $|z_1+z_2+z_3| = |\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3| = \left|\dfrac{4}{z_1}+\dfrac{4}{z_2}+\dfrac{4}{z_3}\right| = 2\left|\dfrac{2z_2z_3+2z_1z_3+2z_1z_2}{z_1z_2z_3}\right| =$

$$= 2\frac{\left|z_1^2+z_2^2+z_3^2+2z_2z_3+2z_1z_3+2z_1z_2\right|}{|z_1||z_2||z_3|} = 2\frac{|z_1+z_2+z_3|^2}{2\cdot 2\cdot 2} \Leftrightarrow$$

$|z_1+z_2+z_3| = \dfrac{|z_1+z_2+z_3|^2}{4}$ και επειδή $z_1+z_2+z_3 \neq 0$, είναι $|z_1+z_2+z_3| \neq 0$,

οπότε $|z_1+z_2+z_3| = 4$.

1.395. α) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 = 2|z_1|^2+2|z_2|^2 \Leftrightarrow$

$(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})+(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})=2z_1\overline{z_1}+2z_2\overline{z_2} \Leftrightarrow$

$z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}+z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}=2z_1\overline{z_1}+2z_2\overline{z_2} \Leftrightarrow$

$2z_1\overline{z_1}+2z_2\overline{z_2}=2z_1\overline{z_1}+2z_2\overline{z_2}$ που ισχύει.

β) Είναι $z_1+z_2+z_3=0 \Leftrightarrow z_1+z_2=-z_3$ και η σχέση του Α ερωτήματος γίνεται:

$$|-z_3|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2 \Leftrightarrow 1+|z_1-z_2|^2=2\cdot 1+2\cdot 1 \Leftrightarrow$$

$$|z_1-z_2|^2=3 \Leftrightarrow (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})=3 \Leftrightarrow z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}=3 \Leftrightarrow$$

$$|z_1|^2+|z_2|^2-3=z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2 \Leftrightarrow z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}=-1 \Leftrightarrow$$

$$2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})=-1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})=-\frac{1}{2}$$

γ) Αν στη σχέση του Α ερωτήματος αντικαταστήσουμε το z_1 με το z_2 και το z_2 με το z_3 έχουμε: $|z_2+z_3|^2+|z_2-z_3|^2=2|z_2|^2+2|z_3|^2$ και όμοια προκύπτει:

$|z_2-z_3|^2=3$ και $|z_3-z_1|^2=3$, οπότε $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$ (1).

δ) Αν A,B,Γ οι εικόνες των z_1,z_2,z_3 τότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι:

$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{B\Gamma}|=|\overrightarrow{\Gamma A}|$, δηλαδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

Επειδή $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, τα A,B,Γ βρίσκονται στον μοναδιαίο κύκλο. Άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο C: $x^2+y^2=1$.

1.396.α) $f(z)=z^2-iz-1 \Leftrightarrow \dfrac{z^3-i}{z+i}=z^2-iz-1 \Leftrightarrow z^3-i=z^3-\cancel{iz^2}-\cancel{z}+\cancel{iz^2}+\cancel{z}-i$ ισχύει

β) Αν $z=x+yi, x,y\in\mathbb{R}$, τότε $f(z)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x(2y-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $y=\dfrac{1}{2}$

γ) $f(z)+\dfrac{z}{i}=0 \Leftrightarrow z^2-iz-1+\dfrac{zi}{i^2}=0 \Leftrightarrow z^2-iz-1-iz=0 \Leftrightarrow z^2-2iz-1=0 \Leftrightarrow$

$(z-i)^2=0 \Leftrightarrow z=i$

δ) $|z|=1 \Leftrightarrow x^2+y^2=1 \Leftrightarrow y^2=1-x^2$

$$|f(z)|=\sqrt{(x^2-y^2+y-1)^2+x^2(2y-1)^2}=\sqrt{(1-y^2-y^2+y-1)^2+(1-y^2)(2y-1)^2} \Leftrightarrow$$

$$|f(z)|=\sqrt{y^2(2y-1)^2+(1-y^2)(2y-1)^2}=\sqrt{(2y-1)^2(\cancel{y^2}+1-\cancel{y^2})}=|2y-1|$$

Είναι $x^2+y^2=1 \Leftrightarrow x^2=1-y^2\geq 0 \Leftrightarrow y^2\leq 1 \Leftrightarrow |y|\leq 1$, οπότε

$|f(z)|=|2y-1|\leq 2|y|+1\leq 2+1=3$

1.397.α) Εστω $z=x+yi, x,y\in\mathbb{R}$, τότε: $|z|^2-(\mathrm{Im}(z)+2)^2+4=0 \Leftrightarrow$

$x^2+y^2-(y+2)^2+4=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-y^2-4y-4+4=0 \Leftrightarrow x^2=4y$ (1)

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η παραβολή $x^2=4y$.

β) Είναι $|z|=\sqrt{12} \Leftrightarrow x^2+y^2=12 \Leftrightarrow 4y+y^2=12 \Leftrightarrow$

$y^2+4y-12=0 \Leftrightarrow y=-6$ ή $y=2$.

Αν $y=-6$ τότε $x^2=-24$ που είναι αδύνατο.

Αν $y=2$ τότε $x^2=8 \Leftrightarrow x=\pm 2\sqrt{2}$ και $z=2\sqrt{2}+2i$ ή $z=-2\sqrt{2}+2i$.

γ) Όταν $|z|=\theta$, έχουμε $\theta^2-\left(\text{Im}(z)+2\right)^2+4=0 \Leftrightarrow y^2+4y-\theta^2=0$.

Είναι $\Delta=16+4\theta^2>0$ οπότε το τριώνυμο έχει δύο ρίζες y_1,y_2 πραγματικές και άνισες.

Επειδή $y_1y_2=-\theta^2<0$ οι ρίζες είναι ετερόσημες και λόγω της (1) δεχόμαστε μόνο τη θετική, από την οποία προκύπτουν δύο λύσεις για το x.

1.398.α) Εστω $z=\alpha+\beta i$ και $w=\gamma+\delta i$, τότε $A(\alpha,\beta)$ και $B(\gamma,\delta)$.

Είναι $z\overline{w}=(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)=(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\beta\gamma-\alpha\delta)i$ οπότε $\text{Re}\left(z\overline{w}\right)=\alpha\gamma+\beta\delta$.

Επίσης $\overrightarrow{OA}=(\alpha,\beta)$, $\overrightarrow{OB}=(\gamma,\delta)$ και $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\alpha\gamma+\beta\delta$. Άρα $\text{Re}\left(z\overline{w}\right)=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$.

β) Είναι $z-1=(\alpha-1)+\beta i$ με εικόνα το σημείο $K(\alpha-1,\beta)$,

$z-i=\alpha+(\beta-1)i$ με εικόνα το σημείο $\Lambda(\alpha,\beta-1)$.

Η ευθεία $K\Lambda$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\dfrac{\beta-\beta+1}{\alpha-1-\alpha}=-1$ οπότε

$\varepsilon\phi\omega=-1 \Leftrightarrow \omega=135^\circ$.

γ) Είναι $\left|\overrightarrow{AK}\right|^2=|z-z+1|^2=1$, $\left|\overrightarrow{A\Lambda}\right|^2=|z-z+i|^2=|i|^2=1$ και

$\left|\overrightarrow{K\Lambda}\right|^2=|z-1-z+i|^2=|-1+i|^2=\sqrt{2}^2=2$.

Επειδή $\left|\overrightarrow{AK}\right|=\left|\overrightarrow{A\Lambda}\right|$ και $\left|\overrightarrow{AK}\right|^2+\left|\overrightarrow{A\Lambda}\right|^2=\left|\overrightarrow{K\Lambda}\right|^2$, το τρίγωνο $AK\Lambda$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές .

1.399.α) $\left.\begin{matrix} z_1-z_2=1 \\ z_1^3-z_2^3+2=0 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} z_1-z_2=1 \\ (z_1-z_2)(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)+2=0 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} z_1=z_2+1 \\ z_1^2+z_1z_2+z_2^2+2=0 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow$

$\left.\begin{matrix} z_1=z_2+1 \\ (z_2+1)^2+z_2(z_2+1)+z_2^2+2=0 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} z_1=z_2+1 \\ 3z_2^2+3z_2+3=0 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \begin{matrix} z_1=z_2+1 \\ z_2^2+z_2+1=0 \end{matrix}$

Είναι $z_2=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ οπότε $z_1=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ή $z_2=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και $z_1=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

β) Εστω Α, Β οι εικόνες των z_1, z_2.

Εχουμε $\left|\overrightarrow{OA}\right|=|z_1|=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}}=1$ και $\left|\overrightarrow{OB}\right|=|z_2|=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}}=1$,οπότε το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές.

Επίσης $E=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|2\frac{\sqrt{3}}{4}\right|=\frac{\sqrt{3}}{4}$

γ) Επειδή $z_2^{\,2}+z_2+1=0$ (1) τότε $(z_2-1)(z_2^{\,2}+z_2+1)=0 \Leftrightarrow z_2^{\,3}-1=0 \Leftrightarrow z_2^{\,3}=1$

Επίσης $z_1^{\,3}=(z_2+1)^3=z_2^{\,3}+3z_2^{\,2}+3z_2+1=1+3(z_2^{\,2}+z_2)+1\overset{(1)}{=}1+3(-1)+1=-1$

Οπότε $z_1^{30}+z_2^{30}=\left(z_1^3\right)^{10}+\left(z_2^3\right)^{10}=1+1=2$.

1.400. **α)** Η εξίσωση έχει $\Delta=-4\alpha^2<0$, οπότε $\rho_1=\alpha+\alpha i$ και $\rho_2=\alpha-\alpha i$.

Είναι $i\rho_2=i\left(\alpha-\alpha i\right)=\alpha i-\alpha i^2=\alpha+\alpha i=\rho_1$.

β) $\rho_1^{4\nu+2}+\rho_2^{4\nu+2}=\left(i\rho_2\right)^{4\nu+2}+\rho_2^{4\nu+2}=i^{4\nu+2}\rho_2^{4\nu+2}+\rho_2^{4\nu+2}=$

$=i^2\rho_2^{4\nu+2}+\rho_2^{4\nu+2}=-\rho_2^{4\nu+2}+\rho_2^{4\nu+2}=0$

γ) Είναι $\rho_1^4=-4 \Leftrightarrow \left(\alpha+\alpha i\right)^4=-4 \Leftrightarrow \alpha^4\left(1+i\right)^4=-4 \Leftrightarrow$

$\alpha^4\left[\left(1+i\right)^2\right]^2=-4 \Leftrightarrow \alpha^4\left(2i\right)^2=-4 \Leftrightarrow -4\alpha^4=-4 \Leftrightarrow$

$\alpha^4=1 \Leftrightarrow \alpha=1$ ή $\alpha=-1$ που απορρίπτεται.

δ) Εστω Α,Β οι εικόνες των ρ_1,ρ_2 αντίστοιχα. Είναι $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\rho_1\right|=\left|\alpha+\alpha i\right|=\sqrt{2\alpha^2}$,

$\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\rho_2\right|=\left|\alpha-\alpha i\right|=\sqrt{2\alpha^2}$, δηλαδή $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|$, οπότε το τρίγωνο

OAB είναι ισοσκελές.

Είναι $\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\left|\overrightarrow{OB}\right|^2=\left|\rho_1\right|^2+\left|\rho_2\right|^2=4\alpha^2$ και $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\rho_1-\rho_2\right|^2=4\alpha^2$,

δηλαδή $\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\left|\overrightarrow{OB}\right|^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$, οπότε το τρίγωνο OAB είναι και ορθογώνιο.

1.433. **α)** $x=8\lambda,\ y=4-4\lambda \Leftrightarrow 2y=8-8\lambda \Leftrightarrow 2y=8-x \Leftrightarrow x+2y-8=0$

β) $|z|_{min}=d\left(O,\varepsilon\right)=\frac{|0-2\cdot 0-8|}{\sqrt{1+4}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$. Είναι $|z|\geq|z|_{min}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$

1.434. **α)** Αν $z=x+yi$, τότε: $|z-i|=|z+3| \Leftrightarrow \left|x+\left(y-1\right)i\right|=\left|\left(x+3\right)+yi\right| \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow$

$3x+y+4=0$

β) $|z|_{min}=d\left(O,\varepsilon\right)=\frac{|4|}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$. $\lambda_\varepsilon=-3$. Αν Κ η προβολή του Ο στην ε, τότε:

$\lambda_{OK}\lambda_\varepsilon=-1 \Leftrightarrow \lambda_{OK}=\frac{1}{3}$ και $OK: y=\frac{1}{3}x$. Για το Κ, έχουμε:

$\begin{cases}3x+y+4=0\\ y=\frac{1}{3}x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x+\frac{1}{3}x+4=0\\ y=\frac{1}{3}x\end{cases} \Leftrightarrow ...\begin{cases}x=-\frac{6}{5}\\ y=-\frac{2}{5}\end{cases}$, άρα $z=-\frac{6}{5}-\frac{2}{5}i$

1.435.α) Επειδή η εικόνα του w βρίσκεται σε κύκλο κέντρου K(0,1) και ακτίνας 1, ισχύει:

$|w-i|=1$. Είναι $zw=1-i \Leftrightarrow w=\frac{1-i}{z} \Leftrightarrow w-i=\frac{1-i}{z}-i=\frac{1-i-iz}{z}=\frac{1-i(z+1)}{z}$. Τότε:

$$|w-i|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{1-i(z+1)}{z}\right|=1 \Leftrightarrow \frac{|1-i(z+1)|}{|z|}=1 \Leftrightarrow |1-i(z+1)|=|z|.$$

Αν $z=x+yi$,$x,y\in\mathbb{R}$, τότε:

$$|1-i(z+1)|=|z| \Leftrightarrow |1-i(x+yi+1)|=|x+yi| \Leftrightarrow |(1+y)-i(x+1)|=|x+yi| \Leftrightarrow$$

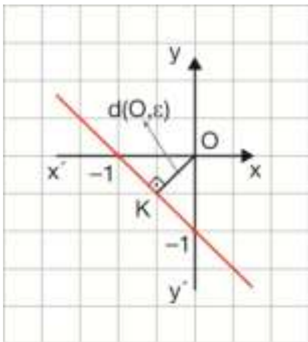
$$\sqrt{(1+y)^2+(x+1)^2}=\sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow 1+2y+y^2+x^2+2x+1=y^2+x^2 \Leftrightarrow$$

$$x+y+1=0$$

Οπότε η εικόνα M του μιγαδικού z κινείται επί της ευθείας $x+y+1=0$.

β) Η ελάχιστη τιμή του $|z|$ είναι η μικρότερη απόσταση της αρχής O των αξόνων από την ευθεία $x+y+1=0$.

Είναι $|z|_{min}=(OK)=d(O,\varepsilon)=\frac{|0+0+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.



1.436.α) Εστω $z=\alpha+\beta i$, τότε $\beta=2\alpha+3$ (1)

$w=(1+2i)z+\overline{z}+3i=...=(2\alpha-2\beta)+(2\alpha+3)i$. Αν $w=x+yi$, τότε

$$\begin{cases} x=2\alpha-2\beta \\ y=2\alpha+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-3-2\beta \\ y-3=2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{x-y+3}{2}=\beta \\ y-3=2\alpha \end{cases}$$

. Η (1) γίνεται:

$$-\frac{x-y+3}{2}=y-3+3 \Leftrightarrow y=-x-3$$

β) Αν ε: $y=-x-3$ και K η προβολή του O στην ε, τότε: $\lambda_{OK}\lambda_{\varepsilon}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{OK}=1$ και

$OK: y=x$, Από το σύστημα των OK, ε, προκύπτει: $x=y=-\frac{3}{2}$, άρα $w=-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i$

1.437.α) Εστω $w=x+yi$ τότε $\begin{cases} x=3t-2 \\ y=t-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3t-2 \\ t=y+4 \end{cases}$

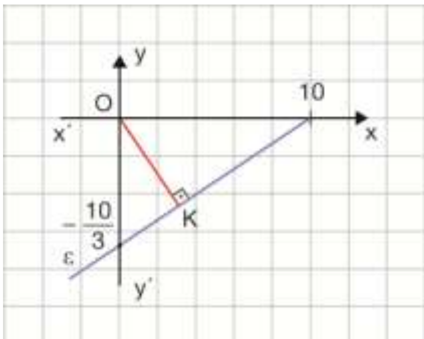
Οπότε $x=3(y+4)-2 \Leftrightarrow x=3y+12-2 \Leftrightarrow x-3y=10$.

Άρα το μυρμήγκι κινείται στην ευθεία $\varepsilon: x-3y=10$.

β) 1^{ος} τρόπος: (γεωμετρικά)

Η μικρότερη τιμή του $|z|$ είναι η

$$(OK)=d(0,\varepsilon)=\frac{|0-3\cdot 0-10|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}.$$



Για να βρούμε το σημείο K, λύνουμε το σύστημα:

$\begin{cases} \varepsilon: x-3y=10 \\ OK: y=-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$,

οπότε $\begin{cases} 3t-2=1 \\ t-4=-3 \end{cases} \Leftrightarrow t=1$.

Άρα η μικρότερη απόσταση είναι τη χρονική στιγμή $t=1$.

2ος τρόπος: (αλγεβρικά)

Είναι: $|z|=\sqrt{(3t-2)^2+(t-4)^2}=\sqrt{9t^2-12t+4+t^2-8t+16}=\sqrt{10t^2-20t+10} \Leftrightarrow$

$|z|=\sqrt{10t^2-20t+10+10}=\sqrt{10(t-1)^2+10} \geq \sqrt{10}$, για $t=1$.

1.438.α) i. Αν $z=x+yi$, τότε: $|z-1+i|=|iz| \Leftrightarrow |(x-1)+(y+1)i|=|-y+xi| \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow y=x-1$

ii. $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(x-1)^2}=\sqrt{2x^2-2x+1}$

$|z|=\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-2x+1}=\sqrt{5} \Leftrightarrow 2x^2-2x+1=5 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=2$

Αν $x=-1$, τότε $y=-2$ και $M(-1,-2)$, ενώ αν $x=2$, τότε $y=1$ και $M(2,1)$

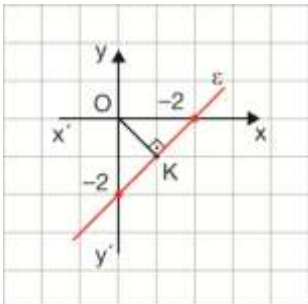
β) Για $x=0$, είναι $y=0-1=-1$, άρα $z=-i$

1.439.Α α. Εστω $z=x+yi$, $x,y \in \mathbb{R}$. Τότε $x=2\lambda+1$ και $y=2\lambda-1$.

Με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει: $x-y=2\lambda+1-2\lambda+1 \Leftrightarrow y=x-2$.

Οι εικόνες των μιγαδικών z βρίσκονται επί της ευθείας $\varepsilon: y=x-2$

β. Εστω ΟΚ η απόσταση της ευθείας ε από την αρχή Ο των αξόνων.



Ο μιγαδικός z_0 με το ελάχιστο μέτρο έχει εικόνα το σημείο Κ.

Επειδή $\lambda_\varepsilon=1$ και $\varepsilon \perp OK$, ισχύει:

$\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{OK}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{OK}=-1$.

Άρα η ΟΚ έχει εξίσωση $y=-x$.

Οι συντεταγμένες του σημείου Κ είναι η λύση του συστήματος των εξισώσεων των ε, ΟΚ. Είναι

$\begin{cases} y=x-2 \\ y=-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x=x-2 \\ y=-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2=2x \\ y=-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$, άρα $K(1,-1)$ και $z_0=1-i$.

Β. Εστω $w=\alpha+\beta i$, τότε:

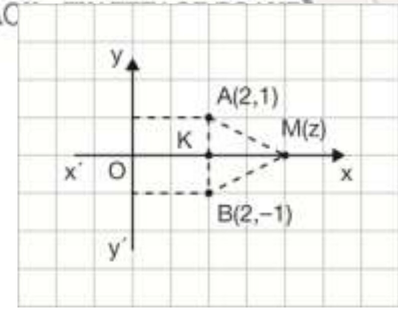
$|w|^2+\overline{w}-12=z_0 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\alpha-\beta i-12=1-i \Leftrightarrow (\alpha^2+\beta^2+\alpha-12)-\beta i=1-i \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \alpha^2+\beta^2+\alpha-12=1 \\ \beta=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2+1+\alpha-12=1 \\ \beta=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2+\alpha-12=0 \\ \beta=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-4 \text{ ή } \alpha=3 \\ \beta=1 \end{cases}$

Άρα $w=-4+i$ ή $w=3+i$

1.440.α) Αν $z=x+yi$, τότε:

$|z-2-i|=|z-2+i| \Leftrightarrow |(x-2)+(y-1)i|=|(x-2)+(y+1)i| \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow y=0$.



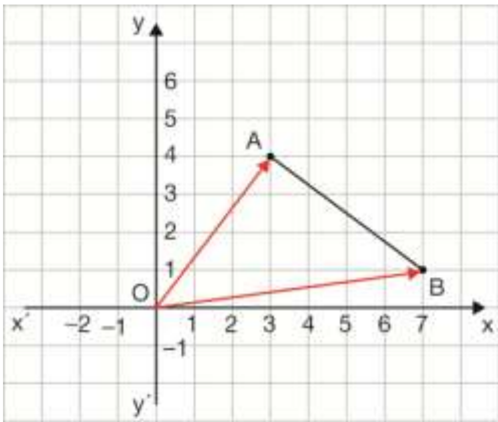
Ο γ.τ. του Μ είναι ο $x'x$.

β) Είναι $A=|z-2-i|+|z-2+i|=|\overrightarrow{MA}|+|\overrightarrow{MB}|$.

Από την τριγωνική ανισότητα, έχουμε:

$A=|\overrightarrow{MA}|+|\overrightarrow{MB}|\geq|\overrightarrow{AB}|=2$, άρα η ελάχιστη τιμή της παράστασης Α είναι 2 , όταν το Μ ταυτιστεί με το $K(2,0)$. Άρα $z=2+0i=2$.

1.441. Αν Μ η εικόνα του z και Α,Β τα σημεία με συντεταγμένες $(3,4)$ και $(7,1)$, αντίστοιχα, τότε η σχέση (1) γράφεται: $|\overrightarrow{MA}|+|\overrightarrow{MB}|=5$.



Είναι $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(7-3)^2+(1-4)^2}=5$, άρα

$|\overrightarrow{MA}|+|\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{AB}|$.

Δηλαδή η απόσταση του Μ από τα Α και Β είναι ίση με την απόσταση ΑΒ, άρα το σημείο Μ βρίσκεται στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

Είναι

$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{3^2+4^2}=5,\ |\overrightarrow{OB}|=\sqrt{7^2+1^2}=\sqrt{50}$.

Επειδή $|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2$, το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο στο Α, οπότε το πιο κοντινό σημείο του τμήματος ΑΒ στην αρχή Ο των αξόνων είναι το Α. Άρα ο μιγαδικός z με το ελάχιστο μέτρο είναι ο $3+4i$.

1.442.α) $|3z+9-12i|=6\Leftrightarrow|3(z+3-4i)|=6\Leftrightarrow|z+3-4i|=2$. Κύκλος με κέντρο $K(-3,4)$ και $\rho=2$.

β) $(OK)=\sqrt{3^2+4^2}=5$, άρα $|z|_{min}=(OK)-\rho=3$ και $|z|_{max}=(OK)+\rho=7$

γ) $\lambda_{OK}=-\frac{4}{3}$ και $OK: y=-\frac{4}{3}x$. $C:(x+3)^2+(y-4)^2=4$.

Από το σύστημα των ΟΚ,C προκύπτει $x=-\frac{21}{5}, y=\frac{28}{5}$ και $x=-\frac{9}{5}, y=\frac{12}{5}$

Ο μιγαδικός με το μέγιστο μέτρο είναι ο $z=-\frac{21}{5}+\frac{28}{5}i$, γιατί $\left|-\frac{21}{5}+\frac{28}{5}i\right|=7$

1.443.α) Κύκλος με κέντρο $K(1,\sqrt{3})$ και ακτίνα $\rho=2$.

β) $(OK)=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=2$, $|z|_{min}=(OK)-\rho=0$, $|z|_{max}=(OK)+\rho=4$

1.444. Αν $z=x+yi$, τότε: $|z+3|=2|z-3| \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow (x-5)^2+y^2=16$ ή $|z-5|=4$

$|z-5| \geq ||z|-5| \Leftrightarrow ||z|-5| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq |z|-5 \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq |z| \leq 9$

1.445.α) Εστω $z=x+yi$, οπότε

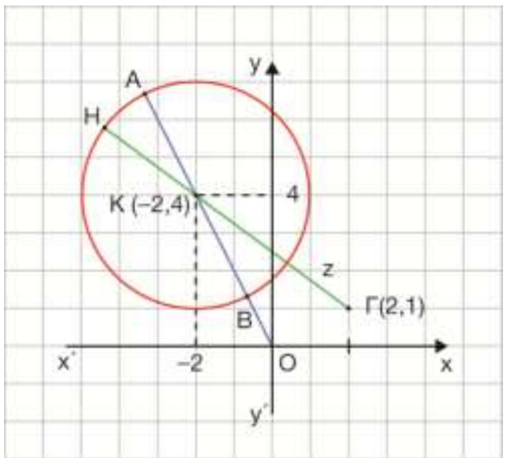
$$\begin{cases} x=3\eta\mu\alpha-2 \\ y=4-3\sigma\upsilon\nu\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=3\eta\mu\alpha \\ y-4=3\sigma\upsilon\nu\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2=9\eta\mu^2\alpha \\ (y-4)^2=9\sigma\upsilon\nu^2\alpha \end{cases}$$

Άρα $(x+2)^2+(y-4)^2=9(\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha) \Leftrightarrow (x+2)^2+(y-4)^2=9$.

Οπότε ο γ.τ. των εικόνων του z είναι ο κύκλος με κέντρο $K(-2,4)$ και $\rho=3$.

β) Είναι $(OK)=\sqrt{(-2)^2+4^2}=\sqrt{20}$, οπότε η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι $(OA)=(OK)+\rho=\sqrt{20}+3$, ενώ η ελάχιστη τιμή του $|z|$ είναι

$(OB)=|(OK)-\rho|=|\sqrt{20}-3|=2\sqrt{5}-3.$



γ) Είναι $|z-2-i|=|z-(2+i)|$.

Εστω ο μιγαδικός $w=2+i$ και η εικόνα του $\Gamma(2,1)$. Είναι

$(\Gamma K)=\sqrt{(2+2)^2+(1-4)^2}=5>3$,

άρα το Γ είναι εξωτερικό του κύκλου.

Το μέτρο $|z-2-i|$ εκφράζει την απόσταση κάθε μιγαδικού z που ανήκει στο κύκλο από το σημείο Γ και ισχύει πάντα:

$$(\Gamma Z) \leq |z-2-i| \leq (\Gamma H) \Leftrightarrow (\Gamma Z)-\rho \leq |z-2-i| \leq (\Gamma K)+\rho \Leftrightarrow$$
$$5-3 \leq |z-2-i| \leq 5+3 \Leftrightarrow 2 \leq |z-2-i| \leq 8.$$

1.446.α) $x=3\eta\mu t,\ y=1-3\sigma\upsilon\nu y \Leftrightarrow 3\sigma\upsilon\nu y=1-y$, άρα

$9\eta\mu^2 t+9\sigma\upsilon\nu^2 t=x^2+(1-y)^2 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=9$. $K(0,1)$, $\rho=3$

β) $(OK)=1<\rho$, και $|z|_{min}=\rho-(OK)=2$, και $|z|_{min}=\rho+(OK)=4$

1.447.α) Είναι: $\left|\dfrac{z-3i}{z+i}\right|=3 \Leftrightarrow |z-3i|=3|z+i| \Leftrightarrow |z-3i|^2=9|z+i|^2 \Leftrightarrow$

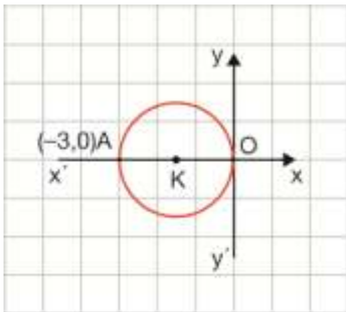
$(z-3i)(\bar{z}+3i)=9(z+i)(\bar{z}-i) \Leftrightarrow z\bar{z}+3zi-3i\bar{z}+9=9(z\bar{z}+i\bar{z}-iz+1) \Leftrightarrow$

$z\bar{z}+3zi-3i\bar{z}+9=9z\bar{z}+9i\bar{z}-9iz+9 \Leftrightarrow 8z\bar{z}-12i\bar{z}+12iz=0 \Leftrightarrow 2z\bar{z}-3i(z-\bar{z})=0$

Αφού $z=x+yi$, θα ισχύει: $2(x^2+y^2)-3i(2yi)=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+3y=0 \Leftrightarrow$

$x^2+y^2+3y+\frac{9}{4}=\frac{9}{4}\Leftrightarrow x^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

Άρα ο ζητούμενος γ.τ. είναι κύκλος με κέντρο $K\left(0,-\frac{3}{2}\right)$ και $\rho=\frac{3}{2}$



Παρατηρούμε ότι η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι όταν αυτός βρίσκεται στη θέση Α και $|z|_{max}=2p=2\frac{3}{2}=3$, ενώ η ελάχιστη τιμή είναι στη θέση $O(0,0)$ και είναι $|z|_{min}=0$.

1.448.α) $w\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\overline{w}=w\Leftrightarrow\frac{z-6}{z+3}=\frac{\overline{z}-6}{\overline{z}+3}\Leftrightarrow(z-6)(\overline{z}+3)=(z+3)(\overline{z}-6)\Leftrightarrow$

$z\overline{z}+3z-6\overline{z}+18=z\overline{z}-6z+3\overline{z}+18\Leftrightarrow 9z=9\overline{z}\Leftrightarrow\overline{z}=z\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$

β) i. Επειδή η εικόνα του w κινείται σε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα 2, ισχύει ότι $|w|=2$.

Τότε: $|w|=2\Leftrightarrow|z-6|=2|z+3|\Leftrightarrow|z-6|^2=4|z+3|^2\Leftrightarrow$

$(z-6)(\overline{z}-6)=4(z+3)(\overline{z}+3)\Leftrightarrow z\overline{z}-6z-6\overline{z}+36=4z\overline{z}+12z+12\overline{z}+36\Leftrightarrow$

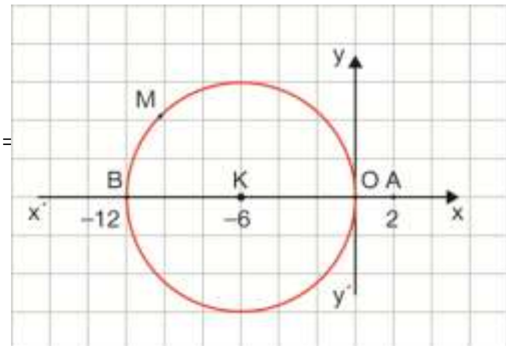
$3z\overline{z}+18z+18\overline{z}=0\Leftrightarrow|z|^2+6(z+\overline{z})=0$

Αν $z=x+yi, x,y\in\mathbb{R}$, τότε:

$x^2+y^2+6\cdot 2x=0\Leftrightarrow$

$x^2+y^2+2\cdot 6\cdot x+6^2=6^2\Leftrightarrow$

$(x+6)^2+y^2=$



Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο $K(-6,0)$ και ακτίνα $\rho=6$.

ii. Εστω $A(2,0)$. Τότε το $|z-2|$ ισοδυναμεί με την απόσταση οποιουδήποτε σημείου Μ του προηγούμενου κύκλου από το σημείο Α. Η απόσταση ΜΑ γίνεται ελάχιστη όταν το Μ βρίσκεται στο Ο, τότε $|z-2|_{min}=2$ για $z=0$, ενώ η απόσταση ΜΑ γίνεται μέγιστη όταν το Μ βρίσκεται στο σημείο $B(-12,0)$ και τότε $|z-2|_{max}=14$ για $z=-12$.

1.449.α) $(3+4i)^{\nu}\cdot(z-2)^{10}=(3+4i)^{\nu}\cdot(z-6i)^{10}$ και

$\left|(3+4i)^{\nu}\cdot(z-2)^{10}\right|=\left|(3+4i)^{\nu}\cdot(z-6i)^{10}\right|\Leftrightarrow\cancel{|3+4i|^{\nu}}\,|z-2|^{10}=\cancel{|3+4i|^{\nu}}\,|z-6i|^{10}\Leftrightarrow$

$|z-2|=|z-6i|$ και αν $z=x+yi$, τότε... $x-3y+8=0$

β) $|z|_{min}=d(O,\varepsilon)=\dfrac{|8|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

γ) Εστω $A(-12,2)$. Έστω Κ η προβολή του Α στην ε, τότε:

$\lambda_{AK}\lambda_{\varepsilon}=-1\Leftrightarrow\lambda_{AK}=-3$ και ΑΚ: $y=-3x-34$. Από το σύστημα των ΑΚ, ε,
έχουμε: $x-11$, $y=-1$ και $z=-11-i$

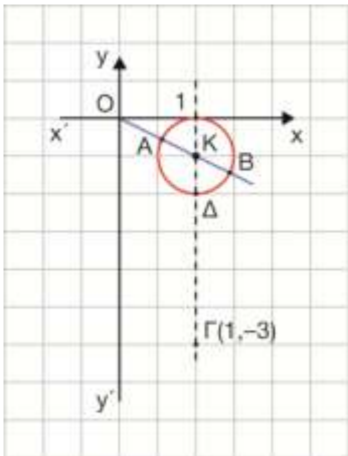
1.450.α) $\dfrac{2\text{Im}(z)}{|z-1|^2}+\dfrac{1}{2}\left|1+i\sqrt{3}\right|=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{\text{Im}(z)}{|z-1|^2}+\dfrac{1}{2}2\right)=0\Leftrightarrow\dfrac{\text{Im}(z)}{|z-1|^2}+1=0\Leftrightarrow\dfrac{\text{Im}(z)}{|z-1|^2}=-1\Leftrightarrow$

$|z-1|^2=-\text{Im}(z)\Leftrightarrow(z-1)(\bar{z}-1)=-\text{Im}(z)\Leftrightarrow z\bar{z}-(z+\bar{z})+1=-\text{Im}(z)$

Αν $z=x+yi$, τότε:

$$x^2+y^2-2x+1=-y\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+y+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow(x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

Άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι κύκλος
κέντρου $K\left(1,-\dfrac{1}{2}\right)$ και ακτίνας $\rho=\dfrac{1}{2}$.



β) Η εξίσωση της ΟΚ : $y=-\dfrac{1}{2}x$.

Λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{cases}(x-1)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}\\ y=-\dfrac{1}{2}x\end{cases}$$
,προκύπτει ότι:

$x=1+\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ και $y=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{10}$ ή $x=1-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ και
$y=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{10}$.

Οπότε ο $z_1=1-\dfrac{\sqrt{5}}{5}+i\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{10}\right)$ έχει το ελάχιστο μέτρο έχει και ο

$z_2=\left(1+\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)+i\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{10}\right)$ το μέγιστο μέτρο.

γ) Επειδή η εικόνα $\Gamma(1,-3)$ του w ανήκει στην $x=1$, στην οποία ανήκει και το
κέντρο Κ του κύκλου, τη μικρότερη απόσταση από το w απέχει ο μιγαδικός z,
που η εικόνα του είναι στο σημείο $\Delta(1,-1)$ και είναι ο $z_3=1-i$.

1.451.α) Το $M(z_1)$ βρίσκεται στον μοναδιαίο κύκλο. $|z_1|^2=1\Leftrightarrow z_1\bar{z}_1=1\Leftrightarrow\bar{z}_1=\dfrac{1}{z_1}$

$z_2=\dfrac{2}{\bar{z}_1}+3-z_1=2z_1+3-z_1=z_1+3\Leftrightarrow z_1=z_2-3$ και $|z_2-3|=|z_1|=1$, άρα το

$N(z_2)$ βρίσκεται σε κύκλο κέντρου $K(3,0)$ και ακτίνας $\rho=1$.

β) Επειδή $z_1=z_2-3$, είναι $|z_1-z_2|=3$

1.452.α) Ο γ.τ. του $M(z_1)$ είναι κύκλος με κέντρο $K(0,1)$ και ακτίνα $\rho_1=\sqrt{2}$.

Αν $z_2=x+yi$, τότε $|z_2-2i|=|z_2-4|\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow -2x+y+3=0$

β) $d(K,\varepsilon)=\dfrac{|1+3|}{\sqrt{4+1}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$, $|z_1-z_2|_{min}=d(K,\varepsilon)-\rho=\dfrac{4-\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$

1.453.α) Αν $z=x+yi$, τότε: $|z+2|=|2z-5|\Leftrightarrow\ldots.\Leftrightarrow (x-4)^2+y^2=9$ ή $|z-4|=3$

β) Επειδή οι εικόνες των z_1,z_2, είναι σημεία ομοκυκλικά, είναι $|z_1-z_2|_{max}=2\rho=6$ άρα $|z_1-z_2|\le 6$

1.454.α) $f(z)=f(\bar{z})\Leftrightarrow |iz-1|=|i\bar{z}-1|\Leftrightarrow |iz-1|^2=|i\bar{z}-1|^2\Leftrightarrow$

$(iz-1)(-i\bar{z}-1)=(i\bar{z}-1)(-iz-1)\Leftrightarrow -i^2z\bar{z}-iz+i\bar{z}+1=-i^2z\bar{z}+iz-i\bar{z}+1\Leftrightarrow$

$2i\bar{z}=2iz\Leftrightarrow \bar{z}=z\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$

β) $f(z)=1\Leftrightarrow |iz-1|=1\Leftrightarrow |iz-1|^2=1\Leftrightarrow (iz-1)(-i\bar{z}-1)=1\Leftrightarrow$

$-i^2z\bar{z}-iz+i\bar{z}+1=1\Leftrightarrow |z|^2-i(z-\bar{z})=0$.

Αν $z=x+yi$,$x,y\in\mathbb{R}$, τότε: $x^2+y^2-i\cdot 2yi=0\Leftrightarrow x^2+y^2+2y=0\Leftrightarrow$

$x^2+y^2+2y+1=1\Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=1$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος του $M(z)$ είναι κύκλος με κέντρο $K(0,-1)$ και ακτίνα $\rho=1$.

γ) Επειδή οι εικόνες των z_1,z_2 ανήκουν στον προηγούμενο κύκλο και η μέγιστη απόσταση δύο σημείων του κύκλου είναι 2ρ, ισχύει ότι: $|z_1-z_2|_{max}=2$, άρα $|z_1-z_2|\le 2$.

1.455.α) Είναι: $3|z|=|z+4|\Leftrightarrow 9|z|^2=|z+4|^2\Leftrightarrow 9z\bar{z}=(z+4)(\bar{z}+4)\Leftrightarrow$

$9z\bar{z}=z\bar{z}+4z+4\bar{z}+16\Leftrightarrow 2z\bar{z}-(z+\bar{z})-4=0$

Αν $z=x+yi$, τότε: $2(x^2+y^2)-2x-4=0\Leftrightarrow x^2+y^2-x-2=0\Leftrightarrow$

$$x^2-x+\frac{1}{4}+y^2=\frac{9}{4}\Leftrightarrow C:\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}$$

Άρα, ο γ.τ. των εικόνων του z είναι κύκλος C κέντρου $K\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ και ακτίνας $\rho=\dfrac{3}{2}$

.

β) Εχουμε $\left|\frac{w_1}{w_1+4}\right|=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3|w_1|=|w_1+4|$ και $\left|\frac{w_2}{w_2+4}\right|=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3|w_2|=|w_2+4|$, άρα, οι w_1,w_2 ανήκουν στον κύκλο C και η μέγιστη τιμή του $|w_1-w_2|$ είναι $2\rho=2\frac{3}{2}=3$

1.456.α) $z=\frac{4}{\lambda-i}\Leftrightarrow\frac{4}{z}=\lambda-i\Leftrightarrow\lambda=\frac{4}{z}+i$

β) $z=\frac{4}{\lambda-i}=\frac{4\lambda}{\lambda^2+1}+\frac{4}{\lambda^2+1}i$. Αν $z=x+yi$, τότε: $x=\frac{4\lambda}{\lambda^2+1}$, $y=\frac{4}{\lambda^2+1}\Leftrightarrow\lambda^2+1=\frac{4}{y}$ (1) και $x=\frac{4\lambda}{\frac{4}{y}}=\lambda y\Leftrightarrow\lambda=\frac{x}{y}$. Τότε $(1)\Rightarrow x^2+y^2=4y\Leftrightarrow x^2+(y-2)^2=4$.

γ) Εστω $A(3,2)$, $AK: y=2$ και από το σύστημα των ΑΚ, C, έχουμε: $x=\pm2$.

Ελάχιστο ο $z=2+2i$ και μέγιστο ο $z=-2+2i$.

δ) Επειδή οι εικόνες των z_1,z_2 ανήκουν στον προηγούμενο κύκλο και η μέγιστη απόσταση δύο σημείων του κύκλου είναι 2ρ, ισχύει ότι: $|z_1-z_2|_{max}=4$, άρα $|z_1-z_2|\le4$.

1.457.α) $|z+3|^2+|z-3|^2=36\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow|z|=3$

β) $|z_1|=3$, $|z_2|=3$, $|z_1-z_2|=3\sqrt{2}$.

$|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow|z_1+z_2|=3\sqrt{2}$

γ) $|2w-1|^2=|w-2|^2\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow|w|=1$

1.458.α) $|z-1|^2=|z-i|^2\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow y=x$

$|w-2|=1$ κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

β) $|z-w|_{min}-d(K,\varepsilon)-\rho=\frac{|2|}{\sqrt{2}}-1=\sqrt{2}-1.$

Εστω ότι η κάθετη από το Κ στην ε, τέμνει το κύκλο στο Α και την ε στο Β.

$\lambda_\varepsilon\lambda_{KB}=-1\Leftrightarrow\lambda_{KB}=-1$ και $KB: y=-x+2$. Από το σύστημα των ΚΒ, C, έχουμε $A\left(\frac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και $B(1,1)$. Άρα $z=1+i$ και $w=\frac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

1.459.α) Εστω $z=x+yi$ τότε $\left.\begin{matrix}x=-\lambda\\ y=1+\lambda\end{matrix}\right|$ άρα $y=-x+1$.

Οπότε ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z είναι η ευθεία $y=-x+1$ (ε).

β) Αν $w=x+yi$ τότε από τη σχέση $|w-2+i|=2|w+1+i|$ προκύπτει

$|(x-2)+(y+1)i|=2|(x+1)+(y+1)i|\Leftrightarrow$

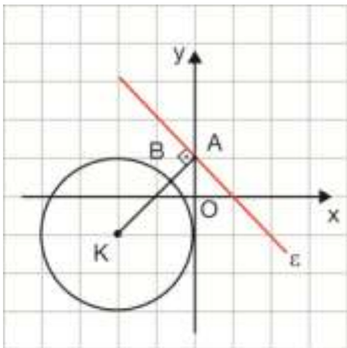
$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=2\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}\Leftrightarrow$

$x^2-4x+4+y^2+2y+1=4\left(x^2+2x+1+y^2+2y+1\right)\Leftrightarrow$

$3x^2+3y^2+12x+6y+3=0\Leftrightarrow x^2+y^2+4x+2y+1=0\Leftrightarrow$

$(x+2)^2+(y+1)^2=4$

Οπότε ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του w είναι ο κύκλος με κέντρο $K(-2,-1)$ και ακτίνα $\rho=2$.



γ) Η κάθετη ευθεία από το $K(-2,-1)$ προς την ε έχει εξίσωση $y=x+1$ (ε_1).

Για το σημείο Α έχουμε:

$\left.\begin{array}{l}\varepsilon: y=-x+1\\ \varepsilon_1: y=x+1\end{array}\right\}\Leftrightarrow \begin{array}{l}x=0\\ y=1\end{array}$ οπότε $A(0,1)$ και ο μιγαδικός

$z=i$ που έχει εικόνα το σημείο Α είναι εκείνος για τον οποίο το $|z-w|$ γίνεται ελάχιστο.

Από το σύστημα $\left.\begin{array}{l}\varepsilon_1: y=x+1\\ C: (x+2)^2+(y+1)^2=4\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}y=x+1\\ 2(x+2)^2=4\end{array}\right\}\Leftrightarrow \begin{array}{l}y=x+1\\ (x+2)^2=2\end{array}$

προκύπτει ότι: $x=-2+\sqrt{2}$ και $y=-1+\sqrt{2}$ ή $x=-2-\sqrt{2}$ και $y=-1-\sqrt{2}$.

Ο μιγαδικός w για το οποίο το $|z-w|$ γίνεται ελάχιστο είναι ο μιγαδικός

$w=\left(-2+\sqrt{2}\right)+i\left(-1+\sqrt{2}\right)$ που έχει εικόνα το σημείο Β. Η ελάχιστη τιμή του

$|z-w|$ είναι $|z-w|_{min}=d(K,\varepsilon)-\rho=\dfrac{|-2-1-1|}{\sqrt{2}}-2=2\sqrt{2}-2$.

1.460.α) Εστω $z=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$. Τότε:

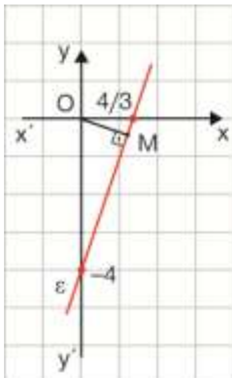
$|z-i|=|z-3|\Leftrightarrow|x+yi-i|=|x+yi-3|\Leftrightarrow|x+(y-1)i|=|(x-3)+yi|\Leftrightarrow$

$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+y^2}\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=(x-3)^2+y^2\Leftrightarrow$

$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-2y+1=\cancel{x^2}-6x+9+\cancel{y^2}\Leftrightarrow-2y=-6x+8\Leftrightarrow 3x-y-4=0$

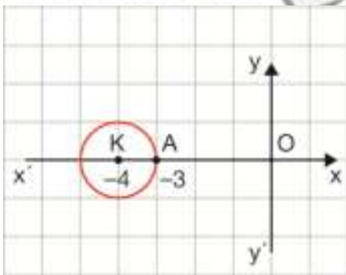
Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z είναι η ευθεία ε: $3x-y-4=0$.

Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού w είναι κύκλος C με κέντρο $K(-4,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

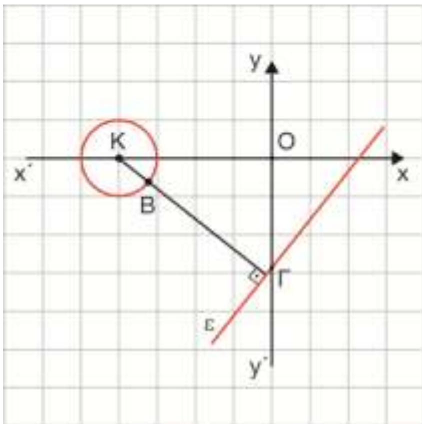


β) Η ελάχιστη τιμή του $|z|$ είναι η μικρότερη απόσταση της ευθείας ε από την αρχή Ο των αξόνων. Είναι

$|z|_{min}=\left|\overrightarrow{OM}\right|=d(O,\varepsilon)=\dfrac{|3\cdot0-0-4|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{10}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$



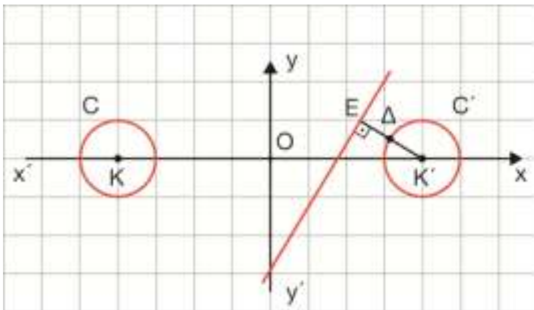
γ) Η ελάχιστη τιμή του $|w|$ είναι η μικρότερη απόσταση που έχουν τα σημεία του κύκλου από την αρχή των αξόνων.
Είναι $|w|_{min} = |\vec{OA}| = 3$.



δ) Η ελάχιστη τιμή του $|z-w|$ είναι η μικρότερη απόσταση που έχει ο κύκλος C από την ευθεία ε. Είναι:

$$|z-w|_{min} = |\vec{B\Gamma}| = d(K,\varepsilon) - \rho =$$

$$= \frac{|3(-4)-0-4|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} - 1 = \frac{8\sqrt{10}}{5} - 1$$



ε) Είναι $|z+w| = |z-(-w)|$ και αντιπροσωπεύει την απόσταση της ευθείας ε από τον συμμετρικό κύκλο C' του C ως προς την αρχή Ο των αξόνων. Το κέντρο K' του C' είναι το συμμετρικό του K ως προς το Ο, άρα $K'(4,0)$ και οι ακτίνες των δύο κύκλων είναι ίσες. Είναι:

$$|z+w|_{min} = |\vec{\Delta E}| = d(K',\varepsilon) - \rho = \frac{|3\cdot 4-0-4|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} - 1 = \frac{4\sqrt{10}}{5} - 1.$$

1.461.α) Ο γ.τ του $M(z)$ είναι κύκλος με κέντρο $K(1,1)$ και ακτίνα $\rho = 1$.
Αν $w = x+yi$, τότε: $|w+1-3i| = |w+3-i| \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow y = -x$

β) $|z-w|_{min} = d(K,\varepsilon) - \rho = \dfrac{|1+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} - 1 = \sqrt{2} - 1$

γ) Επειδή το συμμετρικό του $N(w)$ ως προς το Ο βρίσκεται στην ίδια ευθεία ε: $y = -x$, είναι $|z+w|_{min} = |z-w|_{min} = \sqrt{2} - 1$, άρα $|z+w| \geq \sqrt{2} - 1$

1.462.α) Ο γ.τ του $M(z)$ είναι κύκλος C_1 με κέντρο $K(0,6)$ και ακτίνα $\rho_1 = \sqrt{5}$.
Ο γ.τ του $N(w)$ είναι κύκλος C_2 με κέντρο $\Lambda(3,0)$ και ακτίνα $\rho_2 = \sqrt{5}$.

Επειδή $(K\Lambda)=\sqrt{6^2+3^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$, είναι $|z-w|_{min}=(K\Lambda)-\rho_1-\rho_2=\sqrt{5}$ και $|z-w|_{max}=(K\Lambda)+\rho_1+\rho_2=5\sqrt{5}$

β) Είναι $\lambda_{K\Lambda}=\dfrac{6-0}{0-3}=-2$ και $K\Lambda: y=-2(x-3)\Leftrightarrow y=-2x+6$.

Εστω ότι η $K\Lambda$ τέμνει το κύκλο C_1 στα σημεία Α,Β και τον κύκλο C_2 στα Γ,Δ.

Από το σύστημα των $K\Lambda$, C_1 προκύπτει $A(1,4)$, $B(-1,8)$ και από το σύστημα των $K\Lambda$, C_2 προκύπτει $\Gamma(4,-2)$ και $\Delta(2,2)$.

1.463. Ο γ.τ του $M(z)$ είναι κύκλος C_1 με κέντρο $K(-4,0)$ και ακτίνα $\rho_1=2\sqrt{2}$.

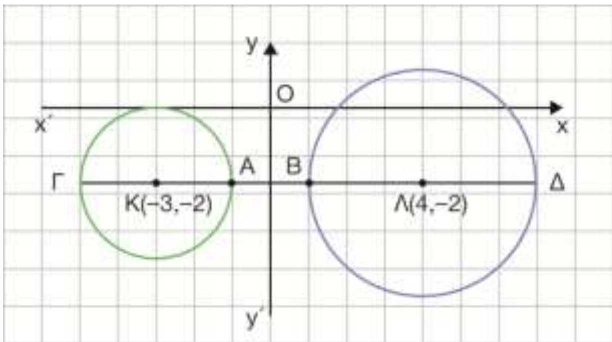
Ο γ.τ του $N(w)$ είναι κύκλος C_2 με κέντρο $\Lambda(0,4)$ και ακτίνα $\rho_2=\sqrt{2}$.

Επειδή $(K\Lambda)=\sqrt{4^2+4^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$, είναι $|z-w|_{min}=(K\Lambda)-\rho_1-\rho_2=\sqrt{2}$ και $|z-w|_{max}=(K\Lambda)+\rho_1+\rho_2=7\sqrt{2}$

1.464. α) Είναι $|z+3+2i|=2\Leftrightarrow|z-(-3-2i)|=2$, άρα ο γ.τ. του z είναι ο κύκλος με κέντρο $K(-3,-2)$, ακτίνα $\rho_1=2$ και εξίσωση $C_1:(x+3)^2+(y+2)^2=4$.

Για τον μιγαδικό w έχουμε: $|w-4+2i|=3\Leftrightarrow|w-(4-2i)|=3$,

οπότε ο γ.τ. των εικόνων του w είναι ο κύκλος C_2 με κέντρο $\Lambda(4,-2)$ και ακτίνα $\rho_2=3$, άρα $C_2:(x-4)^2+(y+2)^2=3$.



β) Είναι:

$(K\Lambda)=\sqrt{(4+3)^2+(-2+2)^2}=\sqrt{49}=7$

Οπότε, η ελάχιστη τιμή του είναι:

$|z-w|_{min}=(AB)=$

$(K\Lambda)-\rho_1-\rho_2==7-2-3=2$

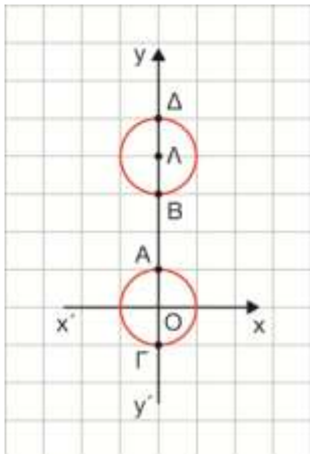
και η μέγιστη τιμή του $|z-w|$ είναι:

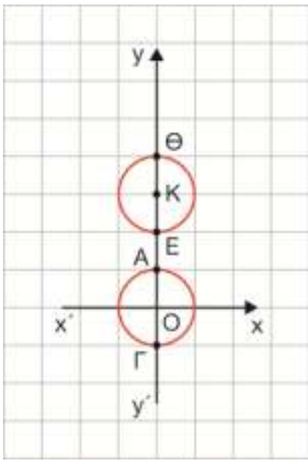
$(\Gamma\Delta)=(K\Lambda)+\rho_1+\rho_2=7+2+3=12$.

1.465. α) Επειδή $|z|=1$η εικόνα του z βρίσκεται σε κύκλο C_1 κέντρου O και ακτίνας 1.

Επειδή $|w_1-4i|=1$, η εικόνα του w_1βρίσκεται σε κύκλο C_2 κέντρου $\Lambda(0,4)$ και ακτίνας 1.

Είναι $|z-w_1|_{min}=(AB)=2$ και$|z-w_1|_{max}=(\Gamma\Delta)=6$





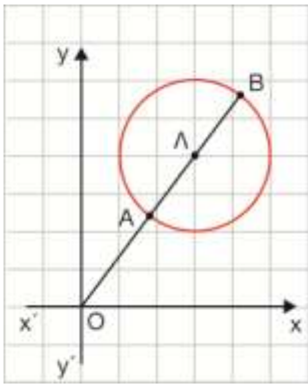
β) Είναι $w_2 = z+3i \Leftrightarrow w_2 - 3i = z$, άρα $|w_2 - 3i| = |z| = 1$, οπότε η εικόνα του w_2 κινείται σε κύκλο κέντρου $K(0,3)$ και ακτίνας 1.

Αν παραβλέπαμε τη σχέση εξάρτησης $w_2 = z+3i$ των w_2 και z για το μέγιστο και το ελάχιστο του $|z-w_2|$ θα είχαμε τα παρακάτω:

$|z-w_2|_{min} = (AE) = 1$ και $|z-w_2|_{max} = (\Gamma\Theta) = 5$.

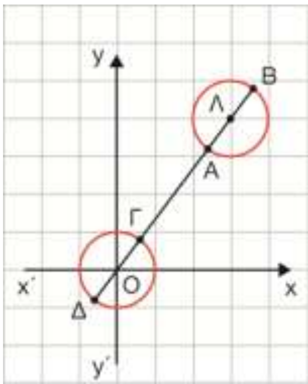
Αυτό όμως δεν ισχύει γιατί $w_2 = z+3i \Leftrightarrow z - w_2 = -3i$, άρα $|z-w_2| = |-3i| = 3$, δηλαδή οι εικόνες των z, w_2 βρίσκονται σε σταθερή απόσταση μεταξύ τους.

Άρα $|z-w_2|_{min} = |z-w_2|_{max} = 3$



1.466.α) Επειδή $|z| = 2$, ο γ. τόπος της εικόνας Μ του μιγαδικού z είναι κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας 2.

β) Είναι $w - z = 3+4i \Leftrightarrow w-(3+4i) = z$, οπότε $|w-(3+4i)| = |z| = 2$, άρα ο $N(w)$ κινείται σε κύκλο με κέντρο $\Lambda(3,4)$ και ακτίνα 2.



γ) Είναι:

$|w|_{min} = (OA) = (O\Lambda) - \rho = \sqrt{3^2+4^2} - 2 = 3$ και

$|w|_{max} = (OB) = (O\Lambda) + \rho = \sqrt{3^2+4^2} + 2 = 7$

δ) Αν παραβλέπαμε τη σχέση εξάρτησης

$w - z = 3+4i$

των μιγαδικών z,w θα είχαμε ότι:

$|z-w|_{min} = (A\Gamma) = (O\Lambda) - \rho_1 - \rho_2 = 5-1-1 = 3$

και

$|z-w|_{max} = (B\Delta) = (O\Lambda) + \rho_1 + \rho_2 = 5+1+1 = 7$

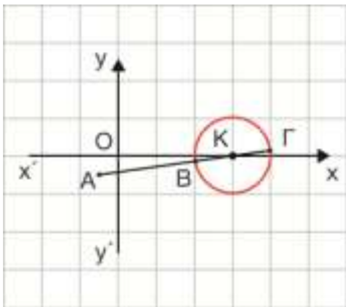
άρα το $|z-w|$ παίρνει τιμές στο διάστημα $[3,7]$.

Όμως $w - z = 3+4i \Leftrightarrow z - w = -3-4i$ και $|z-w| = |-3-4i| = 5$, οπότε το $|z-w|$ παίρνει μόνο τη τιμή 5.

1.467.α) $w=iz-1 \Leftrightarrow \frac{w+1}{i}=z \Leftrightarrow \frac{w+1}{i}-3=z-3 \Leftrightarrow \frac{w+1-3i}{i}=z-3$, άρα κύκλος κέντρου $(-1,3)$ και $\rho=1$

β) $|z-w|=|z-iz+1|=|z(1-i)+1|=\left|(1-i)\left(z+\frac{1}{1-i}\right)\right|=\sqrt{2}\left|z+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right|$

Αρκεί να βρούμε την ελάχιστη απόσταση του z από το σημείο $A\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$



Είναι $(AK)=\sqrt{\left(3+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$, οπότε

$\left|z+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right|_{min}=(AK)-\rho=\frac{5\sqrt{2}}{2}-1=\frac{5\sqrt{2}-2}{2}$ και

$\left|z+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right|_{max}=(AK)+\rho=\frac{5\sqrt{2}}{2}+1=\frac{5\sqrt{2}+2}{2}$, άρα

$|z-w|_{min}=\sqrt{2}\left|z+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right|_{min}=\sqrt{2}\,\frac{5\sqrt{2}-1}{2}=\frac{10-\sqrt{2}}{2}$ και

$|z-w|_{max}=\sqrt{2}\left|z+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right|_{max}=\sqrt{2}\,\frac{5\sqrt{2}+1}{2}=\frac{10+\sqrt{2}}{2}$, οπότε

$\frac{10-\sqrt{2}}{2}\le|z-w|\le\frac{10+\sqrt{2}}{2}$

γ) $|z+w|=|z+iz-1|=|z(1+i)-1|=\left|(1+i)\left(z-\frac{1}{1+i}\right)\right|=\sqrt{2}\left|z-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right|$

Εστω $E\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, τότε $(EK)=\frac{\sqrt{26}}{2}$, και $\left|z-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right|_{min}=\frac{\sqrt{26}}{2}-1=\frac{\sqrt{26}-2}{2}$,

$\left|z-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right|_{max}=\frac{\sqrt{26}}{2}+1=\frac{\sqrt{26}+2}{2}$, άρα

$|z+w|_{min}=\sqrt{2}\left|z-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right|_{min}=\sqrt{13}-\sqrt{2}$ και $|z+w|_{max}=\sqrt{13}+\sqrt{2}$

1.468.α) Επειδή $|z|=1$, ο γ. τόπος της εικόνας Μ του μιγαδικού z είναι ο μοναδιαίος κύκλος. $|w|=|3+4i||z|=5$, άρα ο γ.τ. του $N(w)$ είναι κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας 5.

β) $|z-w|=|z-(3+4i)z|=|z||2-4i|=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

1.469.α) Ο γ.τ. του $M(z)$ είναι κύκλος με κέντρο $K(-1,0)$ και ακτίνα $\rho_1=1$.

$w=2z+1+4i \Leftrightarrow \frac{w-1-4i}{2}=z$.

$|z+1|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{w-1-4i}{2}+1\right|=1 \Leftrightarrow |w+1-4i|=2$, άρα ο γ.τ. του $N(w)$ είναι κύκλος κέντρου $\Lambda(-1,4)$ και ακτίνας $\rho_2=2$.

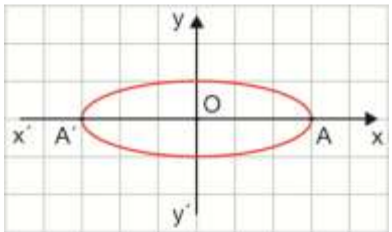
β) $|z-w|=|z-2z-1-4i|=|z+1+4i|$. Έστω $P(-1,-4)$, τότε $(PK)=4$ και $|z-w|_{min}=|z+1+4i|_{min}=(PK)-\rho_1=3$,
$|z-w|_{max}=|z+1+4i|_{max}=(PK)+\rho_1=5$, άρα $3\le|z-w|\le 5$.

1.470.α) $\Delta=36\sigma\upsilon\nu^2\theta-4(5\sigma\upsilon\nu^2\theta+4)=36\sigma\upsilon\nu^2\theta-20\sigma\upsilon\nu^2\theta-16=$
$16(\sigma\upsilon\nu^2\theta-1)=-16\eta\mu^2\theta\le 0$

$$z_{1,2}=\frac{\sigma\upsilon\nu\theta\pm i\cdot 4\eta\mu\theta}{2}=\begin{cases} z_1=3\sigma\upsilon\nu\theta+2i\eta\mu\theta \\ z_2=3\sigma\upsilon\nu\theta-2i\eta\mu\theta\end{cases}$$

β) Εστω $\left.\begin{matrix} x=3\sigma\upsilon\nu\theta \\ y=\pm 2\eta\mu\theta\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \frac{x}{3}=\sigma\upsilon\nu\theta \\ \frac{y}{2}=\pm\eta\mu\theta\end{matrix}\right|$ ή $\left.\begin{matrix} \frac{x^2}{9}=\sigma\upsilon\nu^2\theta \\ \frac{y^2}{4}=\eta\mu^2\theta\end{matrix}\right|$

Είναι $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta=1$, οπότε οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης διαγράφουν έλλειψη.



γ) Η μεγαλύτερη τιμή που παίρνει η απόσταση $|z_1-z_2|$ είναι όταν οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 βρίσκονται στα άκρα του μεγάλου άξονα $AA'=2\alpha=6$. Άρα $|z_1-z_2|\le 6$.

1.471.α) Αν $z=x+yi$, τότε $x=\varepsilon\varphi\theta$ και

$$y=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}\Leftrightarrow y^2=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}=\frac{\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}=\varepsilon\varphi^2\theta+1=x^2+1\Leftrightarrow y^2-x^2=1$$

ισοσκελής υπερβολή με $\alpha=\beta=1$.

β) Εστω $M(x,y)$ σημείο της υπερβολής και $A(3,0)$. Τότε

$$(MA)=\sqrt{(x-3)^2+y^2}=\sqrt{x^2-6x+9+1+x^2}=\sqrt{2x^2-6x+10}$$

Η απόσταση MA γίνεται ελάχιστη όταν το τριώνυμο $2x^2-6x+10$, γίνεται ελάχιστο.

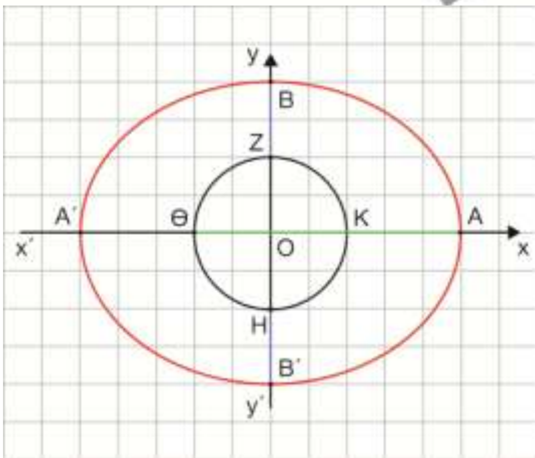
Αυτό συμβαίνει όταν $x=-\frac{-6}{2\cdot 2}=\frac{3}{2}$, τότε $y^2=1+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{13}{4}\Leftrightarrow y=\pm\frac{\sqrt{13}}{2}$, άρα

$z=\frac{3}{2}\pm i\frac{\sqrt{13}}{2}$.

1.472.α) Αν $z=x+yi$, τότε $(2x)^2+12(x^2+y^2)+13y^2=400\Leftrightarrow\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

Ελλειψη με $\alpha=5$, $\beta=4$

Ο γ.τ. του w είναι κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας 2.



β) $|z+w|=|z-(-w)|$

Επειδή ο κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας 2 έχει κέντρο συμμετρίας το Ο, το συμμετρικό κάθε σημείου του ως προς το Ο είναι σημείο του ίδιου κύκλου. Άρα η απόσταση της έλλειψης από το κύκλο είναι ίδια με την απόσταση της έλλειψης από το συμμετρικό του κύκλου. Δηλαδή $|z-w|=|z+w|$.

γ) $|z-w|_{max}=(\Theta A)=(OA)+(O\Theta)=5+2=7$ και

$|z-w|_{min}=(BZ)=(OB)-(OZ)=4-2=2$, άρα $2\le|z-w|\le 7$

1.473.α) $\dfrac{1}{|z+4|}+\dfrac{1}{|z-4|}=\dfrac{10}{|z^2-16|}\Leftrightarrow|z-4|+|z+4|=10$ έλλειψη με εστίες $E'(-4,0)$, $E(4,0)$ και $2\alpha=10\Leftrightarrow\alpha=5$, $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2=9\Leftrightarrow\beta=3$.

β) Η μεγαλύτερη απόσταση δύο σημείων της έλλειψης είναι η $(A'A)=2\alpha=10$ και η μικρότερη είναι η $(B'B)=2\beta=6$, άρα

$|z_1-z_2|_{min}\le|z_1-z_2|\le|z_1-z_2|_{max}\Leftrightarrow 6\le|z_1-z_2|\le 10$

γ) Αν $|z_1-z_2|=10$, τότε $z_1=-5$ και $z_2=5$, οπότε $\left|w+\dfrac{z_1+z_2}{2}\right|=2\Leftrightarrow|w|=2$

Ο γ.τ. του w είναι κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας 2.

δ) Η μέγιστη τιμή του $|z-w|$ είναι η μέγιστη απόσταση των σημείων της έλλειψης από τα σημεία του κύκλου, άρα:

$|z-w|_{max}=(\Theta A)=(OA)+(O\Theta)=5+2=7$

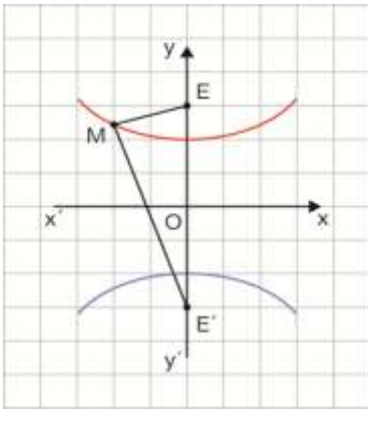
1.474.α) Έστω $E'(-5,0)$ και $E(5,0)$, αν $M(z)$, τότε $|z+5|-|z-5|=8\Leftrightarrow|\vec{ME'}|-|\vec{ME}|=8$

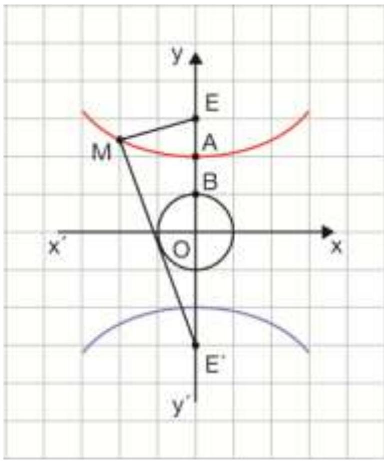
Ο γεωμετρικός τόπος του Μ είναι ο δεξιός κλάδος$\left(|\vec{ME'}|>|\vec{ME}|\right)$ της υπερβολής που έχει εστίες τα E και E' και $2\alpha=8\Leftrightarrow\alpha=4$.

β) Ο μιγαδικός z με το ελάχιστο μέτρο έχει εικόνα την κορυφή $A(4,0)$, άρα είναι ο $z=4$ με ελάχιστο μέτρο το 4.

1.475.α) Εστω $E'(0,-6)$ και $E(0,6)$, αν $M(z)$, τότε

$|z+6i|-|z-6i|=8\Leftrightarrow|\vec{ME'}|-|\vec{ME}|=8$





Ο γεωμετρικός τόπος του Μ είναι ο πάνω κλάδος $\left(\left|\overrightarrow{ME'}\right| > \left|\overrightarrow{ME}\right|\right)$ της υπερβολής που έχει εστίες τα Ε και Ε΄ και $2\alpha = 8 \Leftrightarrow \alpha = 4$.

Ο γ.τ της εικόνας του w είναι κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα $\rho = 2$.

β) Το σημείο της υπερβολής που είναι πλησιέστερο στην αρχή Ο των αξόνων είναι το $A(0,4)$, άρα $|z|_{min} = 4$

γ) Η απόσταση της υπερβολής και του κύκλου είναι ελάχιστη για τα σημεία $A(0,4)$ και $B(0,2)$, άρα $z = 4i$, $w = 2i$ και $|z-w|_{min} = (AB) = 2$

1.476.α) Είναι $|w| = \left|\frac{\sqrt{5}\cdot z}{|z|}\right| = \frac{\sqrt{5}\cdot|z|}{|z|} = \sqrt{5}$ και

$\left|w^2\right| = |3+\lambda i| \Leftrightarrow |w|^2 = \sqrt{9+\lambda^2} \Leftrightarrow 5 = \sqrt{9+\lambda^2} \Leftrightarrow$

$25 = 9+\lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = 16$ και επειδή $\lambda > 0$, είναι $\lambda = 4$.

β) Είναι $w^2 = 3+4i$ ή $\left(\frac{\sqrt{5}\cdot z}{|z|}\right)^2 = 3+4i \Leftrightarrow \frac{5\cdot z^2}{|z|^2} = 3+4i \Leftrightarrow$

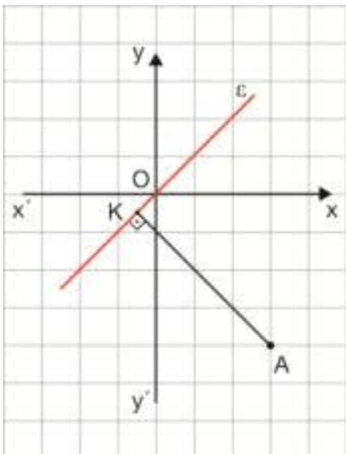
$\frac{5z^2}{z\cdot\bar{z}} = 3+4i \Leftrightarrow \frac{5z}{\bar{z}} = 3+4i \Leftrightarrow 5z = (3+4i)\bar{z} \Leftrightarrow 5z-(3+4i)\bar{z} = 0$.

γ) Αν $z = x+yi$, $x,y \in \mathbb{R}$, τότε η σχέση του προηγούμενου ερωτήματος γίνεται:

$5(x+yi)-(3+4i)(x-yi) = 0 \Leftrightarrow 5x+5yi-3x+3yi-4xi-4y = 0 \Leftrightarrow$

$(2x-4y)+(8y-4x)i = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4y=0 \\ 8y-4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y-x=0 \\ 2y-x=0 \end{cases}$.



Ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας Μ του μιγαδικού z είναι η ευθεία $2y-x=0$,

δ) Είναι $|z-3+4i| = |z-(3-4i)|$.

Εστω $A(3,-4)$ η εικόνα του $3-4i$.

Το μέτρο $|z-3+4i|$ γίνεται ελάχιστο όταν η απόσταση του Α από την ε γίνει ελάχιστη. Είναι:

$$|z-3+4i|_{min} = (AK) = d(A,\varepsilon) = \frac{|3-2(-4)|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{11}{\sqrt{5}} = \frac{11\sqrt{5}}{5}$$

1.477. α) $|z_1+z_2|=|z_1-z_2| \Leftrightarrow |z_1+z_2|^2=|z_1-z_2|^2 \Leftrightarrow$

$(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2}) \Leftrightarrow$

$z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}=z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2} \Leftrightarrow 2z_1\overline{z_2}=-2\overline{z_1}z_2 \Leftrightarrow$

$z_1\overline{z_2}=-\overline{z_1}z_2 \Leftrightarrow \dfrac{z_1}{z_2}=-\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \Leftrightarrow \dfrac{z_1}{z_2}=-\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$,

άρα ο μιγαδικός $\dfrac{z_1}{z_2}$ είναι φανταστικός.

β) $\left|\dfrac{z_1}{z_1+z_2}\right|+\left|\dfrac{iz_2}{z_1+z_2}\right|\geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{|z_1|}{|z_1+z_2|}+\dfrac{|iz_2|}{|z_1+z_2|}\geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{|z_1|+|i||z_2|}{|z_1+z_2|}\geq 1 \Leftrightarrow$

$\dfrac{|z_1|+|z_2|}{|z_1+z_2|}\geq 1 \Leftrightarrow |z_1|+|z_2|\geq|z_1+z_2|$ που ισχύει.

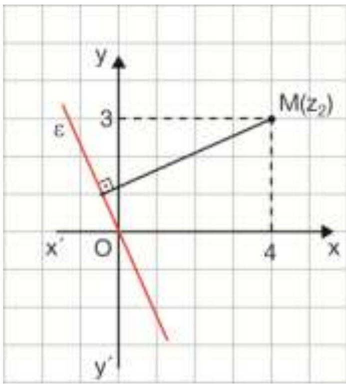
γ) i. Αν $z_2=4+3i$, τότε: $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1}{4+3i}=\dfrac{z_1(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}=\dfrac{z_1(4-3i)}{4^2+3^2}=\dfrac{z_1(4-3i)}{25}$

Αν $z_1=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$, τότε:

$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{(x+yi)(4-3i)}{25}=\dfrac{4x-3xi+4yi+3y}{25}=\dfrac{4x+3y}{25}+\dfrac{4y-3x}{25}i$

Επειδή ο $\dfrac{z_1}{z_2}$ είναι φανταστικός ισχύει: $\dfrac{4x+3y}{25}=0 \Leftrightarrow 4x+3y=0 \Leftrightarrow y=-\dfrac{4}{3}x$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος του z_1 είναι η ευθεία $y=-\dfrac{4}{3}x$ εκτός του $O(0,0)$ $(z\neq 0)$.



ii. Εστω $M(4,3)$ η εικόνα του z_2.

Η ελάχιστη τιμή του $|z_1-z_2|$ είναι η απόσταση του Μ από την ευθεία $\varepsilon: y=-\dfrac{4}{3}x \Leftrightarrow 4x+3y=0$. Τότε

$|z_1-z_2|_{min}=d(M,\varepsilon)=\dfrac{|4\cdot 4+3\cdot 3|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{25}{5}=5$.

1.478. α) $\dfrac{f(z)}{f(-z)}=2 \Leftrightarrow f(z)=2f(-z) \Leftrightarrow |z+2i|=2|-z+2i| \Leftrightarrow |z+2i|^2=4|-z+2i|^2 \Leftrightarrow$

$(z+2i)(\overline{z}-2i)=4(-z+2i)(-\overline{z}-2i) \Leftrightarrow z\overline{z}-2iz+2i\overline{z}+4=4z\overline{z}+8iz-8i\overline{z}+16 \Leftrightarrow$

$3z\overline{z}+10iz-10i\overline{z}+12=0 \Leftrightarrow 3|z|^2+10i(z-\overline{z})+12=0 \Leftrightarrow |z|^2+\dfrac{10}{3}i(z-\overline{z})+4=0$

Αν $z=x+yi, x,y\in\mathbb{R}$, τότε: $x^2+y^2+\frac{10}{3}i\cdot 2yi+4=0 \Leftrightarrow$

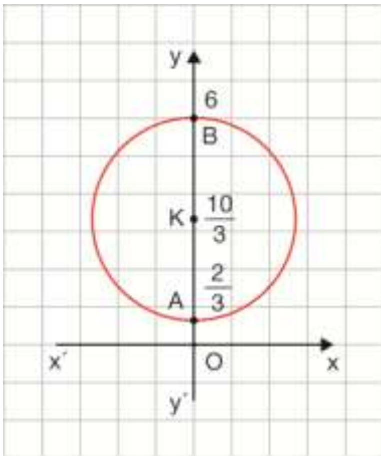
$$x^2+y^2-2\frac{10}{3}y+\left(\frac{10}{3}\right)^2=\left(\frac{10}{3}\right)^2-4 \Leftrightarrow$$

$$x^2+\left(y-\frac{10}{3}\right)^2=\frac{64}{9}$$

Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο $K\left(0,\frac{10}{3}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{8}{3}$.

β) Είναι $\left|z-\frac{10}{3}i\right|=\left|x+yi-\frac{10}{3}i\right|=\left|x+\left(y-\frac{10}{3}\right)i\right|=\sqrt{x^2+\left(y-\frac{10}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{64}{9}}=\frac{8}{3}$.

γ) Ελάχιστο μέτρο έχει ο μιγαδικός που έχει εικόνα το σημείο Α,δηλαδή ο $z_1=\frac{2}{3}i$ και μέγιστο μέτρο ο μιγαδικός που έχει εικόνα το σημείο Β, δηλαδή ο $z_2=6i$.



δ) Είναι $h(z)=z-3 \Leftrightarrow z=h(z)+3$.

$\left|z-\frac{10}{3}i\right|=\frac{8}{3} \Leftrightarrow \left|h(z)+3-\frac{10}{3}i\right|=\frac{8}{3}$, οπότε το Ν κινείται σε κύκλο με κέντρο $\Lambda\left(-3,\frac{10}{3}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{8}{3}$.

1.479.α)

$$|iz-4i+3|=2 \Leftrightarrow \left|i\left(z-4+\frac{3}{i}\right)\right|=2 \Leftrightarrow |i|\left|z-4+\frac{3i}{i^2}\right|=2 \Leftrightarrow |z-4-3i|=2$$

.

Ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του μιγαδικού z είναι κύκλος με κέντρο $K(4,3)$ και ακτίνα $\rho=2$. Έστω ότι $w=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$, τότε

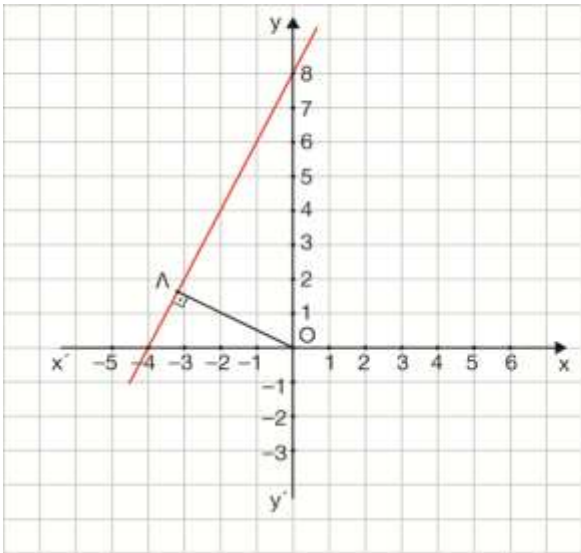
$$x+yi=\alpha+2\beta i \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\alpha \\ y=2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x=2\alpha \\ y=2\beta \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} -2x+y=2\alpha+2\beta=2(\alpha+\beta)=8 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow y=2x+8$ Ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του w είναι η ευθεία ε: $y=2x+8$.

β) Ο μιγαδικός w με το ελάχιστο μέτρο έχει εικόνα του το σημείο Λ. Είναι $\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{OK}=-1 \Leftrightarrow 2\lambda_{OK}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{OK}=-\frac{1}{2}$ και $O\Lambda:\ y=-\frac{1}{2}x$.

Για να βρούμε το σημείο Λ θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων των $O\Lambda, \varepsilon$. Είναι:

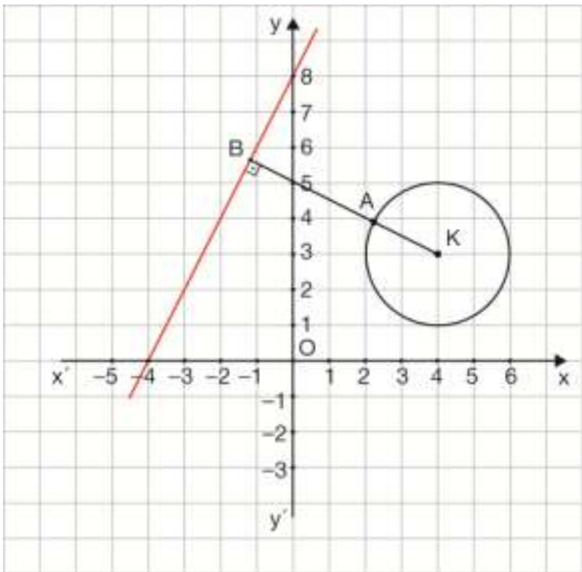
$$\begin{cases} y = 2x+8 \\ y = -\dfrac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x+8 \\ 2x+8 = -\dfrac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\begin{cases} y = 2x+8 \\ 4x+16 = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{8}{5} \\ x = -\dfrac{16}{5} \end{cases}$$.Άρα

$w = -\dfrac{16}{5} + \dfrac{8}{5}i$.

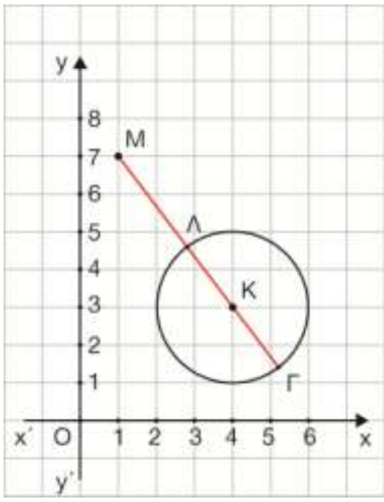
γ)



$$(KB) = d(K,\varepsilon) = \frac{|2\cdot 4 - 3 + 8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{13\sqrt{5}}{5}.$$

$$|z-w|_{min} = (KB)-(KA) = \frac{13\sqrt{5}}{5} - 2.$$

δ) i. Εστω $M(1,7)$, τότε το $|z-1-7i|$, αντιπροσωπεύει την απόσταση του Μ από τον κύκλο κέντρου K και ακτίνας 2. Είναι $|\overrightarrow{KM}| = \sqrt{(4-1)^2+(3-7)^2} = 5$.



Είναι

$$|z-1-7i|_{min} = |\overrightarrow{M\Delta}| = |\overrightarrow{KM}| - \rho = 5-2 = 3 \text{ και}$$

$$|z-1-7i|_{max} = |\overrightarrow{M\Gamma}| = |\overrightarrow{KM}| + \rho = 5+2 = 7, \text{ άρα}$$

$3 \le |z-1-7i| \le 7$.

ii. Επειδή τα z_1, z_2 ικανοποιούν την (1), θα ικανοποιούν και την $3 \le |z-1-7i| \le 7$. Άρα $3 \le |z_1-1-7i| \le 7$,

$$3 \le |z_2-1-7i| \le 7 \Leftrightarrow \frac{1}{7} \le \frac{1}{|z_2-1-7i|} \le \frac{1}{3}$$

οπότε με πολλαπλασιασμό κατά μέλη προκύπτει:

$$3 \cdot \frac{1}{7} \le |z_1-1-7i| \cdot \frac{1}{|z_2-1-7i|} \le 7 \cdot \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{7} \le \frac{|z_1-1-7i|}{|z_2-1-7i|} \le \frac{7}{3}.$$

1.480.α) Εστω $z = x+2i$, τότε $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+2i} = \frac{x-2i}{x^2+4} = \frac{x}{x^2+4} - \frac{2}{x^2+4}i$, οπότε

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2+4 = 4x \Leftrightarrow x^2-4x+4 = 0 \Leftrightarrow$$

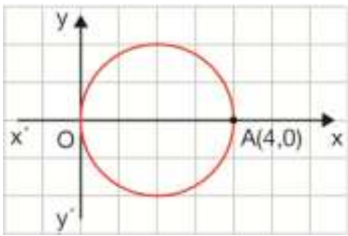
$$(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

β) Αν $z = x+yi$, τότε $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+yi} = \frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i$ και αφού $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4}$,

έχουμε

$$\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2+y^2 = 4x \Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2 = 4 \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2 = 4$$

Οπότε ο γεωμετρικός τόπος του $M(z)$ είναι κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα 2 εκτός του σημείου $O(0,0)$ (γιατί $z \ne 0$).



γ) Το $|z|$ γίνεται μέγιστο, όταν ο z έχει εικόνα το σημείο $A(4,0)$, τότε: $|z|_{max} = 4$.

δ) Επειδή για τα z_1, z_2 ισχύει ότι $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z_1}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z_2}\right) = \frac{1}{4}$, οι εικόνες τους βρίσκονται στον κύκλο κέντρου K και ακτίνας 2. Οπότε το $|z_1-z_2|$ γίνεται μέγιστο όταν οι εικόνες των z_1, z_2 είναι αντιδιαμετρικά σημεία. Τότε $|z_1-z_2|_{max} = 2\rho = 4$.

1.481.α. Εστω $z = \alpha+\beta i,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Επειδή η εικόνα του μιγαδικού z στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται στον κύκλο που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2, ισχύει: $|z| = 2 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2 = 4 \quad (1)$.

Είναι $w = z-10+\frac{4i}{\bar{z}} = \alpha+\beta i-10+\frac{4i}{\alpha-\beta i} = \alpha+\beta i-10+\frac{4i(\alpha+\beta i)}{\alpha^2+\beta^2} \Leftrightarrow$

$$w = \alpha+\beta i-10+\frac{4i(\alpha+\beta i)}{4} = \alpha+\beta i-10+\alpha i-\beta = (\alpha-\beta-10)+(\alpha+\beta)i$$

Αν $w=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$, τότε: $\begin{cases} x=\alpha-\beta-10 \\ y=\alpha+\beta \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} x+y=2\alpha-10 \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{x+y+10}{2}$,

και $y=\dfrac{x+y+10}{2}+\beta \Leftrightarrow \beta=y-\dfrac{x+y+10}{2}=\dfrac{y-x-10}{2}$.

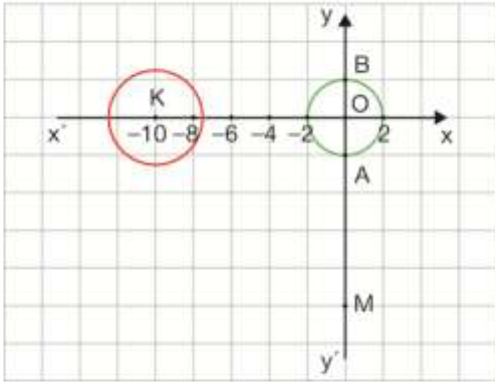
Η σχέση (1) γίνεται: $\left(\dfrac{x+y+10}{2}\right)^2+\left(\dfrac{y-x-10}{2}\right)^2=4 \Leftrightarrow$

$\dfrac{x^2+y^2+100+2xy+20x+20y}{4}+\dfrac{x^2+y^2+100-2xy+20x-20y}{4}=4 \Leftrightarrow$

$2x^2+2y^2+40x+200=16 \Leftrightarrow x^2+y^2+20x=-92 \Leftrightarrow$

$x^2+20x+100+y^2-92+100 \Leftrightarrow (x+10)^2+y^2=8 \Leftrightarrow$

$|w+10|^2=8 \Leftrightarrow |w+10|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.



β. $|z-w|=\left|\cancel{z}-\cancel{z}+10-\dfrac{4i}{\bar z}\right|=\left|10-\dfrac{4iz}{\cancel{|z|^2}}\right|=$

$=|10-iz|=\left|i\left(z-\dfrac{10}{i}\right)\right|=|z+10i|$

Το μέτρο $|z-w|$ γίνεται ελάχιστο όταν το $|z+10i|$ γίνεται ελάχιστο, δηλαδή όταν η απόσταση του σημείου $M(0,-10)$ από το κύκλο κέντρου O και ακτίνας 2.

Επειδή η ελάχιστη τιμή του $|z+10i|$ είναι το (MA) και η μέγιστη το (MB), είναι

$|z-w|_{min}=|z+10i|_{min}=(MA)=8$ και $|z-w|_{max}=|z+10i|_{max}=(MA)=12$.

Την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$ δίνει ο μιγαδικός z που έχει εικόνα το $A(0,-2)$,

άρα ο $z=-2i$, τότε $w=-2i-10+\dfrac{4i}{2i}=-8-2i$

γ. Είναι $u=w_1-2z_1+6=-8-2i-2(-2i)+6=-2+2i$.

Επειδή το u είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2+\kappa x+\lambda=0$, ισχύει ότι:

$(-2+2i)^2+\kappa(-2+2i)+\lambda=0 \Leftrightarrow 4-8i-4-2\kappa+2\kappa i+\lambda=0 \Leftrightarrow$

$(\lambda-2\kappa)+2(\kappa-4)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda-2\kappa=0 \\ \kappa-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=8 \\ \kappa=4 \end{cases}$.

δ. $u^{2012}-(4+u)^{2012}=(-2+2i)^{2012}-(4-2+2i)^{2012}=\left[2(-1+i)\right]^{2012}-\left[2(1+i)\right]^{2012} \Leftrightarrow$

$u^{2012}-(4+u)^{2012}=2^{2012}\left[(-1+i)^2\right]^{1006}-2^{2012}\left[(1+i)^2\right]^{1006} \Leftrightarrow$

$u^{2012}-(4+u)^{2012}=2^{2012}(-2i)^{1006}-2^{2012}(-2i)^{1006} \Leftrightarrow$

$u^{2012}-(4+u)^{2012}=2^{2012}\cdot 2^{1006}\cdot i^{1006}-2^{2012}\cdot 2^{1006}\cdot i^{1006}=0$.