Όριο στο x_0

3.43. **α)** Είναι $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = -2$ και $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = -1$, οπότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 4$, ενώ $f(5) = 2 \neq 4$.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to -6} f(x) = \lim\limits_{x\to -6^+} f(x) = -5$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1$, δεν έχει νόημα $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, γιατί η f δεν ορίζεται στο διάστημα $(0,2)$.

ε) Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 2$.

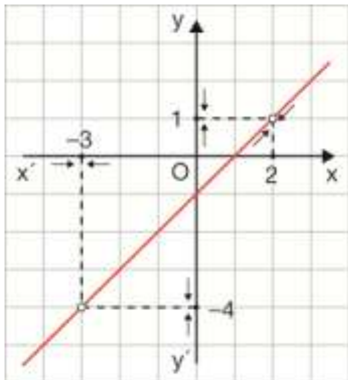
στ) Δεν έχει έννοια το $\lim\limits_{x\to 12} f(x)$, αν και το 12 ανήκει στο πεδίο ορισμού D_f της συνάρτησης, γιατί δεν υπάρχουν άλλα σημεία του D_f εκατέρωθεν του 12.

3.44. **α)** Είναι: $x^2 + x - 6 \neq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$ και $x \neq 2$. Άρα $D_f = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$.

Θα πρέπει πρώτα να απλοποιήσουμε τον τύπο της f.

Είναι $f(x) = \dfrac{x^3 - 7x + 6}{x^2 + x - 6} = \dfrac{(x-1)(x^2+x-6)}{x^2+x-6} = x - 1$.

β) Από τη γραφική παράσταση διαπιστώνουμε ότι:
$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$ και $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = -4$.



3.45. Πρέπει $x^2 - 6x \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [6, +\infty)$
και $x^2 - 16 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 16 \Leftrightarrow |x| \geq 4 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$.
Με συναλήθευση προκύπτει: $A_f = (-\infty, -4] \cup [6, +\infty)$. Επειδή στο πεδίο ορισμού της f δεν περιέχεται περιοχή του 3, το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ δεν ορίζεται.

3.46. $-2 < \lambda^2 - 5\lambda + 6 < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 - 5\lambda + 8 > 0 \\ \lambda^2 - 5\lambda + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < \lambda < 4$

3.47. Είναι

$$\lim_{x\to 1} \frac{f^4(x) - |g(x) - 1|}{\sqrt[3]{f(x)+7} - 3g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}[f^4(x) - |g(x)-1|]}{\lim\limits_{x\to 1}[\sqrt[3]{f(x)+7} - 3g(x)]} \quad \text{(όριο πηλίκου)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 1} f^4(x) - \lim\limits_{x\to 1}|g(x)-1|}{\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{f(x)+7} - \lim\limits_{x\to 1}(3g(x))} \quad \text{(όριο αθροίσματος και διαφοράς)}$$

$$=\frac{\left(\lim\limits_{x\to1}f(x)\right)^4-\left|\lim\limits_{x\to1}(g(x)-1)\right|}{\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to1}(f(x)+7)}-3\lim\limits_{x\to1}g(x)}$$ (όριο δύναμης, απόλυτης τιμής ρητής)

δύναμης & πολλαπλάσιου)

$$=\frac{1^4-\left|\lim\limits_{x\to1}g(x)-\lim\limits_{x\to1}1\right|}{\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to1}f(x)+\lim\limits_{x\to1}7}-3\cdot(-2)}$$ (όριο αθροίσματος και διαφοράς)

$$=\frac{1-|-2-1|}{\sqrt[3]{1+7}+6}$$ (όριο σταθεράς)

$$=\frac{1-3}{2+6}=-\frac{1}{4}.$$

3.48. **α)** $\lim\limits_{x\to1}\left[(x^2+1)f^3(x)-(x-2)\sqrt{g^2(x)+7}\right]=2(-4)^3-(-1)\sqrt{3^2+7}=-124$

β) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(2x-5)g^3(x)-xf(x)}{g^2(x)-3xf(x)}=\dfrac{-3\cdot3^3+4}{3^2-3(-4)}=-\dfrac{77}{21}$

3.49. **α)** $\lim\limits_{x\to1}(3x^2-5x+4)=3\cdot1^2-5\cdot1+4=3-5+4=2$

β) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x}{x+1}=\dfrac{2^2-3\cdot2}{2+1}=-\dfrac{2}{3}$

γ) $\lim\limits_{x\to1}\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+...+x+1\right)=\underbrace{1+1+...+1+1}_{\nu\text{-φορές}}=\nu$

δ) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{|x+2|-1}{|x|+3}=\dfrac{|4+2|-1}{|4|+3}=\dfrac{6-1}{4+3}=\dfrac{5}{7}$

3.50. **α)** $f(x)=x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\neq x_2$, τότε ... $f(x_1)\neq f(x_2)$

$f(x)=y\Leftrightarrow(x-1)^3=y$. Αν $y\geq0$, τότε $x-1=\sqrt[3]{y}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{y}+1$, δηλαδή $f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y}+1$,

ενώ αν $y<0$, τότε $x-1=-\sqrt[3]{-y}\Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{-y}+1\Leftrightarrow$, δηλαδή $f^{-1}(y)=-\sqrt[3]{-y}+1$.

Άρα $f^{-1}(y)=\begin{cases}\sqrt[3]{y}+1 & , y\geq0\\ -\sqrt[3]{-y}+1, & y<0\end{cases}$.

β) $\lim\limits_{x\to0}f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(-\sqrt[3]{-x}+1\right)=1$

3.51. **α)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-5x+4}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x-4)}{\cancel{x-1}}=-3$

β) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)\cancel{(x^2-1)}}{\cancel{x^2-1}}=0$

γ) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}=6$

δ) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{x^2+5x+6}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+3)(x^2-3x+9)}{(x+3)(x+2)}=$

$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-3x+9}{x+2}=\dfrac{(-3)^2-3(-3)+9}{-3+2}=\dfrac{9+9+9}{-1}=-27$

ε) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2+x-6}{x^3-2x^2+3x-6}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cancel{(x-2)}\,(x^2+x+3)}{\cancel{(x-2)}\,(x^2+3)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x+3}{x^2+3}=\dfrac{2^2+2+3}{2^2+3}=\dfrac{9}{7}$

στ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+2)\,\cancel{(x-1)}}{x\,\cancel{(x-1)}}=3.$

3.52. **α)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{(x-1)}\,(x^2+x+2)}{\cancel{(x-1)}\,(x-4)}=-\dfrac{4}{3}$

β) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^4-4}{x^2-2}=\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{\cancel{(x^2-2)}\,(x^2+2)}{\cancel{x^2-2}}=4$

γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{(x-1)}\,(x+1)(x^2-4)}{\cancel{(x-1)}\,(x^2+x+1)}=-2$

δ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^{\cancel{2}}\,(x+1)}{\cancel{(x-1)}\,(x^2+x+2)}=0$

ε) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{x}\,(6x^2+11x+6)}{\cancel{x}}=6$

3.53. **α)** $\lim\limits_{x\to\lambda}\dfrac{x^3-\lambda^3}{x^2-\lambda^2}=\lim\limits_{x\to\lambda}\dfrac{\cancel{(x-\lambda)}\,(x^2+\lambda x+\lambda^2)}{\cancel{(x-\lambda)}\,(x+\lambda)}=\dfrac{3\lambda}{2}$

β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-2x^2-3x-2}{x^4-5x^3-14x^2+80}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cancel{(x-2)}\,(x^3+2x^2+2x+1)}{\cancel{(x-2)}\,(x^3-3x^2-20x-40)}=-\dfrac{1}{4}$

γ) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[4]{\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}}=\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[4]{\dfrac{\cancel{(x-2)}\,(x^2+2x+4)}{(x+3)\,\cancel{(x-2)}}}=\sqrt[4]{\dfrac{12}{5}}$

3.54. **α)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^\nu-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{(x-1)}\,(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+\ldots+x+1)}{\cancel{(x-1)}\,(x+1)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+\ldots+x+1}{x+1}=\dfrac{\underbrace{1+1+\ldots+1}_{\nu\text{-φορές}}}{2}=\dfrac{\nu}{2}$

β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^\rho-1}{x^\mu-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^{\rho-1}+x^{\rho-2}+\ldots+1)}{(x-1)(x^{\mu-1}+x\mu-2+\ldots+1)}=\dfrac{\overbrace{1+1+\ldots+1}^{\rho\text{-φορές}}}{\underbrace{1+1+\ldots+1}_{\mu\text{-φορές}}}=\dfrac{\rho}{\mu}.$

γ) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-(\lambda+1)x+\lambda}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-\lambda x-x+\lambda}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x(x^2-1)-\lambda(x-1)}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{x(x-1)(x+1)-\lambda(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}\left[x(x+1)-\lambda\right]}{\cancel{x-1}}=$

$=\lim\limits_{x\to1}\left[x(x+1)-\lambda\right]=2-\lambda$

δ) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\kappa x^{\kappa+1}-(\kappa+1)x^{\kappa}+1}{x^{\kappa+1}-x^{\kappa}+x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\kappa x^{\kappa}(x-1)-(x^{\kappa}-1)}{x^{\kappa}(x-1)+(x-1)}=$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{\kappa x^{\kappa}\cancel{(x-1)}-\cancel{(x-1)}\left(x^{\kappa-1}+x^{\kappa-2}+...+x+1\right)}{\cancel{(x-1)}\left(x^{\kappa}+1\right)}=0$

ε) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x+x^2+...+x^{\kappa}-\kappa}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x+x^2+...+x^{\kappa}-\overbrace{1-1-...-1}^{\kappa\text{-φορές}}}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)+(x^2-1)+...+(x^{\kappa}-1)}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)+(x-1)(x+1)+...+(x-1)\left(x^{\kappa-1}+x^{\kappa-2}+...+1\right)}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)\left[1+(x+1)+...+\left(x^{\kappa-1}+x^{\kappa-2}+...+1\right)\right]}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to1}\left[1+(x+1)+...+\left(x^{\kappa-1}+x^{\kappa-2}+...+1\right)\right]=1+2+...+\kappa=\frac{\kappa(\kappa+1)}{2}$.

3.55. $\lim\limits_{x\to3}\frac{\alpha x^2+\beta x-9\alpha-3\beta}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\frac{\alpha(x-3)(x+3)+\beta(x-3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\left[\alpha(x+3)+\beta\right]=6\alpha+\beta$

3.56. $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2\Leftrightarrow\alpha+\beta=1\Leftrightarrow\beta=1-\alpha$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+f(x)-3}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x^2+\alpha x+1-\alpha-3}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{2\cancel{(x-1)}(x+1)+\alpha\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}=\frac{4+\alpha}{3}=1\Leftrightarrow\alpha=-1$

και $\beta=2$

3.57. $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^{\nu}-3^{\nu}}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\frac{(x-3)\left(x^{\nu-1}+3x^{\nu-2}+...+3^{\nu-2}x+3^{\nu-1}\right)}{x-3}=\nu3^{\nu-1}=27\nu\Leftrightarrow$

$3^{\nu-1}=27\Leftrightarrow\nu-1=3\Leftrightarrow\nu=4$

3.58. **α)** Είναι: $\lim\limits_{x\to3}\frac{(\kappa^2+2)x^2-2\kappa^2x-3\kappa^2-10x+12}{x-3}=2\kappa^2-5\kappa+5\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to3}\frac{\kappa^2x^2+2x^2-2\kappa^2x-3\kappa^2-10x+12}{x-3}=2\kappa^2-5\kappa+5\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to3}\frac{\kappa^2(x^2-2x-3)+2(x^2-5x+6)}{x-3}=2\kappa^2-5\kappa+5\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to3}\frac{\kappa^2(x-3)(x+1)+2(x-3)(x-2)}{x-3}=2\kappa^2-5\kappa+5\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to3}\frac{\cancel{(x-3)}\left[\kappa^2(x+1)+2(x-2)\right]}{\cancel{x-3}}=2\kappa^2-5\kappa+5\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to3}\left[\kappa^2(x+1)+2(x-2)\right]=2\kappa^2-5\kappa+5\Leftrightarrow$$

$$4\kappa^2+2=2\kappa^2-5\kappa+5\Leftrightarrow2\kappa^2+5\kappa-3=0\Leftrightarrow\kappa=-3 \text{ ή } \kappa=\frac{1}{2}.$$

β) $$\lim_{x\to2}\frac{(\kappa^2+2)x^2-4\kappa^2-6x+4}{x-2}=3\kappa^2+\kappa+4\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to2}\frac{\kappa^2x^2+2x^2-4\kappa^2-6x+4}{x-2}=3\kappa^2+\kappa+4\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to2}\frac{\kappa^2(x^2-4)+2(x^2-3x+2)}{x-2}=3\kappa^2+\kappa+4\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to2}\frac{\kappa^2(x-2)(x+2)+2(x-1)(x-2)}{x-2}=3\kappa^2+\kappa+4\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to2}\frac{\cancel{(x-2)}\left[\kappa^2(x+2)+2(x-1)\right]}{\cancel{x-2}}=3\kappa^2+\kappa+4\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to2}\left[\kappa^2(x+2)+2(x-1)\right]=3\kappa^2+\kappa+4 \text{ άρα } 4\kappa^2+2=3\kappa^2+\kappa+4\Leftrightarrow$$

$$\kappa^2-\kappa-2=0\Leftrightarrow\kappa=2 \text{ ή } \kappa=-1$$

3.59. $f^3(x)-3f^2(x)+3f(x)=x+9\Leftrightarrow(f(x)-1)^3=x+8$.

Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, με $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x_1=x_2$.

Είναι $f(x)=y\Leftrightarrow(y-1)^3=x+8\Leftrightarrow x=(y-1)^3-8$,

άρα: $f^{-1}(x)=(x-1)^3-8=(x-3)\left[(x-1)^2+2(x-1)+4\right]$.

$$\lim_{x\to3}\frac{f^{-1}(x)}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)\left[(x-1)^2+2(x-1)+4\right]}{(x-3)(x-2)}=12$$

3.60. **α)** $$\lim_{x\to7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}=\lim_{x\to7}\frac{(2-\sqrt{x-3})(2+\sqrt{x-3})}{(x-7)(x+7)(2+\sqrt{x-3})}=$$

$$=\lim_{x\to7}\frac{-\cancel{(x-7)}}{\cancel{(x-7)}(x+7)(2+\sqrt{x-3})}=-\frac{1}{56}$$

β) $$\lim_{x\to1}\frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(2-\sqrt{x+3})(2+\sqrt{x+3})}{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}=\lim_{x\to1}\frac{-\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(2+\sqrt{x+3})}=-\frac{1}{4}$$

γ) $$\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{1-h}-\sqrt{1+h}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(\sqrt{1-h}-\sqrt{1+h})(\sqrt{1-h}+\sqrt{1+h})}{h(\sqrt{1-h}+\sqrt{1+h})}\lim_{h\to0}\frac{-2\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{1-h}+\sqrt{1+h})}=-1$$

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}{x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ε) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(\sqrt{2x+3}-1\right)\left(\sqrt{2x+3}+1\right)\left(\sqrt{5+x}+2\right)}{\left(\sqrt{5+x}-2\right)\left(\sqrt{5+x}+2\right)\left(\sqrt{2x+3}+1\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2\cancel{(x+1)}\left(\sqrt{5+x}+2\right)}{\cancel{(x+1)}\left(\sqrt{2x+3}+1\right)}=4$

στ) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x-2}-1}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}{\left(\sqrt{x-2}-1\right)\left(\sqrt{x-2}+1\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}{(x-2-1)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\cancel{(x-3)}\left(\sqrt{x-2}+1\right)}{\cancel{(x-3)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}=\dfrac{2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

ζ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{9-x}-3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x+9}-3\right)\left(\sqrt{x+9}+3\right)\left(\sqrt{9-x}+3\right)}{\left(\sqrt{9-x}-3\right)\left(\sqrt{9-x}+3\right)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{x}\left(\sqrt{9-x}+3\right)}{-\cancel{x}\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=-1$

η) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{\sqrt{x+7}-\sqrt{8}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{x+8}-3\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{8}\right)}{\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{8}\right)}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

θ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x-\sqrt{x+2}\right)\left(x+\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}{\left(\sqrt{4x+1}-3\right)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cancel{(x-2)}(x+1)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}{4\cancel{(x-2)}\left(x+\sqrt{x+2}\right)}=\dfrac{9}{8}$

3.61. **α)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}\right)\left(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}\right)}{(x-1)(x-3)\left(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-4\cancel{(x-3)}}{(x-1)\cancel{(x-3)}\left(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}\right)}=-\dfrac{1}{3}$

β) $$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}\right)\left(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1}\right)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3}\right)}{\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}\right)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3}\right)\left(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-7\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3}\right)}{-8\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1}\right)}=\frac{7}{12}$$

γ) $$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{8}}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x^3}-\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{x^3}+\sqrt{8}\right)}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x^3}+\sqrt{8}\right)}=\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x^3}+\sqrt{8}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{\cancel{(x-2)}\left(x^2+2x+4\right)}{\cancel{(x-2)}(x+2)\left(\sqrt{x^3}+\sqrt{8}\right)}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$$

3.62. $$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{f(x)+7}-3}{2-\sqrt{2f^2(x)-4}}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{f(x)+7}-3\right)\left(\sqrt{f(x)+7}+3\right)\left(2+\sqrt{2f^2(x)-4}\right)}{\left(2-\sqrt{2f^2(x)-4}\right)\left(2+\sqrt{2f^2(x)-4}\right)\left(\sqrt{f(x)+7}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(f(x)-2)}\left(2+\sqrt{2f^2(x)-4}\right)}{-2\cancel{(f(x)-2)}(f(x)+2)\left(\sqrt{f(x)+7}+3\right)}=-\frac{1}{12}$$

3.63. α) $$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt[3]{x+5}-2}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{\left(\sqrt[3]{x+5}-2\right)\left[\left(\sqrt[3]{x+5}\right)^2+2\sqrt[3]{x+5}+4\right]}{(x-3)\left[\left(\sqrt[3]{x+5}\right)^2+2\sqrt[3]{x+5}+4\right]}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}\left[\left(\sqrt[3]{x+5}\right)^2+2\sqrt[3]{x+5}+4\right]}=\frac{1}{12}$$

β) $$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{3}}{x-5}=\lim_{x\to5}\frac{\left(\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{3}\right)\left[\left(\sqrt[3]{x-2}\right)^2+\sqrt[3]{x-2}\cdot\sqrt[3]{3}+\left(\sqrt[3]{3}\right)^2\right]}{(x-5)\left[\left(\sqrt[3]{x-2}\right)^2+\sqrt[3]{x-2}\cdot\sqrt[3]{3}+\left(\sqrt[3]{3}\right)^2\right]}=$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{x-5}{(x-5)\left[\left(\sqrt[3]{x-2}\right)^2+\sqrt[3]{x-2}\cdot\sqrt[3]{3}+\left(\sqrt[3]{3}\right)^2\right]}=$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x-2}\right)^2+\sqrt[3]{x-2}\cdot\sqrt[3]{3}+\left(\sqrt[3]{3}\right)^2}=\frac{\sqrt[3]{3}}{9}.$$

γ) $$\lim_{x\to1}\frac{2x-2}{\sqrt[3]{2x+6}-2}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)\left[\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2+2\sqrt[3]{2x+6}+4\right]}{\left(\sqrt[3]{2x+6}-2\right)\left[\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2+2\sqrt[3]{2x+6}+4\right]}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2\cancel{(x-1)}\left[\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2+2\sqrt[3]{2x+6}+4\right]}{2\cancel{(x-1)}}=12$$

δ) $$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+h}\right)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x+h}+\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^2\right)}{h\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x+h}+\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^2\right)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x+h}+\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^2\right)}=-\frac{\sqrt[3]{x}}{3x}$$

ε) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{3x-2}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2+2x-8\right)\left[\sqrt[3]{(x+2)^2}+\sqrt[3]{x+2}\cdot\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{(3x-2)^2}\right]}{\left(\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{3x-2}\right)\left[\sqrt[3]{(x+2)^2}+\sqrt[3]{x+2}\cdot\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{(3x-2)^2}\right]}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2+2x-8\right)\left[\sqrt[3]{(x+2)^2}+\sqrt[3]{x+2}\cdot\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{(3x-2)^2}\right]}{\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^3-\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)^3}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+4)\left(\sqrt[3]{(x+2)^2}+\sqrt[3]{x+2}\cdot\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{(3x-2)^2}\right)}{-2\cancel{(x-2)}}=-18\sqrt[3]{2}$$

στ) $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{\sqrt{x+7}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt[3]{x+6}-2\right)\left[\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2+2\sqrt[3]{x+6}+4\right]\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\left(\sqrt{x+7}-3\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)\left[\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2+2\sqrt[3]{x+6}+4\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\cancel{(x-2)}\left[\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2+2\sqrt[3]{x+6}+4\right]}=\frac{1}{2}$$

3.64. **α)** $$\lim_{x\to 4^+}\frac{(x-4)(x+4)}{\sqrt{(x-4)(x+2)}}=\lim_{x\to 4^+}\frac{\cancel{(x-4)}(x+4)\sqrt{x-4}}{\cancel{(x-4)}\sqrt{x+2}}=0$$

β) $$\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{(x-2)(x+2)}}{\sqrt{x-2}}=$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}=$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x-2}\left(1-\sqrt{x+2}\right)}{\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to 2^+}\left(1-\sqrt{x+2}\right)=1-2=-1$$

γ) Θέτουμε $\sqrt{x}=u$, $u>0$, άρα $x=u^2$, και για $x\to 4$ είναι $u\to 2$.

Εχουμε: $$\lim_{x\to 4}\frac{x\cdot\sqrt{x}-8}{x+\sqrt{x}-6}=\lim_{u\to 2}\frac{u^2u-8}{u^2+u-6}=\lim_{u\to 2}\frac{u^3-8}{u^2+u-6}=$$

$$=\lim_{u\to 2}\frac{\cancel{(u-2)}\left(u^2+2u+4\right)}{(u+3)\cancel{(u-2)}}=\lim_{u\to 2}\frac{u^2+2u+4}{u+3}=\frac{12}{5}.$$

δ) $$\lim_{x\to\alpha}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}+\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}=\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}+\frac{\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}\right)}{\sqrt{x-\alpha}\sqrt{x+\alpha}\left(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}\right)}+\frac{\cancel{\sqrt{x-\alpha}}}{\cancel{\sqrt{x-\alpha}}\sqrt{x+\alpha}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{(x-\alpha)\sqrt{x-\alpha}}{\left(\sqrt{x-\alpha}\right)^2\sqrt{x+\alpha}\left(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}\right)}+\frac{1}{\sqrt{x+\alpha}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{\cancel{(x-\alpha)}\sqrt{x-\alpha}}{\cancel{(x-\alpha)}\sqrt{x+\alpha}\left(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}\right)}+\frac{1}{\sqrt{x+\alpha}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x+\alpha}\left(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}\right)}+\frac{1}{\sqrt{x+\alpha}}\right]=\frac{\sqrt{2\alpha}}{2\alpha}$$

ε) $$\lim_{x\to1}\frac{x\sqrt{5-x}-\sqrt{5-x}-x+x^2}{x\sqrt{10-x}-\sqrt{10-x}-x+1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{5-x}\,\cancel{(x-1)}+x\cancel{(x-1)}}{\sqrt{10-x}\,\cancel{(x-1)}-\cancel{(x-1)}}=\frac{3}{2}$$

3.65. **α)** $$\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(x+4)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\left(\sqrt{x}\right)^3+2\left(\sqrt{x}\right)^2+4\sqrt{x}+5\right)}\lim_{x\to4}\frac{\cancel{(x-4)}(x+4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\cancel{(x-4)}\left(\left(\sqrt{x}\right)^3+2\left(\sqrt{x}\right)^2+4\sqrt{x}+5\right)}=$$

$$=\frac{32}{29}$$

β) $$\lim_{x\to4}\frac{x(x-4)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\lim_{x\to4}\frac{x\cancel{(x-4)}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\cancel{(x-4)}\left(\sqrt{x}-3\right)}=-16$$

γ) $$\lim_{x\to1}\frac{(x+5)-3\sqrt{x+3}}{(x+2)-\sqrt{x+8}}\lim_{x\to1}\frac{\left[(x+5)-3\sqrt{x+3}\right]\left[(x+5)+3\sqrt{x+3}\right]\left[(x+2)+\sqrt{x+8}\right]}{\left[(x+2)-\sqrt{x+8}\right]\left[(x+2)+\sqrt{x+8}\right]\left[(x+5)+3\sqrt{x+3}\right]}=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+2)\left[(x+2)+\sqrt{x+8}\right]}{\cancel{(x-1)}(x+4)\left[(x+5)+3\sqrt{x+3}\right]}=\frac{3}{10}$$

3.66. **α)** Για $x=3$ είναι $\sqrt[3]{x+24}=\sqrt[3]{27}=3$ και $\sqrt{x+13}=\sqrt{16}=4$, οπότε κάνουμε τη διάσπαση $1=4-3$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt[3]{x+24}-\sqrt{x+13}+1}{x-3}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt[3]{x+24}-\sqrt{x+13}+4-3}{x-3}=\lim_{x\to3}\left(\frac{\sqrt[3]{x+24}-3}{x-3}-\frac{\sqrt{x+13}-4}{x-3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to3}\left[\frac{\left(\sqrt[3]{x+24}^{\,3}-3^3\right)}{(x-3)\left[\left(\sqrt[3]{x+24}\right)^2+3\sqrt[3]{x+24}+9\right]}-\frac{x+13-16}{(x-3)\left(\sqrt{x+13}+4\right)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 3}\left[\frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}\left[\left(\sqrt[3]{x+24}\right)^2+3\sqrt[3]{x+24}+9\right]}-\frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}\left(\sqrt{x+13}+4\right)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 3}\left[\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+24}\right)^2+3\sqrt[3]{x+24}+9}-\frac{1}{\sqrt{x+13}+4}\right]=\frac{1}{27}-\frac{1}{8}=-\frac{19}{216}.$$

β) $$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt[3]{x+3}-\sqrt{x+4}+1}{x^2-8x+15}=\lim_{x\to 5}\left[\frac{\sqrt[3]{x+3}-2}{(x-3)(x-5)}-\frac{\sqrt{x+4}-3}{(x-3)(x-5)}\right]=$$

$$\lim_{x\to 5}\left[\frac{\left(\sqrt[3]{x+3}-2\right)\left[\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^2+2\sqrt[3]{x+3}+2\right]}{(x-3)(x-5)\left[\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^2+2\sqrt[3]{x+3}+2\right]}-\frac{\left(\sqrt{x+4}-3\right)\left(\sqrt{x+4}+3\right)}{(x-3)(x-5)\left(\sqrt{x+4}+3\right)}\right]=$$

$$\lim_{x\to 5}\left[\frac{\cancel{x-5}}{(x-3)\cancel{(x-5)}\left[\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^2+2\sqrt[3]{x+3}+4\right]}-\frac{\cancel{x-5}}{(x-3)\cancel{(x-5)}\left(\sqrt{x+4}+3\right)}\right]=-\frac{1}{24}$$

γ) $$\lim_{x\to 2}\frac{2\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}-\sqrt{6-x}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left[\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{x-2}+\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x-2}\right]=$$

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}+\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)}\right]=$$

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{-2\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}+\frac{2\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)}\right]=0$$

δ) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{x+7}+\sqrt{3x-2}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{x-1}-\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}+\frac{\sqrt{3x-2}-1}{x-1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\left[\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^2+\sqrt[3]{2x-1}+1\right]}-\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}\left[\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^2+2\sqrt[3]{x+7}+4\right]}+\frac{3\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{3x-2}+1\right)}\right)=$$

$$=\frac{25}{12}$$

3.67. α) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x^2-1}\overset{\sqrt[6]{x}=u}{=}\lim_{u\to 1}\frac{u^3-u^2}{u^{12}-1}=\lim_{u\to 1}\frac{u^2\cancel{(u-1)}}{\cancel{(u-1)}\left(u^2+u+1\right)\left(u^3+1\right)\left(u^6+1\right)}=\frac{1}{12}$$

β) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}-2}{x-1}\underset{u\to 1}{\overset{\sqrt[12]{x}=u}{=}}\lim_{u\to 1}\frac{u^4+u^3-2}{u^{12}-1}=\lim_{u\to 1}\frac{\cancel{(u-1)}\left(u^3+2u^2+2u+2\right)}{\cancel{(u-1)}\left(u^2+u+1\right)\left(u^3+1\right)\left(u^6+1\right)}=\frac{7}{12}$$

γ) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}\underset{u\to 1}{\overset{\sqrt[20]{x}=u}{=}}\lim_{u\to 1}\frac{u^5-1}{u^4-1}=\lim_{u\to 1}\frac{\cancel{(u-1)}\left(u^4+u^3+u^2+u+1\right)}{\cancel{(u-1)}(u+1)\left(u^2+1\right)}=\frac{5}{4}$$

δ) Εχουμε διαφορετικής τάξης ριζικά του $x+1$ με Ε.Κ.Π. των τάξεων των ριζών $[2,3,6]=6$.

Οπότε θέτουμε: $\sqrt[6]{x+1}=y$, άρα $\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[6]{(x+1)^2}=y^2$ και $\sqrt{x+1}=\sqrt[6]{(x+1)^3}=y^3$ και επειδή $x\to 0$, τότε $y\to 1$.

Άρα το όριο γίνεται: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-2\sqrt[3]{x+1}+1}{\sqrt[6]{x+1}+\sqrt{x+1}-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{y^3-2y^2+1}{y+y^3-2}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(y-1)}(y^2-y-1)}{\cancel{(y-1)}(y^2+y+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{y^2-y-1}{y^2+y+2}=-\frac{1}{4}$$

ε) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt[6]{3x+1}}{\sqrt[3]{3x+1}-\sqrt[6]{3x+1}}\overset{\sqrt[6]{3x+1}=u}{\underset{u\to 1}{=}}\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{u^3-u}{u^2-u}=\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{u\cancel{(u-1)}(u+1)}{u\cancel{(u-1)}}=2$

στ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{4x+1}-3\sqrt[6]{4x+1}+2}{\sqrt{4x+1}-1}\overset{\sqrt[6]{4x+1}=u}{\underset{u\to 1}{=}}$

$$=\lim_{u\to 1}\frac{u^2-3u+2}{u^3-1}=\lim_{u\to 1}\frac{\cancel{(u-1)}(u-2)}{\cancel{(u-1)}(u^2+u+1)}=-\frac{1}{3}$$

3.68. α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x\sqrt{x}-3x+2\sqrt{x}}\overset{\sqrt{x}=u}{\underset{u\to 1}{=}}\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{u^4-4u^2+3}{u^3-3u^2+2u}=\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{\cancel{(u-1)}(u+1)(u^2-3)}{u\cancel{(u-1)}(u-2)}=4$

β) $\dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt{x+5}-7}{x-4}=\dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt{x+5}-4-3}{x-4}=\dfrac{2\sqrt{x}-4}{x-4}+\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}=$

$$=\frac{(2\sqrt{x}-4)(2\sqrt{x}+4)}{(x-4)(2\sqrt{x}+4)}+\frac{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}=$$

$$=\frac{4(x-4)}{(x-4)(2\sqrt{x}+4)}+\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}=\frac{4}{2\sqrt{x}+4}+\frac{1}{\sqrt{x+5}+3}.$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt{x+5}-7}{x-4}=\dfrac{4}{8}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{3}$ άρα $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{2\sqrt{x}+\sqrt{x+5}-7}=\dfrac{3}{2}$.

γ) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x\sqrt{x}+x-6\sqrt{x}}\overset{\sqrt{x}=u}{\underset{u\to 2}{=}}\lim\limits_{u\to 2}\dfrac{u^4-6u^2+8}{u^3+u^2-6u}=\lim\limits_{u\to 2}\dfrac{\cancel{(u-2)}(u+2)(u^2-2)}{u(u+3)\cancel{(u-2)}}=\dfrac{4}{5}$

δ) Επειδή $x\to 6^+$ είναι $x-6>0$, οπότε $x-6=|x-6|=\sqrt{(x-6)^2}$ και:

$$\lim_{x\to 6^+}=\frac{x-6}{\sqrt{x-2-2\sqrt{x-2}}}=\lim_{x\to 6^+}\frac{\sqrt{(x-6)^2}}{\sqrt{\dfrac{(x-2)^2-4(x-2)}{x-2+2\sqrt{x-2}}}}=\lim_{x\to 6^+}\sqrt{\frac{(x-6)^2}{\dfrac{(x-2)(x-2-4)}{x-2+2\sqrt{x-2}}}}=$$

$$=\lim_{x\to 6^+}\sqrt{\frac{(x-6)^2(x-2+2\sqrt{x-2})}{(x-2)(x-6)}}=\lim_{x\to 6^+}\sqrt{\frac{(x-6)(x-2+2\sqrt{x-2})}{x-2}}=0.$$

3.69. **α)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x^2+4}\cdot\sqrt[3]{3x+2}-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x^2+4}\cdot\sqrt[3]{3x+2}-4\sqrt[3]{3x+2}+4\sqrt[3]{3x+2}-8}{x-2}=$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\sqrt[3]{3x+2}\,\frac{\sqrt{3x^2+4}-4}{x-2}+4\frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2}\right]=2\cdot\frac{3}{2}+4\cdot\frac{3}{12}=4 \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x^2+4}-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{3x^2+4}-4\right)\left(\sqrt{3x^2+4}+4\right)}{(x-2)\left(\sqrt{3x^2+4}+4\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+4-16}{(x-2)\left(\sqrt{3x^2+4}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{3x^2+4}+4\right)}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2} \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt[3]{3x+2}-2\right)\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+2\sqrt[3]{3x+2}+4\right]}{(x-2)\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+2\sqrt[3]{3x+2}+4\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^3-2^3}{(x-2)\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+2\sqrt[3]{3x+2}+4\right]}=\lim_{x\to 2}\frac{3x+2-8}{(x-2)\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+2\sqrt[3]{3x+2}+4\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+2\sqrt[3]{3x+2}+4\right]}=\frac{3}{4+4+4}=\frac{1}{4}$$

β) $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{x-4}{\sqrt{x+2-\sqrt{9x}}}=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{x-4}{\sqrt{\dfrac{\left(x+2-\sqrt{9x}\right)\left(x+2+\sqrt{9x}\right)}{x+2+\sqrt{9x}}}}=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{x-4}{\dfrac{\sqrt{(x+2)^2-\sqrt{9x}^2}}{\sqrt{x+2+\sqrt{9x}}}}=$

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{(x-4)\sqrt{x+2+\sqrt{9x}}}{\sqrt{x^2+4x+4-9x}}=\lim_{x\to 4^+}\frac{(x-4)\sqrt{x+2+\sqrt{9x}}}{\sqrt{x^2-5x+4}}=\lim_{x\to 4^+}\frac{(x-4)\sqrt{x+2+\sqrt{9x}}}{\sqrt{(x-4)(x-1)}}=$$

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{\left(\sqrt{x-4}\right)^{\cancel{2}}\sqrt{x+2+\sqrt{9x}}}{\cancel{\sqrt{x-4}}\cdot\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to 4^+}\frac{\sqrt{x-4}\sqrt{x+2+\sqrt{9x}}}{\sqrt{x-1}}=0$$

3.70. **α)** Για να ορίζετε η συνάρτηση f πρέπει: $(1+\alpha x)(1+\beta x)\geq 0$ και $x\neq 0$.

Είναι: $1+\alpha x=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{\alpha}$ και $1+\beta x=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{\beta}$.

Είναι: $1<\alpha<\beta \Leftrightarrow 1>\dfrac{1}{\alpha}>\dfrac{1}{\beta}\Leftrightarrow -1<-\dfrac{1}{\alpha}<-\dfrac{1}{\beta}<0$

Άρα $A=\left(-\infty,-\dfrac{1}{\alpha}\right]\cup\left[-\dfrac{1}{\beta},0\right)\cup(0,+\infty)$

x	$-\infty$ $\qquad$ $-1/\alpha$	$\qquad$ $-1/\beta$	$\qquad$ $+\infty$
$1+\alpha x$	$-$	$+$	$+$
$1+\beta x$	$-$	$-$	$+$
Γινόμενο	$+$	$-$	$+$

β) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{(1+\alpha x)(1+\beta x)}-1}{x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{(1+\alpha x)(1+\beta x)}-1\right)\left(\sqrt{(1+\alpha x)(1+\beta x)}+1\right)}{x\left(\sqrt{(1+\alpha x)(1+\beta x)}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{(1+\alpha x)(1+\beta x)}\right)^2-1^2}{x\left(\sqrt{(1+\alpha x)(1+\beta x)}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\alpha x+\beta x+\alpha\beta x^2-1}{x\left(\sqrt{(1+\alpha x)(1+\beta x)}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\alpha+\beta+\alpha\beta x)}{x\left(\sqrt{(1+\alpha x)(1+\beta x)}+1\right)}=\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

3.71. **α)** $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+x-1\right)=1^2+1-1=1,\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x-1)=2\cdot 1-1=1$

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$, άρα και $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$

β) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2\sqrt{x+1}-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2(x+1-1)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{2}{1+1}=1$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(6x+1)=1$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$, άρα και $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

3.72. Για $x\neq 3$ έχουμε: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x-2)=1$

Για $x<1$ είναι: $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{x-1}=1.$

3.73. Είναι: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\lambda^2x^2-3\lambda x+5\right)=4\lambda^2-6\lambda+5$

και $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x^2+\lambda^2x+1\right)=4+2\lambda^2+1=2\lambda^2+5$.

Πρέπει: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)\Leftrightarrow 4\lambda^2-6\lambda+5=2\lambda^2+5$

$$\Leftrightarrow 2\lambda^2-6\lambda=0\Leftrightarrow 2\lambda(\lambda-3)=0\Leftrightarrow \lambda=0 \text{ ή } \lambda=3.$$

3.74. Επειδή η C_f διέρχεται από το σημείο $A(-2,-8)$,

ισχύει: $f(-2)=-8\Leftrightarrow 2\alpha(-2)+3\beta=-8\Leftrightarrow -4\alpha+3\beta=-8\ \ (1)$

Επειδή υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, ισχύει: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

Είναι: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2\alpha x+3\beta)=2\alpha+3\beta$

και $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)(\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)\left(\sqrt{x}+1\right)=4.$

Οπότε $2\alpha+3\beta=4\ \ (2)$

Από τις $(1),(2)$ έχουμε: $\left.\begin{aligned}-4\alpha+3\beta&=-8\\ 2\alpha+3\beta&=4\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow \begin{aligned}\alpha&=2\\ \beta&=0\end{aligned}$

3.75. Επειδή υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, ισχύει: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$.

Είναι: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left[\alpha^2x^2-\beta(x+1)+3\right]=9\alpha^2-4\beta+3$

και $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\left[\left(2\alpha-3\beta^2\right)x+5\beta^2+1\right]=3\left(2\alpha-3\beta^2\right)+5\beta^2+1=$

$=6\alpha-9\beta^2+5\beta^2+1=6\alpha-4\beta^2+1$

Οπότε $9\alpha^2-4\beta+3=6\alpha-4\beta^2+1\Leftrightarrow 9\alpha^2-6\alpha+4\beta^2-4\beta+2=0\Leftrightarrow$

$9\alpha^2-6\alpha+1+4\beta^2-4\beta+1=0\Leftrightarrow(3\alpha-1)^2+(2\beta-1)^2=0$

Όμως $(3\alpha-1)^2\ge 0$ και $(2\beta-1)^2\ge 0$

οπότε πρέπει $3\alpha-1=0$ και $2\beta-1=0\Leftrightarrow \alpha=\dfrac{1}{3}$ και $\beta=\dfrac{1}{2}$.

3.76. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\Leftrightarrow\alpha+\beta=2\ (1)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)\Leftrightarrow 2\alpha-\beta=4\ (2)$

Από $(1),(2)$ είναι $\alpha=2$, $\beta=0$

3.77. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\Leftrightarrow\alpha+\beta=6\ (1)$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)\Leftrightarrow -\alpha+3\beta=2\ (2)$

Από $(1),(2)$ είναι $\alpha=4$, $\beta=2$

3.78. $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)\Leftrightarrow\kappa-2\lambda=-\dfrac{1}{2}$ αδύνατο, αφού $\kappa,\lambda\in\mathbb{Z}$ και $\kappa-2\lambda\in\mathbb{Z}$

3.79. **α)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x^2-x|-6}{|x-4|-1}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{-x+4-1}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+2)}{-(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+2}{-1}=-5$

β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-2|-1}{|x|-1}\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-x+2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-(x-1)}{x-1}=-1$

γ) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x+1|+|x^2-4|-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x+1|+|x-2|\cdot|x+2|-9}{x-3}\quad(1)$

x	$-\infty$ -2	-1	2	(3) $+\infty$
$x+1$	$-$	$-$ 0	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$ 0	$+$
$x+2$	$-$ 0	$+$	$+$	$+$

Λόγω του πίνακα προσήμων η (1) γίνεται: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x+1|+|x^2-4|-9}{x-3}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1+x^2-4-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+4)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}=\lim\limits_{x\to 3}(x+4)=7$

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x-2|-|x+2|}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x+2-x-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x}{x}=-2$

ε) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{|x|-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{x-1}}=0$

στ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x^2-7x+10|-|x-5|}{|x^2-2x|-|x|}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-7x+10+x-5}{-x^2+2x-x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-6x+5}{-x^2+x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x-5)}{-x\cancel{(x-1)}}=4$

3.80. **α)** $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{5x^2+4|x|}{x^2+2|x|}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{5x^2-4x}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cancel{x}(5x-4)}{\cancel{x}(x-2)}=2$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{5x^2+4|x|}{x^2+2|x|}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{5x^2+4x}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cancel{x}(5x+4)}{\cancel{x}(x+2)}=2$, άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2+4|x|}{x^2+2|x|}=2$

β) $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{|x+1|+|x+2|-1}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{-x-1+x+2-1}{x^2+x}=0$

και $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x+1+x+2-1}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{2\cancel{(x+1)}}{x\cancel{(x+1)}}=-2$, άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x+1|+|x+2|-1}{x^2+x}$.

γ) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|x^2-x-2|-|2-x|}{|4-x^2|}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-x^2+x+2-2+x}{4-x^2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x\cancel{(2-x)}}{\cancel{(2-x)}(2+x)}=\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|x^2-x-2|-|2-x|}{|4-x^2|}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-x-2+2-x}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\dfrac{1}{2}$,

άρα $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x^2-x-2|-|2-x|}{|4-x^2|}=\dfrac{1}{2}$

δ) Εστω $f(x)=\dfrac{|x^2-5x+6|-|9-x^2|}{x^2-3|x|+|x-3|}$, $x\neq 3$

x	$-\infty$		-3		0		2		3		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-5x+6		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$9-x^2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{-(x^2-5x+6)-(9-x^2)}{x^2-3x-(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{-x^2+5x-6-9+x^2}{x^2-3x-x+3}=$

$=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{5x-15}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{5\cancel{(x-3)}}{(x-1)\cancel{(x-3)}}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{5}{x-1}=\dfrac{5}{2}$

και $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{(x^2-5x+6)+(9-x^2)}{x^2-3x+(x-3)}=$

$=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{-5x+15}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{-5(x-3)}{(x-3)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{-5x}{x+1}=-\dfrac{5}{4}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)$ δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$.

ε) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{x^2+8x+16}}{x+4}=\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{(x+4)^2}}{x+4}=\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{|x+4|}{x+4}$

$\lim\limits_{x\to-4^-}\dfrac{|x+4|}{x+4}=\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{-(x+4)}{x+4}=-1$, $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{|x+4|}{x+4}=\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x+4}{x+4}=1$,

άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{x^2+8x+16}}{x+4}$

στ) $\lim\limits_{x\to4^-}\dfrac{|x^2-5x+4|}{|x-2|-2}=\lim\limits_{x\to4^-}\dfrac{-(x-1)\cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}}=-3$

και $\lim\limits_{x\to4^+}\dfrac{|x^2-5x+4|}{|x-2|-2}=\lim\limits_{x\to4^+}\dfrac{(x-1)\cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}}=3$, άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{|x^2-5x+4|}{|x-2|-2}$.

3.81. **α)** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{|x^2-4x+3|+x^2-2x-3}{\sqrt{x+1}-2}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\left(|x^2-4x+3|+x^2-2x-3\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$

$\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{|x^2-4x+3|+x^2-2x-3}{\sqrt{x+1}-2}=8$, $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{|x^2-4x+3|+x^2-2x-3}{\sqrt{x+1}-2}=24$,

δεν υπάρχει το όριο.

β) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{(x-2)^2}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{|x-2|\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{-2(x-2)}$,

$\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{|x-2|\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{-2(x-2)}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{-\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{-2\cancel{(x-2)}}=2$,

$\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{|x-2|\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{-2(x-2)}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{-2\cancel{(x-2)}}=-2$,

δεν υπάρχει το όριο.

γ) $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{\left|\sqrt{x^2+5}-\sqrt{11-x}\right|}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{\left|\sqrt{x^2+5}-\sqrt{11-x}\right|\left|\sqrt{x^2+5}+\sqrt{11-x}\right|}{(x-2)(x+2)\left|\sqrt{x^2+5}+\sqrt{11-x}\right|}=$

$=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{|x^2+x-6|}{(x-2)(x+2)\left|\sqrt{x^2+5}+\sqrt{11-x}\right|}=$

$=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{|x+3||x-2|}{(x-2)(x+2)\left|\sqrt{x^2+5}+\sqrt{11-x}\right|}=$

$=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{-\cancel{(x-2)}\,|x+3|}{\cancel{(x-2)}\,(x+2)\left|\sqrt{x^2+5}+\sqrt{11-x}\right|}=-\dfrac{5}{24}$

δ) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{|1-x|+x|x^2+2|-3}{|x^2-1|}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1-x+x^3+2x-3}{-(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+2)}{-\cancel{(x-1)}(x+1)}=-2$

και $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{|1-x|+x|x^2+2|-3}{|x^2-1|}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{-1+x+x^3+2x-3}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+4)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=3$

3.82. $\lim\limits_{x\to3}f(x)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}+(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{|x-3|+(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)}$,

$\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{-\cancel{(x-3)}+\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}(x-2)}=5$, $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{\cancel{(x-3)}+\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}(x-2)}=7$

3.83. $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\left(\sqrt{x^2-2\alpha x+2\alpha^2}-\alpha\right)\left(\sqrt{x^2-2\alpha x+2\alpha^2}+\alpha\right)}{(|x|-\alpha)\left(\sqrt{x^2-2\alpha x+2\alpha^2}+\alpha\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{(x-\alpha)^2}{(|x|-\alpha)\left(\sqrt{x^2-2\alpha x+2\alpha^2}+\alpha\right)}$

Αν $\alpha=0$, τότε $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{|x|}{|x|}=1$

Αν $\alpha>0$, τότε $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{(x-\alpha)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-\alpha)}\left(\sqrt{x^2-2\alpha x+2\alpha^2}+\alpha\right)}=0$

Αν $\alpha<0$, τότε $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{(x-\alpha)^2}{-(x+\alpha)\left(\sqrt{x^2-2\alpha x+2\alpha^2}+\alpha\right)}=0$

3.84. $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{-(\alpha-1)\cancel{(x-3)}+\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}=-\alpha+7$,

$\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{(\alpha-1)\cancel{(x-3)}+\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}=\alpha+5$

$-\alpha+7=\alpha+5\Leftrightarrow\alpha=1$

3.85. $\lim\limits_{x\to\frac{\alpha}{2}}g(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\alpha(2x-\alpha)(x+1)}{|2x-\alpha|}$, $\lim\limits_{x\to\frac{\alpha^-}{2}}g(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\alpha^-}{2}}\dfrac{\alpha\cancel{(2x-\alpha)}(x+1)}{-\cancel{(2x-\alpha)}}=-\dfrac{\alpha^2+2\alpha}{2}$,

$\lim\limits_{x\to\frac{\alpha^+}{2}}g(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\alpha^+}{2}}\dfrac{\alpha\cancel{(2x-\alpha)}(x+1)}{\cancel{(2x-\alpha)}}=\dfrac{\alpha^2+2\alpha}{2}$,

$\dfrac{\alpha^2+2\alpha}{2}=-\dfrac{\alpha^2+2\alpha}{2}\Leftrightarrow\alpha^2+2\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=0$ ή $\alpha=-2$

3.86. $\lim\limits_{x\to\lambda}\dfrac{\sqrt{(x-\lambda)^2+\lambda^2}-\lambda}{|x|-\lambda}=\lim\limits_{x\to\lambda}\dfrac{\left(\sqrt{(x-\lambda)^2+\lambda^2}-\lambda\right)\left(\sqrt{(x-\lambda)^2+\lambda^2}+\lambda\right)}{\left(|x|-\lambda\right)\left(\sqrt{(x-\lambda)^2+\lambda^2}+\lambda\right)}=$

$$=\lim_{x\to\lambda}\frac{(x-\lambda)^2+\cancel{\lambda^2}-\cancel{\lambda^2}}{\left(|x|-\lambda\right)\left(\sqrt{(x-\lambda)^2+\lambda^2}+\lambda\right)}=\lim_{x\to\lambda}\frac{(x-\lambda)^2}{\left(|x|-\lambda\right)\left(\sqrt{(x-\lambda)^2+\lambda^2}+\lambda\right)}.$$

- Αν $\lambda>0$, τότε όταν $x\to\lambda$ είναι $x>0$, οπότε το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to\lambda}\frac{(x-\lambda)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-\lambda)}\left(\sqrt{(x-\lambda)^2+\lambda^2}+\lambda\right)}=\lim_{x\to\lambda}\frac{(x-\lambda)}{\left(\sqrt{(x-\lambda)^2+\lambda^2}+\lambda\right)}=0$$

- Αν $\lambda<0$, τότε όταν $x\to\lambda$ είναι $x<0$, οπότε το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to\lambda}\frac{\sqrt{(x-\lambda)^2+\lambda^2}-\lambda}{|x|-\lambda}=\lim_{x\to\lambda}\frac{\sqrt{(x-\lambda)^2+\lambda^2}-\lambda}{-x-\lambda}=$$

$$=\lim_{x\to\lambda}\frac{\sqrt{(\lambda-\lambda)^2+\lambda^2}-\lambda}{-\lambda-\lambda}=\lim_{x\to\lambda}\frac{\sqrt{\lambda^2}-\lambda}{-\lambda-\lambda}=\lim_{x\to\lambda}\frac{-\lambda-\lambda}{-\lambda-\lambda}=1$$

- Αν $\lambda=0$, τότε το όριο γίνεται: $\lim\limits_{x\to\lambda}\dfrac{\sqrt{(x-\lambda)^2+\lambda^2}-\lambda}{|x|-\lambda}=\lim\limits_{x\to\lambda}\dfrac{\sqrt{x^2}}{|x|}=\lim\limits_{x\to\lambda}\dfrac{|x|}{|x|}=1.$

3.87. $3x^2+5x-7\le f(x)-4\le x^3+6x^2-4x-2\Leftrightarrow$

$3x^2+5x-7+4\le f(x)\le x^3+6x^2-4x-2+4\Leftrightarrow$

$3x^2+5x-3\le f(x)\le x^3+6x^2-4x+2$

Είναι: $\lim\limits_{x\to1}\left(3x^2+5x-3\right)=3+5-3=5$ και $\lim\limits_{x\to1}\left(x^3+6x^2-4x+2\right)=1+6-4+2=5$, οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to1}f(x)=5$.

3.88. Είναι $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\cancel{x-4}}{\cancel{(x-4)}\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{1}{4}$

και $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{4-x}{x^2-12x+32}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{-\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}(x-8)}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{-1}{x-8}=\dfrac{1}{4}.$

Οπότε από το κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to4}f(x)=\dfrac{1}{4}$.

3.89. Για $x>0$ είναι: $\dfrac{x^4-x^8}{x}\le\dfrac{g(x)}{x}\le\dfrac{x^4+x^8}{x}\Leftrightarrow x^3-x^7\le\dfrac{g(x)}{x}\le x^3+x^7$

Επειδή $\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^3+x^7\right)=0$, $\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^3-x^7\right)=0$, είναι και $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{g(x)}{x}=0 \quad (1)$.

Για $x<0$ είναι: $\dfrac{x^4-x^8}{x} \geq \dfrac{g(x)}{x} \geq \dfrac{x^4+x^8}{x} \Leftrightarrow x^3+x^7 \leq \dfrac{g(x)}{x} \leq x^3-x^7$

και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^3+x^7\right)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^3-x^7\right)=0$, άρα $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)}{x}=0 \ (2)$.

Από τις $(1),(2)$ διαπιστώνουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=0$.

3.90. Είναι: $(x-1)^2=|x-1|^2$, οπότε η ανισότητα γίνεται: $\left|(x-1)f(x)-(x^3-1)\right| \leq |x-1|^2$.

Για $x\neq 1$ είναι: $\dfrac{\left|(x-1)f(x)-(x^3-1)\right|}{|x-1|} \leq \dfrac{|x-1|^2}{|x-1|} \Leftrightarrow$

$$\left|\frac{(x-1)f(x)-(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x-1}\right| \leq |x-1| \Leftrightarrow \left|f(x)-\left(x^2+x+1\right)\right| \leq |x-1| \Leftrightarrow$$

$$-|x-1| \leq f(x)-\left(x^2+x+1\right) \leq |x-1| \Leftrightarrow \left(x^2+x+1\right)-|x-1| \leq f(x) \leq \left(x^2+x+1\right)+|x-1|$$

Οπότε: $\lim\limits_{x\to 1}\left[\left(x^2+x+1\right)-|x-1|\right]=3$ και $\lim\limits_{x\to 1}\left[\left(x^2+x+1\right)+|x-1|\right]=3$.

Άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=3$.

3.91. **α)** Είναι $\lim\limits_{x\to 2}2\sqrt{2x}=2\sqrt{4}=4$ και $\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$ οπότε από κριτήριο παρεμβολής είναι: $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=4$.

β) Είναι: $2\sqrt{2x}-4 \leq f(x)-4 \leq x-2$.

Για $x<2$ είναι $\dfrac{2\sqrt{2x}-4}{x-2} \geq \dfrac{f(x)-4}{x-2} \geq \dfrac{x-2}{x-2} \Leftrightarrow 1 \leq \dfrac{f(x)-4}{x-2} \leq \dfrac{2\left(\sqrt{2x}-2\right)}{x-2}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2\left(\sqrt{2x}-2\right)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2(2x-4)}{(x-2)\left(\sqrt{2x}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{4\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{2x}+2\right)}=\dfrac{4}{4}=1$

οπότε $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-4}{x-2}=1 \ (1)$.

Για $x>2$ είναι $\dfrac{2\sqrt{2x}-4}{x-2} \leq \dfrac{f(x)-4}{x-2} \leq 1$

και $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2\sqrt{2x}-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2(2x-4)}{(x-2)\left(\sqrt{2x}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{4}{\sqrt{2x}+2}=1$, οπότε $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-4}{x-2}=1 \ (2)$

Από $(1),(2)$ είναι $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-4}{x-2}=1$.

γ) Είναι: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{f(x)+5}-3}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)+5-9}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{f(x)+5}+3\right)}=$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{f(x)-4}{x-2}\cdot\frac{1}{(x+2)\left(\sqrt{f(x)+5}+3\right)}\right]=1\cdot\frac{1}{4\cdot(3+3)}=\frac{1}{24}$$

δ) Επειδή $\lim_{x\to 2} f(x)=4$ τότε $\lim_{x\to 2}(f(x)-3)=1>0$, οπότε σε περιοχή του 2 είναι $f(x)-3>0$.

Οπότε $\lim_{x\to 2}\dfrac{(f(x)-3)-1}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-4}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}\left[\dfrac{f(x)-4}{x-2}\cdot\dfrac{1}{x-3}\right]=1\cdot\dfrac{1}{-1}=-1.$

3.92. **α)** $\lim_{x\to 1}(x^2+4x)=5$, $\lim_{x\to 1}(3x^2+2)=5$, άρα και $\lim_{x\to 1}f(x)=5$

β) $x^2+4x-5\le f(x)-5\le 3x^2-3$. Για $x>1$ είναι $\dfrac{(x+5)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}\le\dfrac{f(x)-5}{x-1}\le 3\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}$

και από Κ.Π είναι $\lim_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-5}{x-1}=6$. Όμοια για $x<1$, είναι $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-5}{x-1}=6$

γ) Επειδή $\lim_{x\to 1}f(x)=5$, είναι $f(x)-1>0$, όταν $x\to 1$,

άρα $\lim_{x\to 1}\dfrac{|f(x)-1|-4}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to 1}\dfrac{(f(x)-5)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to 1}\left[\dfrac{f(x)-5}{x-1}(\sqrt{x+3}+2)\right]=24$

δ) $\lim_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{f(x)+4}-3)(\sqrt{f(x)+4}+3)(\sqrt{2f(x)-6}+2)}{(\sqrt{2f(x)-6}-2)(\sqrt{2f(x)-6}+2)(\sqrt{f(x)+4}+3)}=\lim_{x\to 1}\dfrac{\cancel{(f(x)-5)}(\sqrt{2f(x)-6}+2)}{2\cancel{(f(x)-5)}(\sqrt{f(x)+4}+3)}=\dfrac{1}{3}$

3.93. $4g(x)<0<3f(x)\Leftrightarrow 4g(x)-3f(x)<-3f(x)<0$, επειδή $\lim_{x\to x_0}[4g(x)-3f(x)]=0$,

είναι και $\lim_{x\to x_0}(-3f(x))=0\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)=0$.

Εστω $4g(x)-3f(x)=h(x)\Leftrightarrow g(x)=\dfrac{h(x)+3f(x)}{4}$. Τότε $\lim_{x\to x_0}g(x)=\lim_{x\to x_0}\dfrac{h(x)+3f(x)}{4}=0$

3.94. Είναι $-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|\Leftrightarrow-\sqrt{f^2(x)}\le f(x)\le\sqrt{f^2(x)}$.

Επειδή $\lim_{x\to x_0}f^2(x)=0$, είναι $\lim_{x\to x_0}\sqrt{f^2(x)}=0$ και $\lim_{x\to x_0}\left(-\sqrt{f^2(x)}\right)=0$, και λόγω του κριτηρίου παρεμβολής θα είναι και $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$.

3.95. $\lim_{x\to 2}[4f(x)-f^2(x)]=4\Leftrightarrow\lim_{x\to 2}[4f(x)-f^2(x)-4]=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\lim_{x\to 2}\left[-(f(x)-2)^2\right]=0\Leftrightarrow\lim_{x\to 2}(f(x)-2)^2=0$

$-\sqrt{(f(x)-2)^2}\le f(x)-2\le(f(x)-2)^2\Leftrightarrow-\sqrt{(f(x)-2)^2}+2\le f(x)\le(f(x)-2)^2+2$

και από Κ.Π είναι $\lim_{x\to 2}f(x)=2$

3.96. $f^2(x)-2f(x)+\sigma\upsilon\nu^2x\le 0\Leftrightarrow 0\le(f(x)-1)^2\le\eta\mu^2x$ και από Κ.Π είναι $\lim_{x\to 0}(f(x)-1)^2=0$

$-\sqrt{(f(x)-1)^2}\le f(x)-1\le(f(x)-1)^2\Leftrightarrow-\sqrt{(f(x)-1)^2}+1\le f(x)\le(f(x)-1)^2+1$

και από Κ.Π είναι $\lim_{x\to 0}f(x)=1$

3.97. $f^2(x)-4f(x)\le x^2-4 \Leftrightarrow \left(f(x)-2\right)^2\le x^2$.

Επειδή $0\le\left(f(x)-2\right)^2$ και $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$, είναι και $\lim\limits_{x\to0}\left(f(x)-2\right)^2=0$.

Είναι $-\sqrt{\left(f(x)-2\right)^2}\le f(x)-2\le\sqrt{\left(f(x)-2\right)^2}$

και από το Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to0}\left(f(x)-2\right)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to0}f(x)=2$

3.98. $0\le f^2(x)\le f^2(x)+g^2(x)$ και από Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to\chi_0}f^2(x)=0$

και από τα προηγούμενα $\lim\limits_{x\to\chi_0}f(x)=0$. Όμοια για τη g.

3.99. $\lim\limits_{x\to1}\left[f^2(x)+g^2(x)+6f(x)-8g(x)\right]=-25\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to1}\left[\left(f(x)+3\right)^2+\left(g(x)-4\right)^2\right]=0$

$0\le\left(f(x)+3\right)^2\le\left(f(x)+3\right)^2+\left(g(x)-4\right)^2$ και από Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to1}\left(f(x)+3\right)^2=0$... $\lim\limits_{x\to1}f(x)=-3$

Όμοια για τη g

3.100. Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\left(g^3(x)+\alpha g(x)\right)=\alpha+1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\left(g^3(x)+\alpha g(x)-\alpha-1\right)=0\ (1)$.

Όμως $g^3(x)+\alpha g(x)-\alpha-1=g^3(x)-1+\alpha\left(g(x)-1\right)=$

$$=\left(g(x)-1\right)\left(g^2(x)+g(x)+1\right)+\alpha\left(g(x)-1\right)=$$

$$=\left(g(x)-1\right)\left(g^2(x)+g(x)+1+\alpha\right).$$

Όμως $g^2(x)+g(x)+\alpha>0$, γιατί $\Delta=-1-4\alpha<0$, οπότε: $g(x)-1=\dfrac{g^3(x)+\alpha g(x)-\alpha-1}{g^2(x)+g(x)+1+\alpha}$.

Είναι $g^2(x)+g(x)+1+\alpha>1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Οπότε:

$$\left|g(x)-1\right|=\left|\frac{g^3(x)+\alpha g(x)-\alpha-1}{g^2(x)+g(x)+1+\alpha}\right|=\frac{\left|g^3(x)+\alpha g(x)-\alpha-1\right|}{g^2(x)+g(x)+1+\alpha}<\frac{\left|g^3(x)+\alpha g(x)-\alpha-1\right|}{1}\Leftrightarrow$$

$$-\left|g^3(x)+\alpha g(x)-\alpha-1\right|<g(x)-1<\left|g^3(x)+\alpha g(x)-\alpha-1\right|\Leftrightarrow$$

$$1-\left|g^3(x)+\alpha g(x)-\alpha-1\right|<g(x)<1+\left|g^3(x)+\alpha g(x)-\alpha-1\right|.$$

και $\lim\limits_{x\to x_0}\left(1-\left|\left(g^3(x)\right)+\alpha g(x)-\alpha-1\right|\right)=1$, $\lim\limits_{x\to x_0}\left(1+\left|\left(g^3(x)\right)+\alpha g(x)-\alpha-1\right|\right)=1$.

Οπότε από κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=1$.

3.101. $f^5(x)+f(x)+3=x\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x-3}{f^4(x)+1}$, $\left|f(x)\right|=\left|\dfrac{x-3}{f^4(x)+1}\right|=\dfrac{\left|x-3\right|}{\left|f^4(x)+1\right|}\le\left|x-3\right|$ γιατί

$f^4(x)+1\ge1\Leftrightarrow\dfrac{1}{f^4(x)+1}\le1$. Άρα $-\left|x-3\right|\le f(x)\le\left|x-3\right|$ και από Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to3}f(x)=0$

3.102. $f^2(x)\le f^2(x)+g^2(x)\le16f^2(x)+9g^2(x)=\left[4f(x)+3g(x)\right]^2-24f(x)g(x)=\varphi(x)$.

Οπότε $0\le f^2(x)\le\varphi(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\left[4f(x)+3g(x)\right]^2-24f(x)g(x)\right)=0-24\cdot0=0$.

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{x\to x_0} f^2(x)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

Εστω $h(x)=4f(x)+3g(x) \Leftrightarrow g(x)=\dfrac{h(x)-4f(x)}{3}$

και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)-4f(x)}{3}=\dfrac{0-4\cdot 0}{3}=0$.

3.103. **α)** Είναι: $\left(h(x)+g(x)\right)^2=h^2(x)+g^2(x)+2h(x)g(x) \Leftrightarrow$

$h(x)g(x)=\dfrac{1}{2}\left[\left(h(x)+g(x)\right)^2-\left(h^2(x)+g^2(x)\right)\right]$. Είναι $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)g(x)=0$.

β) $\left(h(x)-g(x)\right)^2=h^2(x)+g^2(x)-2h(x)g(x)$

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(h(x)-g(x)\right)^2=\lim\limits_{x\to x_0}\left(h^2(x)+g^2(x)\right)-2\lim\limits_{x\to x_0} h(x)g(x)=0$.

γ) $0\le h^2(x)\le h^2(x)+g^2(x)$, από κρ. παρεμβολής είναι: $\lim\limits_{x\to x_0} h^2(x)=0$, άρα και $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=0$.

δ) $0\le g^2(x)\le h^2(x)+g^2(x)$... $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$.

3.104. **α)** Εστω $3x=u \Leftrightarrow x=\dfrac{u}{3}$. Για $x\to 0$ είναι $u\to 0$,

οπότε: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημ3x}{x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{ημu}{\frac{u}{3}}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{3ημu}{u}=3\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{ημu}{u}=3\cdot 1=3$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{ημx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{2x}{x}}{\frac{ημx}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\frac{ημx}{x}}=\dfrac{2}{1}=2$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{εφx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{ημx}{συνx}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημx}{xσυνx}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{ημx}{x}\cdot\dfrac{1}{συνx}\right)=1$

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-ημx}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1-ημx}-1\right)\left(\sqrt{1-ημx}+1\right)}{x\left(\sqrt{1-ημx}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-ημx-1}{x\left(\sqrt{1-ημx}+1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{ημx}{x}\cdot\dfrac{-1}{\sqrt{1-ημx}+1}\right)=1\dfrac{-1}{1+1}=-\dfrac{1}{2}$

ε) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημ3x-ημx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{ημ3x}{x}-\dfrac{ημx}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημ3x}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημx}{x}=3-1=2$

στ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-συν2x}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(2\dfrac{1-συν2x}{2x}\dfrac{1}{x+1}\right)=0$

ζ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{συν2x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(συν2x-1)(συν2x+1)}{x^2(συν2x+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-ημ^2 2x}{x^2(συν2x+1)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[-4\left(\dfrac{ημ2x}{2x}\right)\dfrac{1}{συν2x+1}\right]=-2$

η) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\eta\mu x}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\dfrac{4}{x-2}\right)=-2$

θ) Είναι: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 2x}{\varepsilon\varphi 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 2x}{\dfrac{\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu 2x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 2x\cdot\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu 2x=\sigma\upsilon\nu 0=1.$

3.105. α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\eta\mu x}-\sqrt{1-\eta\mu x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+\eta\mu x}-\sqrt{1-\eta\mu x}\right)\left(\sqrt{1+\eta\mu x}+\sqrt{1-\eta\mu x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\eta\mu x}+\sqrt{1-\eta\mu x}\right)}=$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\left(2\frac{\eta\mu x}{x}\frac{1}{\sqrt{1+\eta\mu x}+\sqrt{1-\eta\mu x}}\right)=1$$

β) Είναι: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x\cdot\eta\mu 2x\cdot\eta\mu 3x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\dfrac{\eta\mu 2x}{x}\dfrac{\eta\mu 3x}{x}\right)=$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\cdot 2\frac{\eta\mu 2x}{2x}\cdot 3\frac{\eta\mu 3x}{3x}\right)=1\cdot 2\cdot 3=6.$$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 3x}{\eta\mu 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\dfrac{\eta\mu 3x}{3x}}{4\dfrac{\eta\mu 4x}{4x}}=\dfrac{3}{4}$

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu 5x}{x+\eta\mu 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sigma\upsilon\nu x+5\dfrac{\eta\mu 5x}{5x}}{1+2\dfrac{\eta\mu 2x}{2x}}=3$

ε) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\eta\mu x}{3x+\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\dfrac{\eta\mu x}{x}}{3+\dfrac{\eta\mu x}{x}}=\dfrac{1}{2}$

στ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 3x}{\sqrt{x+9}-3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 3x\left(\sqrt{x+9}+3\right)}{\left(\sqrt{x+9}-3\right)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(3\dfrac{\eta\mu 3x}{3x}\left(\sqrt{x+9}+3\right)\right)=18$

3.106. α) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\eta\mu(x-3)}{x^2-7x+12}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\eta\mu(x-3)}{(x-3)(x-4)}\overset{x-3=u}{\underset{u\to 0}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu u}{u}\dfrac{1}{u-1}\right)=-1$

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu(\eta\mu x)}{4x^2+3x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\dfrac{\eta\mu x}{4x^2+3x}\right)=$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{4x+3}\right)=1\cdot 1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+\eta\mu x}-\sqrt{2-\eta\mu x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{2+\eta\mu x}-\sqrt{2-\eta\mu x}\right)\left(\sqrt{2+\eta\mu x}+\sqrt{2-\eta\mu x}\right)}{x\left(\sqrt{2+\eta\mu x}+\sqrt{2-\eta\mu x}\right)}=$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\left(2\frac{\eta\mu x}{x}\frac{1}{\sqrt{2+\eta\mu x}+\sqrt{2-\eta\mu x}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

δ) $$\lim_{x\to0}\frac{x\varepsilon\varphi x+1-\sigma\upsilon\nu 2x}{x\eta\mu x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\varepsilon\varphi x}{x}+\frac{1-\sigma\upsilon\nu2x}{x^2}}{\frac{\eta\mu x}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\eta\mu x}{x}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}+4\frac{\eta\mu^2 2x}{4x^2}\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu2x}}{\frac{\eta\mu x}{x}}=3$$

3.107. $$\lim_{x\to0^-}\frac{\kappa\eta\mu x+\lambda|x|}{x^2+x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\kappa\eta\mu x-\lambda x}{x^2+x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\kappa\frac{\eta\mu x}{x}-\lambda}{x+1}=\kappa-\lambda,$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\kappa\eta\mu x+\lambda|x|}{x^2+x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\kappa\eta\mu x+\lambda x}{x^2+x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\kappa\frac{\eta\mu x}{x}+\lambda}{x+1}=\kappa+\lambda,$$

άρα $\kappa-\lambda=\kappa+\lambda=2-\kappa\Leftrightarrow\kappa=1,\ \lambda=0$

3.108. $f(x)=y\Leftrightarrow\ldots\ f^{-1}(x)=x^3+3x^2+3x+1,$

$$\lim_{x\to0}\frac{f^{-1}(x)-1}{\eta\mu x}=\lim_{x\to0}\frac{x^3+3x^2+3x+1-1}{\eta\mu x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+3x+3}{\frac{\eta\mu x}{x}}=3$$

3.109. $$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\eta\mu x-\sqrt{x^2-x^4}}{x^2-x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\cancel{x}\sqrt{1-x^2}}{\cancel{x}}}{x-1}=-2,$$

$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(x^2+\lambda\right)=\lambda$, άρα $\lambda=-2$

3.110. $$\lim_{x\to0}\frac{\frac{xf(4x)}{x^2}-\frac{f(-x)\eta\mu3x}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{\eta\mu^2x}{x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f(4x)}{x}-\frac{f(-x)}{x}\cdot\frac{\eta\mu3x}{x}}{4-\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2}=\lim_{x\to0}\frac{4\frac{f(x)}{4x}+\frac{f(-x)}{(-x)}\cdot3\frac{\eta\mu3x}{3x}}{4-\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2}.$$

Όμως $\lim_{x\to0}\frac{f(4x)}{4x}\overset{4x=u}{\underset{u\to0}{=}}\lim_{u\to0}\frac{f(u)}{u}=3$, $\lim_{x\to0}\frac{f(-x)}{-x}\overset{-x=\omega}{\underset{\omega\to0}{=}}\lim_{\omega\to0}\frac{f(\omega)}{\omega}=3$ και $\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu3x}{3x}=1.$

Άρα το ζητούμενο όριο γίνεται: $$\lim_{x\to0}\frac{4\frac{f(x)}{4x}+\frac{f(-x)}{-x}\cdot3\frac{\eta\mu3x}{3x}}{4-\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2}=\frac{4\cdot3+3\cdot3\cdot1}{4-1^2}=7.$$

3.111. $$\frac{f(x)}{x}=g(x)\overset{x\neq0}{\Leftrightarrow}f(x)=xg(x)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)\eta\mu x-f^2(x)(x+3)}{x^3+3x^3-\eta\mu^2x}=\lim_{x\to0}\frac{xg(x)\eta\mu x-x^2g^2(x)(x+3)}{x^3+3x^3-\eta\mu^2x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{g(x)\frac{\eta\mu x}{x}-g^2(x)(x+3)}{x+3x-\frac{\eta\mu^2x}{x^2}}=2$$

3.112. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x - x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x} - 1\right) = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 + x^6\right) = 0$, άρα και $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

3.113. Για $x \neq 0$ είναι $2\dfrac{\eta\mu 2x}{2x} + 1 \leq f(x) \leq x^2 + 3$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(2\dfrac{\eta\mu 2x}{2x} + 1\right) = 3$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 + 3\right) = 3$,

άρα και $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3$

3.114. $f^2(x) - x\eta\mu x + g^2(x) \leq 2\left[\eta\mu x f(x) + xg(x)\right] - x^2 - \eta\mu^2 x \Leftrightarrow$

$\left(f(x) - \eta\mu x\right)^2 + \left(g(x) - x\right)^2 \leq x\eta\mu x$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu x\right) = 0$, είναι και $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(f(x) - \eta\mu x\right)^2 + \left(g(x) - x\right)^2\right] = 0$.

$0 \leq \left(f(x) - \eta\mu x\right)^2 \leq \left(f(x) - \eta\mu x\right)^2 + \left(g(x) - x\right)^2$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(f(x) - \eta\mu x\right)^2 + \left(g(x) - x\right)^2\right] = 0$,

άρα και $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x) - \eta\mu x\right)^2 = 0$.

Είναι $-\sqrt{\left(f(x) - \eta\mu x\right)^2} \leq f(x) - \eta\mu x \leq \sqrt{\left(f(x) - \eta\mu x\right)^2}$ και από Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x) - \eta\mu x\right) = 0$.

Εστω $f(x) - \eta\mu x = h(x) \Leftrightarrow f(x) = h(x) + \eta\mu x$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(h(x) - \eta\mu x\right) = 0$.

Όμοια $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

3.115. $\eta\mu x - 4x^2 + 4xf(x) \leq f^2(x) \leq \sigma\upsilon\nu x - 4x^2 + 4xf(x) \Leftrightarrow$

$\eta\mu x \leq \left(f(x) - 2x\right)^2 \leq \sigma\upsilon\nu x - 1$ και από Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x) - 2x\right)^2 = 0$.

$-\sqrt{\left(f(x) - 2x\right)^2} \leq f(x) - 2x \leq \sqrt{\left(f(x) - 2x\right)^2} \Leftrightarrow -\sqrt{\left(f(x) - 2x\right)^2} + 2x \leq f(x) \leq \sqrt{\left(f(x) - 2x\right)^2} + 2x$

και από Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

3.116. $f^2(x) - 2f(x) + \sigma\upsilon\nu^2 x \leq 0 \Leftrightarrow f^2(x) - 2f(x) + 1 \leq 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow \left(f(x) - 1\right)^2 \leq \eta\mu^2 x$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\eta\mu^2 x = 0$ είναι και $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x) - 1\right)^2 = 0$.

$-\sqrt{\left(f(x) - 1\right)^2} \leq f(x) - 1 \leq \sqrt{\left(f(x) - 1\right)^2} \Leftrightarrow 1 - \sqrt{\left(f(x) - 1\right)^2} \leq f(x) \leq \sqrt{\left(f(x) - 1\right)^2} + 1.$

Από το Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x) - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

3.117. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{x = x_0 + h}{\underset{h\to 0}{=}} \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)\sigma\upsilon\nu 2h + f(h)\sigma\upsilon\nu 2x_0 - f(x_0)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)\left(\sigma\upsilon\nu 2h - 1\right) + f(h)\sigma\upsilon\nu 2x_0}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\left(2f(x_0)\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2h - 1}{2h} + \dfrac{f(h)}{h}\sigma\upsilon\nu 2x_0\right) =$

$= f(x_0)\cdot 0 + 2\cdot\sigma\upsilon\nu 2x_0 = 2\sigma\upsilon\nu 2x_0$

3.118. Είναι $3f(x)-\eta\mu f(x)=2x \Leftrightarrow 3f(x)-2x=\eta\mu f(x)$, άρα $|3f(x)-2x|=|\eta\mu f(x)|$,

όμως $|\eta\mu f(x)|\le|f(x)|$, οπότε $|3f(x)-2x|\le|f(x)|$ (1).

Επίσης, από την τριγωνική ανισότητα είναι $|3f(x)-2x|\ge 3|f(x)|-2|x|$ (2).

Οπότε από (1) και (2) είναι: $|3f(x)|-|2x|\le|3f(x)-2x|\le|f(x)|\Leftrightarrow$

$3|f(x)|-2|x|\le|f(x)|\Leftrightarrow 2|f(x)|\le 2|x|\Leftrightarrow|f(x)|\le|x|\Leftrightarrow -|x|\le f(x)\le|x|$ (3).

Είναι $\lim\limits_{x\to0}(-|x|)=0$ και $\lim\limits_{x\to0}|x|=0$, άρα και $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$.

Επίσης στην (3), για $x=0$ είναι $0\le f(0)\le 0\Leftrightarrow f(0)=0$.

Στην αρχική σχέση για $x\neq0$ και $f(x)\neq0$, έχουμε:

$$3-\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=2\frac{x}{f(x)}\Leftrightarrow\frac{x}{f(x)}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}},$$

άρα $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}}=\frac{1}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot1}=1.$

3.119. Θέτουμε $x-\rho=u$ οπότε $x=\rho+u$ και αφού $x\to\rho$ τότε $u\to0$. Άρα το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to\rho}\left(\eta\mu\frac{x-\rho}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{\pi x}{2\rho}\right)=\lim_{u\to0}\left(\eta\mu\frac{u}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{\pi(\rho+u)}{2\rho}\right)=\lim_{u\to0}\left(\eta\mu\frac{u}{2}\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\cdot u}{2\rho}\right)\right)=$$

$$=\lim_{u\to0}\left(-\eta\mu\frac{u}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi u}{2\rho}\right)=\lim_{u\to0}\left(-\frac{\rho}{\pi}\cdot\frac{\frac{\eta\mu\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi u}{2\rho}}{\frac{\eta\mu\frac{\pi u}{2\rho}}{\frac{\pi u}{2\rho}}}\right)=-\frac{\rho}{\pi}\cdot\frac{1\cdot\sigma\upsilon\nu0}{1}=-\frac{\rho}{\pi}$$

3.120. α) Εστω $f(x)=x\cdot\eta\mu\frac{5}{x}$, $A=\mathbb{R}^*$

$$|f(x)|=\left|x\cdot\eta\mu\frac{5}{x}\right|=|x|\cdot\left|\eta\mu\frac{5}{x}\right|\le|x|\cdot1=|x|\Leftrightarrow -|x|\le f(x)\le|x|$$

Είναι $\lim\limits_{x\to0}|x|=0$ και $\lim\limits_{x\to0}(-|x|)=0$,

οπότε λόγω κριτηρίου παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

β) $\left|(x^2-3x)\eta\mu\frac{2x+5}{x-3}\right|=|x^2-3x|\left|\eta\mu\frac{2x+5}{x-3}\right|\le|x^2-3x|\Leftrightarrow$

$-|x^2-3x|\le(x^2-3x)\eta\mu\frac{2x+5}{x-3}\le|x^2-3x|$.

Από το κ.π είναι $\lim\limits_{x\to3}\left[(x^2-3x)\,\eta\mu\frac{2x+5}{x-3}\right]=0$

γ) $\left|\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x}\cdot \sigma\upsilon\nu\frac{3}{x}\right| = \left|\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x}\right|\left|\sigma\upsilon\nu\frac{3}{x}\right| \le \left|\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x}\right| \Leftrightarrow$

$-\left|\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x}\right| \le \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{3}{x} \le \left|\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x}\right|.$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}{x\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)} = 0$,

οπότε από κ.π είναι και $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{3}{x}\right] = 0$

δ) $\left|\left(x^2-2x\right)\eta\mu\frac{4x+1}{x-2}\right| = \left|x^2-2x\right|\left|\eta\mu\frac{4x+1}{x-2}\right| \le \left|x^2-2x\right| \Leftrightarrow$

$-\left|x^2-2x\right| \le \left(x^2-2x\right)\eta\mu\frac{4x+1}{x-2} \le \left|x^2-2x\right|$. Από το κ.π είναι $\lim\limits_{x\to 2}\left[\left(x^2-2x\right)\eta\mu\frac{4x+1}{x-2}\right] = 0$

ε) $\left|\left(x^2-1\right)\eta\mu\frac{2x}{x-1}+\left(x^2-3x+2\right)\sigma\upsilon\nu\frac{3}{x^2-1}\right| \le \left|\left(x^2-1\right)\eta\mu\frac{2x}{x-1}\right| + \left|\left(x^2-3x+2\right)\sigma\upsilon\nu\frac{3}{x^2-1}\right| =$

$\left|x^2-1\right|\left|\eta\mu\frac{2x}{x-1}\right| + \left|x^2-3x+2\right|\left|\sigma\upsilon\nu\frac{3}{x^2-1}\right| \le \left|x^2-1\right| + \left|x^2-3x+2\right| \Leftrightarrow$

$-\left|x^2-1\right| - \left|x^2-3x+2\right| \le \left(x^2-1\right)\eta\mu\frac{2x}{x-1}+\left(x^2-3x+2\right)\sigma\upsilon\nu\frac{3}{x^2-1} \le \left|x^2-1\right| + \left|x^2-3x+2\right|$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1}\left(\left|x^2-1\right| + \left|x^2-3x+2\right|\right) = 0$,

από το κ.π είναι και $\lim\limits_{x\to 1}\left[\left(x^2-1\right)\eta\mu\frac{2x}{x-1}+\left(x^2-3x+2\right)\sigma\upsilon\nu\frac{3}{x^2-1}\right] = 0$

ζ) Εστω $f(x) = x\cdot\eta\mu\frac{x}{x^2+1} - 2x^2\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{3}{x}$, $A = \mathbb{R}^*$

$\left|f(x)\right| = \left|x\cdot\eta\mu\frac{x}{x^2+1} - 2x^2\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{3}{x}\right| \le \left|x\cdot\eta\mu\frac{x}{x^2+1}\right| + \left|2x^2\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{3}{x}\right| = |x|\cdot\left|\eta\mu\frac{x}{x^2+1}\right| + 2x^2\left|\sigma\upsilon\nu\frac{3}{x}\right|$,

δηλαδή: $\left|f(x)\right| \le |x|\cdot\left|\eta\mu\frac{x}{x^2+1}\right| + 2x^2\left|\sigma\upsilon\nu\frac{3}{x}\right| \le |x|\cdot 1 + 2x^2\cdot 1 =$

$|x| + 2x^2 \Leftrightarrow -|x| - 2x^2 \le f(x) \le |x| + 2x^2$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(|x|+2x^2\right) = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(-|x|-2x^2\right) = 0$, οπότε λόγω κριτηρίου παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

3.121. α) $\left|x\eta\mu\frac{x+2}{x} + x^{1821}\right| \le |x|\left|\eta\mu\frac{x+2}{x}\right| + \left|x^{1821}\right| \le |x| + \left|x^{1821}\right| \Leftrightarrow$

$-|x| - \left|x^{1821}\right| \le x\eta\mu\frac{x+2}{x} + x^{1821} \le |x| + \left|x^{1821}\right|$.

Από το κ.π είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{x+2}{x} + x^{1821}\right) = 0$

β) $\left|(x+1)\eta\mu\frac{2}{x^2-1}+x^{200}-1\right|\le\left|(x+1)\eta\mu\frac{2}{x^2-1}\right|+\left|x^{200}-1\right|\le$

$|x+1|\left|\eta\mu\frac{2}{x^2-1}\right|+\left|x^{200}-1\right|\le|x+1|+\left|x^{200}-1\right|\Leftrightarrow$

$-|x+1|-\left|x^{200}-1\right|\le(x+1)\eta\mu\frac{2}{x^2-1}+x^{200}-1\le|x+1|+\left|x^{200}-1\right|$

Από το κ.π είναι $\lim\limits_{x\to-1}\left[(x+1)\eta\mu\frac{2}{x^2-1}+x^{200}-1\right]=0$

3.122. Με Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

$$\left|\frac{xf(x)\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x}}{\eta\mu4x}\right|\le\left|\frac{f(x)}{4\frac{\eta\mu4x}{4x}}\right|\Leftrightarrow-\left|\frac{f(x)}{4\frac{\eta\mu4x}{4x}}\right|\le\frac{xf(x)\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x}}{\eta\mu4x}\le\left|\frac{f(x)}{4\frac{\eta\mu4x}{4x}}\right|$$

και με Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to0}\frac{xf(x)\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x}}{\eta\mu4x}=0$

3.123. α) Για $x\neq0$ είναι:

$$|g(x)|=\left|\eta\mu^2x\eta\mu\frac{2}{x}\right|=\left|\eta\mu^2x\right|\left|\eta\mu\frac{2}{x}\right|\le\eta\mu^2x\Leftrightarrow-\eta\mu^2x\le\eta\mu^2x\eta\mu\frac{2}{x}\le\eta\mu^2x$$

Από το Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$

β) Για $x\neq0$ είναι: $\left|\frac{g(x)}{x}\right|=\left|\eta\mu x\frac{\eta\mu x}{x}\eta\mu\frac{2}{x}\right|=\left|\eta\mu x\frac{\eta\mu x}{x}\right|\left|\eta\mu\frac{2}{x}\right|\le\left|\eta\mu x\frac{\eta\mu x}{x}\right|\Leftrightarrow$

$-\left|\eta\mu x\frac{\eta\mu x}{x}\right|\le\frac{g(x)}{x}\le\left|\eta\mu x\frac{\eta\mu x}{x}\right|$. Από το Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)}{x}=0$

γ) Για $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι:

$$\left|\frac{g(x)}{\eta\mu3x}\right|=\left|\frac{\eta\mu^2x}{\eta\mu3x}\eta\mu\frac{2}{x}\right|=\left|\frac{\eta\mu^2x}{\eta\mu3x}\right|\left|\eta\mu\frac{2}{x}\right|\le\left|\frac{\eta\mu^2x}{\eta\mu3x}\right|\Leftrightarrow-\left|\frac{\eta\mu^2x}{\eta\mu3x}\right|\le\frac{g(x)}{\eta\mu3x}\le\left|\frac{\eta\mu^2x}{\eta\mu3x}\right|$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu^2x}{\eta\mu3x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\eta\mu x\frac{\frac{\eta\mu x}{x}}{3\frac{\eta\mu3x}{3x}}\right)=0$, είναι και $\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)}{\eta\mu3x}=0$.

3.124. Εστω $f(x)+4x-3=g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)+3-4x$

και $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\left(g(x)+3-4x\right)=0$

3.125. Εστω $\frac{f(x)-5x}{x^2-5x+6}=g(x)\overset{x\neq2}{\underset{x\neq3}{\Leftrightarrow}}f(x)=g(x)\left(x^2-5x+6\right)+5x$

και $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\left(g(x)\left(x^2-5x+6\right)+5x\right)=10$

3.126. Εστω $\dfrac{xf(x)-x^2}{x+\eta\mu 2x}=g(x)\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} f(x)=\dfrac{g(x)(x+\eta\mu 2x)+x^2}{x}=g(x)\left(1+2\dfrac{\eta\mu 2x}{2x}\right)+x$.

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left[g(x)\left(1+2\frac{\eta\mu 2x}{2x}\right)+x\right]=6$$

3.127. Εστω $\dfrac{f(x)-x}{x-1}=g(x)\overset{x\neq 1}{\Leftrightarrow} f(x)=(x-1)g(x)+x$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)\big((x-1)g(x)+x\big)-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)g(x)+x^2+x-2}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)\cancel{(x-1)}g(x)+(x+2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=9$$

3.128. Εστω $\dfrac{f(x)-x^2}{x^2-5x+6}=g(x)\underset{x\neq 3}{\overset{x\neq 2}{\Leftrightarrow}} f(x)=g(x)(x-2)(x-3)+x^2$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-2x}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)(x-2)(x-3)+x^2-2x}{x-2}=\lim_{x\to 2}\big[g(x)(x-3)+x\big]=-3$$

3.129. Εστω $\dfrac{f(x)-2x}{x-2}=g(x)\overset{x\neq 2}{\Leftrightarrow} f(x)=g(x)(x-2)+2x$, $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\big[g(x)(x-2)+2x\big]=4$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{f^2(x)-2f(x)-8}{\sqrt{f(x)+12}-2x}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(f(x)-4)(f(x)+2)\left(\sqrt{f(x)+12}+2x\right)}{\left(\sqrt{f(x)+12}-2x\right)\left(\sqrt{f(x)+12}+2x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(f(x)-4)(f(x)+2)\left(\sqrt{f(x)+12}+2x\right)}{\left(\sqrt{f(x)+12}-2x\right)\left(\sqrt{f(x)+12}+2x\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(f(x)-4)(f(x)+2)\left(\sqrt{f(x)+12}+2x\right)}{f(x)+12-4x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\big(g(x)(x-2)+2x-4\big)\big(g(x)(x-2)+2x+2\big)\left(\sqrt{g(x)(x-2)+2x+12}+2x\right)}{g(x)(x-2)+2x+12-4x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}\,(g(x)+2)\big(g(x)(x-2)+2x+2\big)\left(\sqrt{g(x)(x-2)+2x+12}+2x\right)}{\cancel{(x-2)}\,\big(g(x)-2(2x+3)\big)}=-\frac{144}{13}$$

3.130. **α)** Εστω $g(x)=\dfrac{f(x)+\eta\mu\dfrac{\pi(x-4)}{2}-4}{\sqrt{x}-2}$ με $\lim\limits_{x\to 4}g(x)=\pi$ τότε:

$$g(x)\left(\sqrt{x}-2\right)=f(x)+\eta\mu\frac{\pi(x-4)}{2}-4\Leftrightarrow f(x)=g(x)\left(\sqrt{x}-2\right)-\eta\mu\frac{\pi(x-4)}{2}+4\quad(1)$$

και $\lim\limits_{x\to 4}f(x)=\lim\limits_{x\to 4}\left[g(x)\left(\sqrt{x}-2\right)-\eta\mu\dfrac{\pi(x-4)}{2}+4\right]=\pi\cdot 0-0+4=4$.

β) Το $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{f(x)-4}{x-4}$ είναι της μορφής $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, με βάση την (1) γίνεται:

$$\lim_{x\to4}\frac{f(x)-4}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{g(x)\left(\sqrt{x}-2\right)-\eta\mu\frac{\pi(x-4)}{2}+4-4}{x-4}=\lim_{x\to4}\left[g(x)\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}-\frac{\eta\mu\frac{\pi(x-4)}{2}}{x-4}\right]=$$

$$=\lim_{x\to4}\left[g(x)\frac{\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}\left(\sqrt{x}+2\right)}-\frac{\pi}{2}\frac{\eta\mu\frac{\pi(x-4)}{2}}{\frac{\pi(x-4)}{2}}\right]=\pi\cdot\frac{1}{4}-\frac{\pi}{2}\cdot1=-\frac{\pi}{4}.$$

3.131. Εστω $g(x)=\dfrac{x\sqrt{f(x)}+x}{\eta\mu x}$, $\eta\mu x\neq0$ με $\lim\limits_{x\to0}g(x)=1$.

Τότε: $x\sqrt{f(x)}=g(x)\cdot\eta\mu x-x\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}=g(x)\dfrac{\eta\mu x}{x}-1$.

Είναι: $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{f(x)}=\lim\limits_{x\to0}\left(g(x)\dfrac{\eta\mu x}{x}-1\right)=1\cdot1-1=0$.

Επομένως: $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left[\sqrt{f(x)}\right]^2=\left[\lim\limits_{x\to0}\sqrt{f(x)}\right]^2=0$.

3.132. Εστω $\dfrac{f(x)}{x^2-3x+2}=h(x)$, $x\neq1$ και $x\neq2$ και $\lim\limits_{x\to2}h(x)=3$, τότε $f(x)=h(x)\left(x^2-3x+2\right)$.

Εστω $g(x)\left(x^2-4\right)=\varphi(x)$, $\lim\limits_{x\to2}\varphi(x)=1$. Τότε για $x\neq\pm2$ είναι: $g(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x^2-4}$, οπότε:

$$\lim_{x\to2}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to2}\left[h(x)\cdot\left(x^2-3x+2\right)\cdot\frac{\varphi(x)}{x^2-4}\right]=\lim_{x\to2}\frac{h(x)(x-1)\cancel{(x-2)}\varphi(x)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\frac{3}{4}$$

3.133. Θέτουμε $h(x)=3f(x)-g(x)$ και $\varphi(x)=f(x)+2g(x)$,

οπότε προκύπτει: $f(x)=\dfrac{\varphi(x)+2h(x)}{7}$ και $g(x)=\dfrac{3\varphi(x)-h(x)}{7}$,

οπότε: $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\varphi(x)+2h(x)}{7}=\dfrac{2+26}{7}=4$, $\lim\limits_{x\to2}g(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3\varphi(x)-h(x)}{7}=\dfrac{6-13}{7}=-1$.

3.134. Εστω $3xg(x)-xf(x)=h(x)$ (1) και $x^2g(x)+f(x)=t(x)$ (2).

Το σύστημα των $(1),(2)$ έχει: $D=x\left(x^2+3\right)$, $D_g=h(x)+xt(x)$, $D_f=3xt(x)-x^2h(x)$.

Για $x\neq0$, είναι $g(x)=\dfrac{D_g}{D}=\dfrac{h(x)+xt(x)}{x\left(x^2+3\right)}$ και $f(x)=\dfrac{D_f}{D}=\dfrac{3xt(x)-x^2h(x)}{x\left(x^2+3\right)}$.

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{3xt(x)-x^2h(x)}{x\left(x^2+3\right)}=2 \text{ και } \lim_{x\to1}g(x)=\lim_{x\to1}\frac{h(x)+xt(x)}{x\left(x^2+3\right)}=1$$

3.135. Εστω $\dfrac{f(x)-2}{x-1}=h(x)\overset{x\neq 1}{\Leftrightarrow} f(x)=h(x)(x-1)+2$, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left[h(x)(x-1)+2\right]=2$,

$\dfrac{g(x)-3}{x-1}=t(x)\overset{x\neq 2}{\Leftrightarrow} g(x)=t(x)(x-1)+3$ και $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left[t(x)(x-1)+3\right]=3$

$$\lim_{x\to 1}\varphi(x)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2x}{g(x)-3x}=\lim_{x\to 1}\frac{h(x)(x-1)+2-2x}{t(x)(x-1)+3-3x}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\,(h(x)-2)}{\cancel{(x-1)}\,(t(x)-3)}=1$$

3.136. $f(x)+x^3-\eta\mu\dfrac{\pi x}{2}+1=g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)-x^3+\eta\mu\dfrac{\pi x}{2}-1.$

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(g(x)-x^3+\eta\mu\dfrac{\pi x}{2}-1\right)=1.$ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}f(2-x)\underset{u\to 2}{\overset{2-x=u}{=}}\lim\limits_{u\to 2}f(u)=1$

3.137. $\dfrac{f(x)+\eta\mu(x-1)-1}{x-1}=g(x)\overset{x\neq 1}{\Leftrightarrow} f(x)=g(x)(x-1)-\eta\mu(x-1)+1$

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(g(x)(x-1)-\eta\mu(x-1)+1\right)=1.$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(3-x)-1}{x-2}\underset{u\to 1}{\overset{3-x=u}{=}}\lim_{u\to 1}\frac{f(u)-1}{-(u-1)}=\lim_{u\to 1}\frac{g(u)(u-1)-\eta\mu(u-1)+1-1}{-(u-1)}=$$

$$=\lim_{u\to 1}\left(-g(u)+\frac{\eta\mu(u-1)}{u-1}\right)=-1$$

3.138. Εστω $g(x)=f(x)+4x-2$ με $\lim\limits_{x\to -2}g(x)=2$.

Τότε: $f(x)=g(x)-4x+2$ και $\lim\limits_{x\to -2}f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\left(g(x)-4x+2\right)=-12$.

Όπου x το $x-2$ έχουμε $f(x-2)+f(x)=2(x-2)+2=2x-2\Leftrightarrow f(x)=2x-2-f(x-2)$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2x-2-f(x-2)\right)\underset{u\to -2}{\overset{x-2=u}{=}}\lim\limits_{u\to -2}\left(2(u+2)-2-f(u)\right)=-14$

3.139. Εστω $g(x)=f(x)-x^2+x$ με $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=2$

οπότε $f(x)=g(x)+x^2-x$ και $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left[g(x)+x^2-x\right]=4$.

Επειδή $f(x)=f(2-x)$ τότε $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}f(2-x)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 2}f(2-x)=4$.

Θέτουμε $2-x=u$ οπότε όταν $x\to 2$ τότε $u\to 0$ και γίνεται $\lim\limits_{u\to 0}f(u)=4$. Άρα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=4$.

3.140. Επειδή η f είναι άρτια, ισχύει ότι: $f(x-1)=f(1-x)$

$\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x-1)+f(1-x)\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[2f(1-x)\right]\underset{u\to 1}{\overset{1-x=u}{=}}\lim\limits_{u\to 1}\left(2f(u)\right)=6$

3.141. Εστω $\dfrac{f(x)+2x}{x+1}=g(x)\overset{x\neq -1}{\Leftrightarrow} f(x)=g(x)(x+1)-2x$ και $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\left[g(x)(x+1)-2x\right]=2$

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}f(x-3)\underset{u\to -1}{\overset{x-3=u}{=}}\lim\limits_{u\to -1}f(u)=2$

3.142. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x^2+3x)}{2x^2-3x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(2x^2+3x)}{2x^2+3x}\dfrac{2x^2+3x}{2x^2-3x}\right]=$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(2x^2+3x)}{2x^2+3x}\frac{\cancel{x}(2x+3)}{\cancel{x}(2x-3)}\right]=-2$$

3.143. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(27x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(27x)}{f(9x)}\dfrac{f(9x)}{f(3x)}\dfrac{f(3x)}{f(x)}\right]=64$

3.144. $\eta\mu^2 x-3x^2+f^2(x)=xf(x)\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2-3+\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^2=\dfrac{f(x)}{x}$.

Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=k\in\mathbb{R}$,

τότε $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2-3+\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^2\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\Leftrightarrow 1-3+k^2=k\Leftrightarrow k^2-k-2=0\Leftrightarrow$

$k=2$ ή $k=-1$ που απορρίπτεται αφού για $x>0$ είναι $f(x)>0$.

3.145. Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με $Q(x)$ για $x\neq 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[\kappa]{Q(x)+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt[\kappa]{Q(x)+1}-1}{Q(x)}\cdot\frac{Q(x)}{x}\right].$$

Για το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[\kappa]{Q(x)+1}-1}{Q(x)}$ θέτουμε $Q(x)+1=y^\kappa$

οπότε $Q(x)=y^\kappa-1$ και επειδή $x\to 0$ τότε $y\to 1$,

άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[\kappa]{Q(x)+1}-1}{Q(x)}=\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{\sqrt[\kappa]{y^\kappa}-1}{y^\kappa-1}=\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{y-1}{(y-1)(y^{\kappa-1}+y^{\kappa-2}+\ldots+1)}=\dfrac{1}{\kappa}$,

και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Q(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(\alpha_\nu x^{\nu-1}+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-2}+\ldots+\alpha_1)=\alpha_1$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[\kappa]{\alpha(x)+1}-1}{x}=\dfrac{1}{\kappa}\cdot\alpha_1=\dfrac{\alpha_1}{\kappa}$.

3.146. **α)** Για $x=0$ είναι $f(0)=0^4+(f(1)-1)\cdot 0+2f(2)=2f(2)$

Για $x=1$ είναι $f(1)=1^4+(f(1)-1)\cdot 1+2f(2)\Leftrightarrow f(1)=1+f(1)-1+2f(2)\Leftrightarrow f(2)=0$

Τότε $f(0)=2\cdot 0=0$. Άρα $f(0)=f(2)=0$ και $f(x)=x^4+(f(1)-1)x$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Για $x=2$ είναι $f(2)=2^4+(f(1)-1)\cdot 2\Leftrightarrow 0=16+2f(1)-2\Leftrightarrow f(1)=-7$

και $f(x)=x^4+(-7-1)x=x^4-8x$, $x\in\mathbb{R}$.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{f(x)+4}-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{f(x)+4}-2\right)\left(\sqrt{f(x)+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{f(x)+4}+2\right)}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{f(x)+4}\right)^2-2^2}{x\left(\sqrt{f(x)+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+4-4}{x\left(\sqrt{f(x)+4}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{x}\frac{1}{\sqrt{f(x)+4}+2}\right].$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^4-8x\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(x^3-8\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3-8\right)=-8$,

είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{f(x)+4}-2}{x}=-8\cdot\dfrac{1}{\sqrt{0+4}+2}=-8\cdot\dfrac{1}{4}=-2$.

3.147. **α)** $x-1=u$, τότε $f(x)=4x^3+3x$, $f(\eta\mu x)=4\eta\mu^3x+3\eta\mu x$

και $g(x)=4f^3(\eta\mu x)+3f(\eta\mu x)$

β) Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$....... $f(x_1)<f(x_2)$.

γ) $\lim\limits_{x\to 0}f(\eta\mu x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(4\eta\mu^2x\dfrac{\eta\mu x}{x}+3\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=3$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=3$

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f^{-1}(f(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(f(\eta\mu x))}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(f(\eta\mu x))}{f(\eta\mu x)}\frac{f(\eta\mu x)}{x}=9$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(f(\eta\mu x))}{f(\eta\mu x)}\overset{f(\eta\mu x)=u}{=}\lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}=3$$

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(g(x))}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(g(x))}{g(x)}\dfrac{g(x)}{x}=81$, γιατί

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\left(f(f(x))\right)=\lim_{x\to 0}\left(4f^3(\eta\mu x)+3f(\eta\mu x)\right)=0,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(g(x))}{g(x)}=\lim_{y\to 0}\frac{g(y)}{y}=9$$

3.148. **α)** Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε $e^{f(x_1)}+f(x_1)<e^{f(x_2)}+f(x_2)$ (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x+x$, $x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $e^{x_1}<e^{x_2}$ άρα και $e^{x_1}+x_1<e^{x_2}+x_2\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$,

άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Η (1) γίνεται:

$g(f(x_1))<g(f(x_2))\overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow}f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1–1 και αντιστρέφεται.

Εστω $f(x)=y$, τότε $e^{f(x)}+f(x)=x\Leftrightarrow e^y+y=f^{-1}(y)$, άρα $f^{-1}(x)=e^x+x$, $x\in\mathbb{R}$.

γ) Επειδή οι $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς τη $y=x$, για να βρίσκεται η C_f κάτω από τη $C_{f^{-1}}$ πρέπει να βρίσκεται κάτω από την $y=x$ και η $C_{f^{-1}}$ πάνω από την $y=x$, δηλαδή:
$f^{-1}(x)>x \Leftrightarrow e^x+\cancel{x}>\cancel{x} \Leftrightarrow e^x>0$ που ισχύει.

δ) Εστω $f(x)=y$, τότε $x=f^{-1}(y)$. Επειδή $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$ είναι $y\to 0$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f^2(x)-1}{x-1-e^{f(x)}}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2-1}{f^{-1}(y)-1-e^y}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2-1}{e^y+y-1-e^y}=\lim_{y\to 0}\frac{\cancel{(y-1)}(y+1)}{\cancel{y-1}}=1$$

3.149. **α)** Εστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τέτοια, ώστε $f(x_1)\geq f(x_2)$, τότε $f^3(x_1)\geq f^3(x_2)$ και $f^3(x_1)+f(x_1)\geq f^3(x_2)+f(x_2)\Leftrightarrow x_1+2\geq x_2+2\Leftrightarrow x_1\geq x_2$ άτοπο.

β) Εστω $f(x)=y$, τότε .... $f^{-1}(x)=x^3+x-2$

γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^{-1}(x)}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+2)}{\cancel{(x-1)}(x+2)}=\dfrac{4}{3}$

δ) $f^3(x)+f(x)=x+2\Leftrightarrow f(x)\left(f^2(x)+2\right)=x+2\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x+2}{f^2(x)+2}$

$$|f(x)|=\left|\frac{x+2}{f^2(x)+2}\right|=\frac{|x+2|}{f^2(x)+2}\leq\frac{|x+2|}{2}\Leftrightarrow -\frac{|x+2|}{2}\leq f(x)\leq\frac{|x+2|}{2}$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{|x+2|}{2}=0=\lim\limits_{x\to -2}\left(-\dfrac{|x+2|}{2}\right)$, από το Κ.Π. είναι και $\lim\limits_{x\to -2}f(x)=0$

3.150. Είναι: $(g\circ g)(x)=\alpha g^2(x)+\beta g(x)=g(x)\left(\alpha g(x)+\beta\right)$

$$(g\circ g\circ g)(x)=(g\circ g)(g(x))=g(g(x))\left(\alpha g(g(x))+\beta\right)=$$
$$=g(x)\left(\alpha g(x)+\beta\right)\left[\alpha g(x)\left(\alpha g(x)+\beta\right)+\beta\right]$$

$$(g\circ g\circ g)(\eta\mu x)=g(\eta\mu x)\left(\alpha g(\eta\mu x)+\beta\right)\left[\alpha g(\eta\mu x)\left(\alpha g(\eta\mu x)+\beta\right)+\beta\right]$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(\eta\mu x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\eta\mu^2 x+\beta\eta\mu x}{x}=\left(\alpha\frac{\eta\mu x}{x}\eta\mu x+\beta\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\beta,$$

άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(\eta\mu x)\left(\alpha g(\eta\mu x)+\beta\right)\left[\alpha g(\eta\mu x)\left(\alpha g(\eta\mu x)+\beta\right)+\beta\right]}{x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{g(\eta\mu x)}{x}\left(\alpha g(\eta\mu x)+\beta\right)\left[\alpha g(\eta\mu x)\left(\alpha g(\eta\mu x)+\beta\right)+\beta\right]\right]=$$

$$=\beta\cdot(\alpha\cdot 0+\beta)\cdot\left[\alpha\cdot 0(\alpha\cdot 0+\beta)+\beta\right]=\beta\cdot\beta\cdot\beta=\beta^3,$$

γιατί $\lim\limits_{x\to 0}g(\eta\mu x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\alpha\eta\mu^2 x+\beta\eta\mu x\right)=0$.

3.151. **α)** Εστω $g(x)=\dfrac{f(x)-2f(-x)}{x}\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}f(x)-2f(-x)=xg(x)$ (1)

Για $x=-u$ έχουμε: $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(-u)-2f(u)}{-u}=3\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(x)-f(-x)}{x}=3$

$$h(x)=\frac{2f(x)-f(-x)}{x}\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}2f(x)-f(-x)=xh(x)\ \ (2)$$

Από το σύστημα των $(1),(2)$ προκύπτει: $f(x)=\frac{2xh(x)-xg(x)}{3}$ και $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

β) i. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2h(x)-g(x)}{3}=1$

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(f(x))}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(f(x))}{f(x)}\frac{f(x)}{x}=1$, γιατί $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(f(x))}{f(x)}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}=1$

iii. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\frac{\eta\mu x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}=1$

3.152. α) Εστω $x-1=u\Leftrightarrow x=u+1$. Τότε $f(u)=-4(u+1)^3+12(u+1)^2-9(u+1)+1=-4u^3+3u$,

άρα $f(x)=-4x^3+3x$, $x\in\mathbb{R}$.

$$g(x)=f(f(\eta\mu x))=-4\left(-4\eta\mu^3x+3\eta\mu x\right)^3+3\left(-4\eta\mu^3x+3\eta\mu x\right).$$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(f(\eta\mu x))}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(f(\eta\mu x))}{f(\eta\mu x)}\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\frac{\eta\mu x}{x}=3\cdot 3=9$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\overset{\eta\mu x=u}{\underset{u\to 0}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{\cancel{u}\left(-4u^2+3\right)}{\cancel{u}}=3$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(f(\eta\mu x))}{f(\eta\mu x)}\overset{f(\eta\mu x)=u}{\underset{u\to 0}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}=3$

3.153. α) $\eta\mu^2x-2x(f(x)+x)\le f^2(x)\le 2\left(\eta\mu^2x-xf(x)\right)\Leftrightarrow$

$\eta\mu^2x-2x^2\le f^2(x)+2xf(x)\le 2\eta\mu^2x\Leftrightarrow \eta\mu^2x-2x^2\le f^2(x)+2xf(x)\le 2\eta\mu^2x\Leftrightarrow$

$\eta\mu^2x-x^2\le f^2(x)+2xf(x)+x^2\le 2\eta\mu^2x+x^2\Leftrightarrow \eta\mu^2x-x^2\le (f(x)+x)^2\le 2\eta\mu^2x+x^2$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu^2x-x^2\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2\eta\mu^2x+x^2\right)=0$, άρα και $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+x)^2=0$

β) Είναι $-\sqrt{(f(x)+x)^2}\le f(x)+x\le\sqrt{(f(x)+x)^2}\Leftrightarrow$

$-\sqrt{(f(x)+x)^2}+x\le f(x)\le\sqrt{(f(x)+x)^2}+x$ και από Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

γ) $\lim\limits_{x\to -k}f(x+k)\overset{x+k=u}{\underset{u\to 0}{=}}\lim\limits_{u\to 0}f(u)=0$

3.154. α) $f(x)=x^3-3x^2+3x-2=(x-1)^3-1$.

Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε

$x_1-1<x_2-1\Leftrightarrow (x_1-1)^3<(x_2-1)^3\Leftrightarrow (x_1-1)^3-1<(x_2-1)^3-1\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$,

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε είναι και 1–1

$f(x)=y\Leftrightarrow (x-1)^3-1=y\Leftrightarrow (x-1)^3=y+1$.

Αν $y\ge -1$, τότε $x-1=\sqrt[3]{y+1}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{y+1}+1$ και αν $y<-1$ τότε

$x-1=-\sqrt[3]{-y-1}\Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{-y-1}+1$, άρα $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x+1}+1 & ,x\ge -1\\ -\sqrt[3]{-x-1}+1 & ,x<-1\end{cases}$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)+2}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^3 x-3\eta\mu^2 x+3\eta\mu x}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2 x\dfrac{\eta\mu x}{x}-3\eta\mu x\dfrac{\eta\mu x}{x}+3\dfrac{\eta\mu x}{x}}{\dfrac{\eta\mu x}{x}}=3$

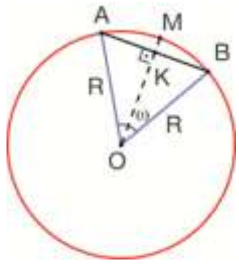
γ) Είναι $f(x)=(x-1)^3-1=y\Leftrightarrow (x-1)^3=y+1$.

Αν $x\geq 1$ τότε $y+1\geq 0\Leftrightarrow y\geq -1$ και $x-1=\sqrt[3]{y+1}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{y+1}+1$,

δηλαδή $f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y+1}+1,\ y\geq -1$ άρα $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+1}+1,\ x\geq -1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{-1}(x)+f(0)}{f^{-1}(f(x))}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}+1-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{x}\cancel{+1}\cancel{-1}}{\cancel{x}\left[\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x+1}+1\right]}=\dfrac{1}{3}$

3.155. α) Είναι $OA=OB=R$. Στο τρίγωνο ΟΑΚ είναι



$\eta\mu\dfrac{\omega}{2}=\dfrac{AK}{R}\Leftrightarrow AK=R\eta\mu\dfrac{\omega}{2}$, οπότε $AB=2AK=2R\eta\mu\dfrac{\omega}{2}$.

Επίσης, $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\omega}{2}=\dfrac{OK}{R}\Leftrightarrow OK=R\sigma\upsilon\nu\dfrac{\omega}{2}$.

Επειδή ισχύει $\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi R}{S}\Leftrightarrow S=\omega R$.

Εχουμε $\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{S}{AB}=\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{\omega R}{2R\eta\mu\dfrac{\omega}{2}}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{\omega}{\dfrac{\omega}{2}\cdot\dfrac{\eta\mu\dfrac{\omega}{2}}{\dfrac{\omega}{2}}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}\cdot 1}=1.$

β) $\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{S}{AB}=\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{\omega R}{R}=0$

$\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{AB}{\omega}=\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{2R\eta\mu\dfrac{\omega}{2}}{\omega}=\lim\limits_{\omega\to 0}R\dfrac{\eta\mu\dfrac{\omega}{2}}{\dfrac{\omega}{2}}=R\cdot 1=R$.

Είναι $(AMB)=\dfrac{1}{2}AB\cdot MK=\dfrac{1}{2}2R\eta\mu\dfrac{\omega}{2}(R-OK)=R\eta\mu\dfrac{\omega}{2}\left(R-R\sigma\upsilon\nu\dfrac{\omega}{2}\right)=$

$=R^2\eta\mu\dfrac{\omega}{2}\left(1-\sigma\upsilon\nu\dfrac{\omega}{2}\right)$

και $(OAB)=\dfrac{1}{2}OA\cdot OB\eta\mu\omega=\dfrac{1}{2}R^2\eta\mu\omega$

οπότε $\lim\limits_{\omega\to\frac{2\pi}{3}}\dfrac{(AMB)}{(OAB)}=\lim\limits_{\omega\to\frac{2\pi}{3}}\dfrac{R^2\eta\mu\dfrac{\omega}{2}\left(1-\sigma\upsilon\nu\dfrac{\omega}{2}\right)}{\dfrac{1}{2}R^2\eta\mu\omega}=2\dfrac{\eta\mu\dfrac{\pi}{3}\left(1-\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3}\right)}{\eta\mu^2\dfrac{\pi}{3}}=2\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=1$

3.156. α) Όπου x το $\dfrac{1}{x}$: $\dfrac{1}{3x^2}\leq f\left(\dfrac{1}{x}\right)\leq\dfrac{x^2+1}{3x^2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}\leq x^2 f\left(\dfrac{1}{x}\right)\leq\dfrac{x^2+1}{3}$

και από Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^2 f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]=\dfrac{1}{3}$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3 f\left(\frac{1}{x}\right)+\eta\mu 3x}{x^2+\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)+3\dfrac{\eta\mu 3x}{3x}}{x+\dfrac{\eta\mu x}{x}}=\dfrac{10}{3}$

3.157. α) $f^2(x)+4=4xf(x)+4\sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow f^2(x)-4xf(x)=4\sigma\upsilon\nu^2 x-4 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} \dfrac{f^2(x)}{x^2}-4\dfrac{f(x)}{x}=-4\dfrac{\eta\mu^2 x}{x^2}$

και $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f^2(x)}{x^2}-4\dfrac{f(x)}{x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left(-4\dfrac{\eta\mu^2 x}{x^2}\right)$,

αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=k$, τότε $k^2-4k=-4 \Leftrightarrow (k-2)^2=0 \Leftrightarrow k=2$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{x(x+2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\dfrac{\eta\mu x}{x}\dfrac{1}{x+2}=2\cdot\dfrac{1}{2}=1$

γιατί $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)}{u}=2$

Μη πεπερασμένο όριο

3.171. α) Είναι $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x-7}{|x-3|}=\lim\limits_{x\to 3}\left[(2x-7)\cdot\frac{1}{|x-3|}\right]=-\infty$ επειδή $\lim\limits_{x\to 3}(2x-7)=-1<0$,

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{|x-3|}=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to 3}|x-3|=0$ και $|x-3|>0$ για $x\neq 3$.

β) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x+1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\left[(2x+1)\frac{1}{(x-1)^2}\right]=+\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=3$ και $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$

γ) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{|x-3|+4}{x^2-4x+4}=\lim\limits_{x\to 2}\left[(|x-3|+4)\frac{1}{(x-2)^2}\right]=+\infty$,

γιατί $\lim\limits_{x\to 2}(|x-3|+4)=5$ και $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty$

δ) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{|x-3|-2}{|x+1|}=\lim\limits_{x\to -1}\left[(|x-3|-2)\frac{1}{|x+1|}\right]=+\infty$,

γιατί $\lim\limits_{x\to -1}(|x-3|-2)=2$ και $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1}{|x+1|}=+\infty$

ε) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{(x-2)^3}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{(x-2)^{\cancel{3}\,2}}=\lim\limits_{x\to 2}\left[(x-3)\frac{1}{(x-2)^2}\right]=-\infty$,

γιατί $\lim\limits_{x\to 2}(x-3)=-1$ και $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty$

στ) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-2}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x+8}-2\right)\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$,

γιατί $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x+8}-2\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$

3.172. α) $\lim\limits_{x\to 5^-}\frac{3x+1}{x^2-25}=\lim\limits_{x\to 5^-}\left(\frac{3x+1}{x+5}\cdot\frac{1}{x-5}\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 5^+}\frac{3x+1}{x^2-25}=\lim\limits_{x\to 5^+}\left(\frac{3x+1}{x+5}\cdot\frac{1}{x-5}\right)=+\infty$

άρα δεν υπάρχει το όριο.

β) Εστω $f(x)=\frac{4x+5}{x^2-4}=\frac{4x+5}{x+2}\cdot\frac{1}{x-2}$, $x\neq\pm 2$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4x+5}{x+2}=\frac{13}{4}>0$, $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=-\infty$,

και $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=+\infty$, άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

γ) $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x^2+x}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\left[(x^2+x)\frac{1}{x-2}\right]=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^2+x}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\left[(x^2+x)\frac{1}{x-2}\right]=+\infty$,

δεν υπάρχει το όριο.

δ) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{|x-1|+2x}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{|x-1|+2x}{x^2+x+1}\cdot\dfrac{1}{x-1}\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{|x-1|+2x}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{|x-1|+2x}{x^2+x+1}\cdot\dfrac{1}{x-1}\right)=+\infty$

δεν υπάρχει το όριο.

ε) $\lim\limits_{x\to5^-}\dfrac{x+1}{x^2-7x+10}=\lim\limits_{x\to5^-}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\cdot\dfrac{1}{x-5}\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to5^+}\dfrac{x+1}{x^2-7x+10}=\lim\limits_{x\to5^+}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\cdot\dfrac{1}{x-5}\right)=+\infty$,

δεν υπάρχει το όριο.

στ) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\left[(x-1)\dfrac{1}{x^2}\right]=-\infty$

3.173. α) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\cancel{(x+1)}(x-4)}{\cancel{(x+1)}(x-1)}$, $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x-4}{x-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x-4}{x-1}=-\infty$, δεν υπάρχει

β) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+6x+10}{x^3-x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+6x+10}{x+1}\cdot\dfrac{1}{(x-1)^2}=+\infty$

γ) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{4x-7}{\sqrt{x^3-6x^2+9x}}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{4x-7}{\sqrt{x(x-3)^2}}=\lim\limits_{x\to3}\left[\dfrac{4x-7}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{|x-3|}\right]=+\infty$

δ) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x^3-3x^2-9x+27}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\cancel{(x-3)}\cancel{(x+3)}}{(x-3)^{\cancel{2}}\cancel{(x+3)}}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{1}{x-3}$

$\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{1}{x-3}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{1}{x-3}=+\infty$, δεν υπάρχει το όριο.

3.174. α) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x^2-3}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(2x^2-3)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\left[(2x^2-3)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\dfrac{1}{2x}\right]=-\infty$

β) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x+5}{\sqrt[3]{x+27}-3}=\lim\limits_{x\to0^+}\left[(2x+5)\left(\left(\sqrt[3]{x+27}\right)^2+3\sqrt[3]{x+27}+9\right)\dfrac{1}{x}\right]=+\infty$

γ) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2+4x}{|x|-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\left[(x^2+4x)\dfrac{1}{x-1}\right]=+\infty$

δ) $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x^2-x-3}{1-|x|}=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x^2-x-3}{1+x}=\lim\limits_{x\to-1^-}\left[(x^2-x-3)\dfrac{1}{1+x}\right]=+\infty$

ε) $\lim\limits_{x\to2}\left|\dfrac{x+2}{x-2}\right|=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{|x+2|}{|x-2|}=\lim\limits_{x\to2}\left[|x+2|\dfrac{1}{|x-2|}\right]=+\infty$

στ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x-2|+2|x+3|}{|x-1|-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x+2+2x+6}{-x+1-1}=\lim\limits_{x\to0}(-x+8)\dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to0^-}(-x+8)\dfrac{1}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+}(-x+8)\dfrac{1}{x}=+\infty$, δεν υπάρχει το όριο.

3.175. **α)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu(3x)}{x|x|}=\lim\limits_{x\to 0}\left(3\frac{\eta\mu(3x)}{3x}\frac{1}{|x|}\right)=+\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu(3x)}{3x}=1$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{|x|}=+\infty$

β) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x-\pi}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[(x-\pi)\frac{1}{\eta\mu x}\right]=+\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to 0}(x-\pi)=-\pi$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{\eta\mu x}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-\pi}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x-\pi)\frac{1}{\eta\mu x}\right]=-\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\eta\mu x}=+\infty$, δεν υπάρχει το όριο

γ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{2x+\pi}{\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\left[(2x+\pi)\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right]=+\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(2x+\pi)=2\pi$ και $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\frac{2x+\pi}{\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\left[(2x+\pi)\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right]=-\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}=-\infty$, δεν υπάρχει το όριο

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-x}{1-\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(2-x)\frac{1}{1-\sigma\upsilon\nu x}\right]=+\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to 0}(2-x)=2$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1-\sigma\upsilon\nu x}=+\infty$

ε) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x-3}{\sigma\upsilon\nu x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(\eta\mu x-3)\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x-1}\right]=+\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu x-3)=-3$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x-1}=-\infty$

στ) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2-7\sigma\upsilon\nu x}{3\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(2-7\sigma\upsilon\nu x)\frac{1}{3\eta\mu x}\right]=-\infty$,

γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}(2-7\sigma\upsilon\nu x)=-5$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{3\eta\mu x}=+\infty$

3.176. **α)** $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{2x}{x-3}-\frac{3}{x^2-7x+12}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x(x-4)-3}{x^2-7x+12}=\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{2x^2-8x-3}{x-4}\frac{1}{x-3}\right)$

Είναι $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-8x-3}{x-4}=9$ και $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{1}{x-3}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}=+\infty$, άρα δεν υπάρχει το όριο.

β) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2+x-2}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x-1)(x+2)}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x}{x^2-4}\cdot\frac{1}{x-1}\right)$

Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x}{x^2-4}=-\frac{2}{3}$ και $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$, άρα δεν υπάρχει το όριο.

3.177. **α)** Εστω $\lim\limits_{x\to 4}\frac{9}{x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{9}{\sqrt{x}(x-4)-2(x-4)}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{9}{(x-4)(\sqrt{x}-2)}=$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{9(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(x-4)}=\lim_{x\to 4}\left[9(\sqrt{x}+2)\frac{1}{(x-4)^2}\right]=+\infty$$

β) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x-1}{x\sqrt{x+1}+6-3\sqrt{x+1}-2x}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x-1}{\sqrt{x+1}(x-3)-2(x-3)}=$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2x-1}{(x-3)(\sqrt{x+1}-2)}=\lim_{x\to 3}\frac{(2x-1)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(x+1-4)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\left[(2x-1)(\sqrt{x+1}+2)\frac{1}{(x-3)^2}\right]=+\infty$$

3.178. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{\eta\mu x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2}{\eta\mu x}=+\infty$, δεν υπάρχει το όριο.

3.179. Εστω $\dfrac{4x^2-1}{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow f(x)=\left(4x^2-1\right)\dfrac{1}{g(x)}$ και $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left[\left(4x^2-1\right)\dfrac{1}{g(x)}\right]=0$

3.180. Εστω $g(x)=\left(x^2-2x+5\right)f(x)\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x+5}g(x)$

και $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{1}{x^2-2x+5}g(x)\right]=+\infty$

3.181. Εστω $h(x)=\dfrac{g(x)\left(\sqrt{x+8}-3\right)}{\eta\mu\pi x}$, $x\neq 1$ με $\lim\limits_{x\to 1} h(x)=+\infty$.

Τότε: $g(x)=\dfrac{h(x)\cdot\eta\mu\pi x}{\sqrt{x+8}-3}=\dfrac{h(x)\cdot\eta\mu(\pi-\pi x)\cdot\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{x-1}=h(x)\dfrac{\pi\eta\mu\left(\pi(1-x)\right)}{\pi(1-x)}\left(-\sqrt{x+8}-3\right)$,

$\lim\limits_{x\to 1} g(x)=-\infty$.

3.182. **α)** Εστω $(x-2)^2 f(x)=g(x)\overset{x\neq 2}{\Leftrightarrow} f(x)=g(x)\dfrac{1}{(x-2)^2}$ και $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left[g(x)\dfrac{1}{(x-2)^2}\right]=-\infty$

β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3f^2(x)-5f(x)+7}{f^2(x)+2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cancel{f^2(x)}\left(3-\overset{0}{\cancel{\dfrac{5}{f(x)}}}+\overset{0}{\cancel{\dfrac{7}{f^2(x)}}}\right)}{\cancel{f^2(x)}\left(1+\overset{0}{\cancel{\dfrac{2}{f^2(x)}}}\right)}=3$

3.183. Εστω $\begin{cases} 4f(x)-3xg(x)=\varphi(x) \text{ με } \lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)=+\infty \\ -2xf(x)-3g(x)=h(x) \text{ με } \lim\limits_{x\to 1} h(x)=+\infty \end{cases}$

και $D=\begin{vmatrix} 4 & -3x \\ -2x & -3 \end{vmatrix}=-12-6x^2$, $D_f=\begin{vmatrix} \varphi(x) & -3x \\ h(x) & 3 \end{vmatrix}=3\varphi(x)+3xh(x)$,

$D_g=\begin{vmatrix} 4 & \varphi(x) \\ -2x & h(x) \end{vmatrix}=4h(x)+2x\varphi(x)$.

Άρα $f(x)=\dfrac{3\varphi(x)+3xh(x)}{-12-6x^2}$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3\varphi(x)+3xh(x)}{-12-6x^2}=-\infty$

και $g(x)=\dfrac{4h(x)+2x\varphi(x)}{-12-6x^2}$, άρα $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4h(x)+2x\varphi(x)}{-12-6x^2}=-\infty$.

3.184. Επειδή η f είναι άρτια ισχύει ότι: $f(-x)=f(x)$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{x\to 0^+}\left[f(-x)\right]=+\infty$ (2)

Εστω $-x=\omega$. Όταν $x\to 0^+$, τότε $\omega\to 0^-$.
Η σχέση (2) γίνεται: $\lim\limits_{\omega\to 0^-}\left[f(\omega)\right]=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{\omega\to 0^-} f(\omega)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{\omega\to 0^-} f(\omega)=+\infty$.
Άρα και $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$.

3.185. α) Για $x\neq 0$ είναι $x^4 g(x)\geq 4x^2+2x+1 \Leftrightarrow g(x)\geq \dfrac{4x^2+2x+1}{x^4}$.

Όμως $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4x^2+2x+1}{x^4}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x^4}\cdot\left(4x^2+2x+1\right)\right]=+\infty$ άρα και $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty$.

β) Επειδή $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty$ υπάρχει περιοχή του 0 τέτοια ώστε $g(x)>0$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{g(x)}=0$, οπότε:

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{4g^2(x)+2g(x)+1}-2g(x)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{4g^2(x)+2g(x)+1-4g^2(x)}{\sqrt{4g^2(x)+2g(x)+1}+2g(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2g(x)+1}{\sqrt{g^2(x)\left(4+\dfrac{2}{g(x)}+\dfrac{1}{g^2(x)}\right)}+2g(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2g(x)+1}{|g(x)|\sqrt{4+\dfrac{2}{g(x)}+\dfrac{1}{g^2(x)}}+2g(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{g(x)}\left(2+\dfrac{1}{g(x)}\right)}{\cancel{g(x)}\left(\sqrt{4+\dfrac{2}{g(x)}+\dfrac{1}{g^2(x)}}+2\right)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

3.186. Εστω $f(x)=\dfrac{x^2+3x-\lambda}{|x-1|}=\dfrac{1}{|x-1|}\cdot\left(x^2+3x-\lambda\right)$ με $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+3x-\lambda\right)=4-\lambda$ και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{|x-1|}=+\infty$.

- $4-\lambda>0\Leftrightarrow \lambda<4$, τότε $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$
- $4-\lambda<0\Leftrightarrow \lambda>4$, τότε $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$
- $4-\lambda=0\Leftrightarrow \lambda=4$, τότε $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{|x-1|}=\dfrac{(x+4)(x-1)}{|x-1|}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x+4)(x-1)}{-(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^-}(-x-4)=-5$

και $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x+4)(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+4)=5$.

Οπότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ στην περίπτωση αυτή.

3.187. **α)** Εστω $f(x)=(x^2-2x+\lambda)\frac{1}{|x-1|}$, $x\neq 1$. Είναι $\lim_{x\to 1}(x^2-2x+\lambda)=\lambda-1$ και $\lim_{x\to 1}\frac{1}{|x-1|}=+\infty$.

Αν $\lambda>1$, τότε $\lim_{x\to 1} f(x)=+\infty$, αν $\lambda<1$, τότε $\lim_{x\to 1} f(x)=-\infty$ και

αν $\lambda=1$, τότε $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)^{\cancel{2}}}{-\cancel{(x-1)}}=0$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-1)}}=0$, άρα $\lim_{x\to 1} f(x)=0$

β) Εστω $f(x)=(x-\lambda)\frac{1}{(x+2)^2}$, $x\neq -2$. Είναι $\lim_{x\to -2}(x-\lambda)=-\lambda-2$ και $\lim_{x\to -2}\frac{1}{(x+2)^2}=+\infty$

Αν $\lambda>-2$, τότε $\lim_{x\to -2} f(x)=-\infty$, αν $\lambda<-2$, τότε $\lim_{x\to -2} f(x)=+\infty$ και

αν $\lambda=-2$, τότε $\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}\frac{\cancel{x+2}}{(x+2)^{\cancel{2}}}=-\infty$, $\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\frac{\cancel{x+2}}{(x+2)^{\cancel{2}}}=+\infty$

και δεν υπάρχει το όριο.

3.188. Για $x\neq\pm 1$ είναι: $f(x)=\frac{3x^2-\alpha x+2\beta}{x^2-1}=\frac{3x^2-\alpha x+2\beta}{x+1}\cdot\frac{1}{x-1}$.

Είναι: $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$ και $\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-\alpha x+2\beta}{x+1}=\frac{3-\alpha+2\beta}{2}$, οπότε:

- Αν $\frac{3-\alpha+2\beta}{2}>0\Leftrightarrow 3-\alpha+2\beta>0$, τότε: $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty$, $\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$ και $\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$, άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 1} f(x)$.
- Αν $\frac{3-\alpha+2\beta}{2}<0\Leftrightarrow 3-\alpha+2\beta<0$, τότε: $\lim_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$ και $\lim_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$, οπότε δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 1} f(x)$.
- Αν $3-\alpha+2\beta=0\Leftrightarrow 2\beta=\alpha-3$, τότε

$$f(x)=\frac{3x^2-\alpha x+\alpha-3}{x^2-1}=\frac{3(x-1)(x+1)-\alpha(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{\cancel{(x-1)}(3x+3-\alpha)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}$$ ή

$$f(x)=\frac{3x+3-\alpha}{x+1}, \text{ οπότε } \lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{3x+3-\alpha}{x+1}=\frac{6-\alpha}{2}\in\mathbb{R}.$$

3.189. Εστω $f(x)=\frac{x-\alpha}{\sqrt{x+1}-\beta}$ με $x\geq -1$ και $x\neq\beta^2+1$.

Είναι $\lim_{x\to 3}(x-\alpha)=3-\alpha$, $\lim_{x\to 3}\left(\sqrt{x+1}-\beta\right)=2-\beta$, οπότε:

Αν $2-\beta\neq 0\Leftrightarrow\beta\neq 2$ είναι: $\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x-\alpha}{\sqrt{x+1}-\beta}=\frac{3-\alpha}{2-\beta}$

Αν $2-\beta=0\Leftrightarrow\beta=2$ είναι: $f(x)=\frac{x-\alpha}{\sqrt{x+1}-2}=\frac{(x-\alpha)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{x-3}=(x-\alpha)\left(\sqrt{x+1}+2\right)\frac{1}{x-3}$

$\lim_{x\to 3}\left[(x-\alpha)\left(\sqrt{x+1}+2\right)\right]=(3-\alpha)\cdot 4$ και $\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{x-3}=-\infty$, $\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}=+\infty$ οπότε:

• Αν $3-\alpha>0 \Leftrightarrow \alpha<3$ είναι $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$ και δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

• Αν $3-\alpha<0 \Leftrightarrow \alpha>3$ είναι $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=-\infty$ και δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

• Αν $3-\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=3$ είναι $f(x)=\dfrac{x-\alpha}{\sqrt{x+1}-2}=\dfrac{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{x-3}=\sqrt{x+1}+2$

και $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\left(\sqrt{x+1}+2\right)=4$

3.190. $\lim\limits_{x\to\lambda}\dfrac{\sqrt{(x-\lambda)^2+\lambda^2}-\lambda}{|x|-\lambda}=\lim\limits_{x\to\lambda}\dfrac{\left(\sqrt{(x-\lambda)^2+\lambda^2}-\lambda\right)\left(\sqrt{(x-\lambda)^2+\lambda^2}+\lambda\right)}{\left(|x|-\lambda\right)\left(\sqrt{(x-\lambda)^2+\lambda^2}+\lambda\right)}=$

$$=\lim_{x\to\lambda}\frac{(x-\lambda)^2+\cancel{\lambda^2}-\cancel{\lambda^2}}{\left(|x|-\lambda\right)\left(\sqrt{(x-\lambda)^2+\lambda^2}+\lambda\right)}=\lim_{x\to\lambda}\frac{(x-\lambda)^2}{\left(|x|-\lambda\right)\left(\sqrt{(x-\lambda)^2+\lambda^2}+\lambda\right)}.$$

• Αν $\lambda>0$, τότε όταν $x\to\lambda$ είναι $x>0$, οπότε το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to\lambda}\frac{(x-\lambda)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-\lambda)}\left(\sqrt{(x-\lambda)^2+\lambda^2}+\lambda\right)}=\lim_{x\to\lambda}\frac{(x-\lambda)}{\left(\sqrt{(x-\lambda)^2+\lambda^2}+\lambda\right)}=0$$

• Αν $\lambda>0$, τότε όταν $x\to\lambda$ είναι $x<0$, οπότε το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to\lambda}\frac{\sqrt{(x-\lambda)^2+\lambda^2}-\lambda}{|x|-\lambda}=\lim_{x\to\lambda}\frac{\sqrt{(x-\lambda)^2+\lambda^2}-\lambda}{-x-\lambda}=\lim_{x\to\lambda}\frac{\sqrt{(\lambda-\lambda)^2+\lambda^2}-\lambda}{-\lambda-\lambda}=$$

$$=\lim_{x\to\lambda}\frac{\sqrt{\lambda^2}-\lambda}{-\lambda-\lambda}=\lim_{x\to\lambda}\frac{-\lambda-\lambda}{-\lambda-\lambda}=1$$

• Αν $\lambda=0$, τότε το όριο γίνεται: $\lim\limits_{x\to\lambda}\dfrac{\sqrt{(x-\lambda)^2+\lambda^2}-\lambda}{|x|-\lambda}=\lim\limits_{x\to\lambda}\dfrac{\sqrt{x^2}}{|x|}=\lim\limits_{x\to\lambda}\dfrac{|x|}{|x|}=1.$

3.191. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}(\alpha\sigma\upsilon\nu x+\beta\eta\mu x-\gamma)=\alpha-\gamma$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$, οπότε:

• Αν $\alpha>\gamma$ ή $\alpha<\gamma$ δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

• Αν $\alpha=\gamma$ τότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\alpha\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}+\beta\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=\beta$

3.192. $0\le\dfrac{f^4(x)+g^4(x)}{f^6(x)+g^6(x)}\le\dfrac{f^4(x)}{f^6(x)+g^6(x)}\le\dfrac{f^4(x)}{f^6(x)}=\dfrac{1}{f^2(x)}.$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{f^2(x)}=0$, άρα και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^4(x)+g^4(x)}{f^6(x)+g^6(x)}=0$

3.193. Εστω $f(x)=\left(x^2-\alpha x-\beta\right)\dfrac{1}{|x+2|}$, $x\neq -2$.

Είναι $\lim\limits_{x\to -2}\left(x^2-\alpha x-\beta\right)=2\alpha-\beta+4$ και $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{|x+2|}=+\infty$, άρα:

Αν $2\alpha-\beta+4>0$, τότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$, αν $2\alpha-\beta+4<0$ τότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$,

άρα για να είναι $\lim\limits_{x\to -2} f(x)\in\mathbb{R}$, πρέπει $2\alpha-\beta+4=0 \Leftrightarrow \beta=2\alpha+4$. Τότε

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}\frac{\cancel{(x+2)}(x-2-\alpha)}{-\cancel{(x+2)}}=4+\alpha \text{ και } \lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\frac{\cancel{(x+2)}(x-2-\alpha)}{\cancel{(x+2)}}=-4-\alpha$$

άρα $4+\alpha=-4-\alpha \Leftrightarrow \alpha=-4$ και $\beta=2(-4)+4=-4$.

3.194. Είναι $f(x)=\dfrac{\alpha x^3-\beta x^2+2x-8}{x+2}\dfrac{1}{x-2}$, $x\neq\pm 2$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\alpha x^3-\beta x^2+2x-8}{x+2}=\dfrac{8\alpha-4\beta-4}{4}=2\alpha-\beta-1$ και $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$,

οπότε αν $2\alpha-\beta-1>0$ ή $2\alpha-\beta-1<0$ δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

Άρα για να είναι $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$ πρέπει: $2\alpha-\beta-1=0 \Leftrightarrow \beta=2\alpha-1$. Τότε

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(\alpha x^2+x+4)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\frac{4\alpha+6}{4}=4 \Leftrightarrow \alpha=\frac{5}{2} \text{ και } \beta=2\cdot\frac{5}{2}-1=4$$

3.195. Εστω $f(x)=\dfrac{x^2-4\lambda x+4\lambda^2}{x^2-\kappa^2}=\dfrac{x^2-4\lambda x+4\lambda^2}{x+\kappa}\dfrac{1}{x-\kappa}$, $x\neq\pm\kappa$

Είναι $\lim\limits_{x\to\kappa}\dfrac{x^2-4\lambda x+4\lambda^2}{x+\kappa}=\dfrac{(\kappa-2\lambda)^2}{2\kappa}$, $\lim\limits_{x\to\kappa^-}\dfrac{1}{x-\kappa}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\kappa^+}\dfrac{1}{x-\kappa}=+\infty$, οπότε

αν $\dfrac{(\kappa-2\lambda)^2}{2\kappa}>0$ ή $\dfrac{(\kappa-2\lambda)^2}{2\kappa}<0$ τότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\kappa} f(x)$.

Άρα για να είναι $\lim\limits_{x\to\kappa} f(x)=2\kappa+4$, πρέπει $\dfrac{(\kappa-2\lambda)^2}{2\kappa}=0 \Leftrightarrow \kappa=2\lambda \Leftrightarrow \lambda=\dfrac{\kappa}{2}$. Τότε

$$\lim_{x\to\kappa} f(x)=\lim_{x\to\kappa}\frac{x^2-2\kappa x+\kappa^2}{x^2-\kappa^2}=\lim_{x\to\kappa}\frac{(x-\kappa)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-\kappa)}(x+\kappa)}=0,$$ άρα $2\kappa+4=0 \Leftrightarrow \kappa=-2$ και $\lambda=-1$.

3.196. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\alpha|x+1|+\beta|x-4|-1}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\alpha(x+1)-\beta(x-4)-1}{(x-3)(x+3)}$.

Εστω $f(x)=\dfrac{\alpha(x+1)-\beta(x-4)-1}{x+3}\dfrac{1}{x-3}$, $x\neq\pm 3$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\alpha(x+1)-\beta(x-4)-1}{x+3}=\dfrac{4\alpha+\beta-1}{6}$, $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1}{x-3}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{x-3}=+\infty$,

οπότε αν $\dfrac{4\alpha+\beta-1}{6}>0$ ή $\dfrac{4\alpha+\beta-1}{6}<0$ δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, άρα για να είναι

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)\in\mathbb{R}$ πρέπει $\dfrac{4\alpha+\beta-1}{6}=0 \Leftrightarrow \beta=1-4\alpha$. Τότε $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(5\alpha-1)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x+3)}=\dfrac{5\alpha-1}{6}$.

Είναι $\dfrac{5\alpha-1}{6}=9 \Leftrightarrow \alpha=11$ και $\beta=1-4\cdot 11=-43$

3.197. Εστω $f(x)=\left(\kappa x^3+\lambda x^2+6x+8\right)\frac{1}{|x-1|}$, $x\neq 1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\left(\kappa x^3+\lambda x^2+6x+8\right)=\kappa+\lambda+14$ και $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{|x-1|}=+\infty$, οπότε αν $\kappa+\lambda+14>0$ τότε $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=+\infty$, αν $\kappa+\lambda+14<0$ τότε $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-\infty$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\mu$, είναι $\kappa+\lambda+14=0\Leftrightarrow \lambda=-\kappa-14$.

Τότε $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\cancel{(x-1)}\left(\kappa x^2-14x-8\right)}{-\cancel{(x-1)}}=-\kappa+22$,

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\cancel{(x-1)}\left(\kappa x^2-14x-8\right)}{\cancel{(x-1)}}=\kappa-22$, άρα $-\kappa+22=\kappa-22=\mu\Leftrightarrow\kappa=22$, $\mu=0$.

Τότε $\lambda=-22-14=-36$

3.198. $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\alpha|x+3|+\beta|x-3|-5}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\alpha(x+3)-\beta(x-3)-5}{x-1}\frac{1}{x-2}\right)$, $x\neq 1{,}2$

Είναι $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\alpha(x+3)-\beta(x-3)-5}{x-1}=5\alpha+\beta-5$, $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty$,

άρα αν $5\alpha+\beta-5>0$ ή $5\alpha+\beta-5<0$ τότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$. Επειδή $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=7$,

είναι $5\alpha+\beta-5=0\Leftrightarrow\beta=5-5\alpha$. Τότε $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(6\alpha-5)}{(x-1)\cancel{(x-2)}}=6\alpha-5$.

Είναι $6\alpha-5=7\Leftrightarrow\alpha=2$ και $\beta=5-5\cdot 2=-5$

3.199. Εστω $f(x)=\left(x^2-\alpha x+\beta-1\right)\frac{1}{x-3}$, $x\neq 3$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-\alpha x+\beta-1\right)=8-3\alpha+\beta$, $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{1}{x-3}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}=+\infty$,

οπότε αν $8-3\alpha+\beta\neq 0$ δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$.

Είναι $8-3\alpha+\beta=0\Leftrightarrow\beta=3\alpha-8$, τότε: $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3-\alpha)}{\cancel{x-3}}=6-\alpha=5\Leftrightarrow\alpha=1$,

$\beta=3-8=-5$

3.200. $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\ell\in\mathbb{R}$. Για $x<-1$: $f(x)=\frac{\alpha x+1}{x^2-1}\Leftrightarrow f(x)\left(x^2-1\right)=\alpha x+1$

και $\lim\limits_{x\to -1^-}\left[f(x)\left(x^2-1\right)\right]=\lim\limits_{x\to -1^-}(\alpha x+1)\Leftrightarrow 0=-\alpha+1\Leftrightarrow\alpha=1$,

τότε $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{\cancel{x+1}}{\cancel{(x+1)}(x-1)}=-\frac{1}{2}$ και $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\ln(x+\beta)=\ln(-1+\beta)$

Είναι $\ln(-1+\beta)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow -1+\beta=e^{-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow\beta=\frac{1}{\sqrt{e}}+1$

3.201. $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\alpha\eta\mu x+\beta x}{x^2+x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\frac{\alpha}{x+1}+\frac{\beta\cancel{x}}{\cancel{x}(x+1)}\right)=\alpha+\beta$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\alpha\eta\mu x-\beta x}{x^2+x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\frac{\alpha}{x+1}-\frac{\beta\cancel{x}}{\cancel{x}(x+1)}\right)=\alpha-\beta$

Είναι $\alpha+\beta=\alpha-\beta\Leftrightarrow\beta=0$ και $\alpha+\beta=2-\alpha\Leftrightarrow\alpha=1$

3.202. Για $x\neq 1$: $\frac{f(x)-\mu}{(x-1)^2}=g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)(x-1)^2+\mu$ και $\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\left(g(x)(x-1)^2+\mu\right)=\mu$.

Επειδή $\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\left(x^{2\nu}-2x^{\nu}\right)=-1$, είναι $\mu=-1$.

Τότε $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-\mu}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{2\nu}-2x^{\nu}+1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^{\nu}-1\right)^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)^2}\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+...+x+1\right)^2}{\cancel{(x-1)^2}}=\nu^2$

3.203. Για $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f(x)=\frac{\sqrt{\kappa+x^2}-\lambda}{1-\sigma\upsilon\nu x}\Leftrightarrow\sqrt{\kappa+x^2}-\lambda=f(x)(1-\sigma\upsilon\nu x)$

και $\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{\kappa+x^2}-\lambda\right)=\lim_{x\to 0}\left[f(x)(1-\sigma\upsilon\nu x)\right]\Leftrightarrow\sqrt{\kappa}-\lambda=0\Leftrightarrow\kappa=\lambda^2$.

Τότε $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\lambda^2+x^2}-\lambda}{1-\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{\lambda^2+x^2}-\lambda\right)\left(\sqrt{\lambda^2+x^2}+\lambda\right)(1+\sigma\upsilon\nu x)}{(1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)\left(\sqrt{\lambda^2+x^2}-\lambda\right)}=$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\lambda^2+x^2-\lambda^2\right)(1+\sigma\upsilon\nu x)}{\left(1-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)\left(\sqrt{\lambda^2+x^2}+\lambda\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}\left(\sqrt{\lambda^2+x^2}+\lambda\right)}=\frac{1}{\lambda}$,

άρα $\frac{1}{\lambda}=1\Leftrightarrow\lambda=1$ και $\kappa=1$

3.204. Για $x\neq 1$ είναι $f(x)=\frac{x^{\nu}-\alpha x-\beta}{x-1}\Leftrightarrow x^{\nu}-\alpha x-\beta=f(x)(x-1)$

και $\lim_{x\to 1}\left(x^{\nu}-\alpha x-\beta\right)=\lim_{x\to 1}\left(f(x)(x-1)\right)\Leftrightarrow 1-\alpha-\beta=0\Leftrightarrow\alpha=1-\beta$.

Τότε $\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^{\nu}-(1-\beta)x-\beta}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x\left(x^{\nu-1}-1\right)+\beta(x-1)}{x-1}=$

$=\lim_{x\to 1}\left(x\frac{\cancel{(x-1)}\left(x^{\nu-2}+x^{\nu-3}+...+1\right)}{\cancel{x-1}}+\beta\right)=\nu-1+\beta=4\Leftrightarrow\beta=5-\nu$ και $\alpha=\nu-4$

3.205. Για $x\neq 1$ είναι $\frac{x^2+g(x)-3}{x^3-1}=f(x)\Leftrightarrow x^2+g(x)-3=f(x)\left(x^3-1\right)$

και $\lim_{x\to 1}\left[x^2+g(x)-3\right]=\lim_{x\to 1}\left[f(x)\left(x^3-1\right)\right]\Leftrightarrow\kappa=1-\lambda$.

Τότε $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+\kappa x+\lambda-3}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+x-\lambda x+\lambda-3}{x^3-1}=$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(2x+3)-\lambda\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}=\frac{5-\lambda}{3}=1\Leftrightarrow\lambda=2 \text{ και } \kappa=-1.$$

3.206. Εστω $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^4+x^2}+\alpha|\varepsilon\varphi x|}{\sqrt{x^2+x+1}-1}$, $x\neq0$ με $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\ell\in\mathbb{R}$.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^4+x^2}}{\sqrt{x^2+x+1}-1}+\frac{\alpha\cdot|\varepsilon\varphi x|}{\sqrt{x^2+x+1}-1}=$$

$$=\frac{|x|\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}{x^2+x+1-1}+\frac{\alpha\cdot|\varepsilon\varphi x|\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}{x^2+x+1-1}=$$

$$=\frac{|x|\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}{x(x+1)}+\alpha\frac{|\eta\mu x|}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+1}+1}{(x+1)|\sigma\upsilon\nu x|}.$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{-x\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}{x(x+1)}-\alpha\frac{\eta\mu x}{x}\frac{\sqrt{x^2+x+1}+1}{\sigma\upsilon\nu x(x+1)}\right)=-2-2\alpha.$$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=....=2+2\alpha$. Άρα, $2+2\alpha=-2-2\alpha\Leftrightarrow\alpha=-1$.

3.207. Για $x<2$, είναι $f(x)=\dfrac{x^2+x+\lambda}{x-2}\Leftrightarrow f(x)(x-2)=x^2+x+\lambda$ και

$\lim\limits_{x\to2^-}f(x)(x-2)=\lim\limits_{x\to2^-}\left(x^2+x+\lambda\right)\Leftrightarrow0=6+\lambda\Leftrightarrow\lambda=-6$,

τότε $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{\cancel{(x-2)}(x+3)}{\cancel{x-2}}=5$

Για $x>2$ είναι $f(x)=\dfrac{4x^2+kx-\lambda}{x-2}\Leftrightarrow f(x)(x-2)=4x^2+kx-\lambda$ και

$\lim\limits_{x\to2^+}f(x)(x-2)=\lim\limits_{x\to2^+}\left(4x^2+kx-\lambda\right)\Leftrightarrow0=16+2k-\lambda\Leftrightarrow\lambda=16+2k$,

τότε $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{4x^2+kx-16-2k}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\cancel{(x-2)}(4x+8+k)}{\cancel{x-2}}=16+k$.

Άρα $5=16+k=\lambda-k\Leftrightarrow k=-11$ και $\lambda=-6$.

3.208. **α)** $f(x)(x^2-2)=g(x)\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{g(x)}{x^2-2}$ κοντά στο 1. Οπότε $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)}{x^2-2}=+\infty$

β) Θέτουμε $\dfrac{1}{f(x)}=u$, τότε $\lim\limits_{x\to1}\left[f(x)\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}\right]=\lim\limits_{u\to0}\left[\dfrac{1}{u}\eta\mu u\right]=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$

γ) Επειδή $\lim\limits_{x\to1}f(x)=+\infty$ και $g(x)>f(x)$, είναι και $\lim\limits_{x\to1}g(x)=+\infty$

3.209. **α)** Για $y=x$ είναι $8f(2x)=f(2x)+f(2x)+48x^3 \Leftrightarrow f(2x)=8x^3$.

Αν θέσουμε $2x=u$ προκύπτει $f(u)=u^3$ άρα και $f(x)=x^3$, $x\in\mathbb{R}$.

β) i. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{f^2(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^6}=+\infty$

ii. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{f(x^3)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{x^9}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^6}=+\infty$

γ) Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\neq x_2$, τότε $x_1^3\neq x_2^3 \Leftrightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$, άρα f 1-1.

Θέτουμε $f^{-1}(x+1)=u \Leftrightarrow x+1=f(u)\Leftrightarrow x=u^3-1$. Όταν $x\to0$, τότε $u\to1$

$$\lim_{x\to0}\frac{f^{-1}(x+1)+\sqrt{f^{-1}(x+1)}-2}{x}=\lim_{u\to1}\frac{u+\sqrt{u}-2}{u^3-1}=\lim_{u\to1}\left[\frac{\cancel{u-1}}{\cancel{(u-1)}(u^2+u+1)}+\frac{\sqrt{u}-1}{u^3-1}\right]=$$

$$=\lim_{u\to1}\left[\frac{1}{u^2+u+1}+\frac{\cancel{u-1}}{\cancel{(u-1)}(u^2+u+1)(\sqrt{u}+1)}\right]=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

3.210. **α)** $3f^5(x)+\alpha f^3(x)+f(x)=x^2-9 \Leftrightarrow f(x)\left(3f^4(x)+\alpha f^2(x)+1\right)x^2-9\Leftrightarrow$

$f(x)=\dfrac{x^2-9}{3f^4(x)+\alpha f^2(x)+1}$. Επειδή $3f^4(x)+\alpha f^2(x)+1\geq1\Leftrightarrow\dfrac{1}{3f^4(x)+\alpha f^2(x)+1}\leq1$,

έχουμε: $|f(x)|=\dfrac{|x^2-9|}{3f^4(x)+\alpha f^2(x)+1}\leq|x^2-9|\Leftrightarrow-|x^2-9|\leq f(x)\leq|x^2-9|$

και με Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to-3}f(x)=0$.

β) $\left|f(x)\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{x+6}{x+3}\right)\right|=|f(x)|\left|\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{x+6}{x+3}\right)\right|\leq|f(x)|\Leftrightarrow-|f(x)|\leq f(x)\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{x+6}{x+3}\right)\leq|f(x)|$

και με Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to0}\left(f(x)\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{x+6}{x+3}\right)\right)=0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6}{f^2(x)}=+\infty$, είναι και $\lim\limits_{x\to0}h(x)=+\infty$

3.211. **α)** $(x-2)f(x)\geq e^{2-x}\overset{x<2}{\Leftrightarrow}f(x)\leq\dfrac{e^{2-x}}{x-2}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{e^{2-x}}{x-2}=-\infty$, είναι και $\lim\limits_{x\to2}f(x)=-\infty$

β) i. $\lim\limits_{x\to2}\left(-5f^3(x)+7f^2(x)-3\right)=\lim\limits_{x\to2}\left[f^3(x)\left(-5+\dfrac{7}{f(x)}-\dfrac{3}{f^3(x)}\right)\right]=+\infty$

ii. $\left|e^{f(x)}\eta\mu f(x)\right|=e^{f(x)}\left|\eta\mu f(x)\right|\leq e^{f(x)}\Leftrightarrow-e^{f(x)}\leq e^{f(x)}\eta\mu f(x)\leq e^{f(x)}$

Είναι $\lim\limits_{x\to2}e^{f(x)}\overset{f(x)=u}{=}\lim\limits_{u\to-\infty}\lim\limits_{u\to-\infty}e^u=0$, οπότε από Κ.Π είναι και $\lim\limits_{x\to2}\left[e^{f(x)}\eta\mu f(x)\right]=0$

Όριο στο άπειρο

3.241. **α)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3-3x^2+7x+100\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}2x^3=-\infty$

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-4x^2+5\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-4x^2\right)=-\infty$

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^4-4x^2-3x-6\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^4\right)=+\infty$

3.242. **α)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^2+7x-8}{5x^3-6x^2+9x-5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^2}{5x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{5x}=0$.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{18x^3-6x^2+9}{-6x^3+8x-12}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{18x^3}{-6x^3}=-3$.

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^5+7x-8}{2x^2-8x+4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^5}{2x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}2x^3=-\infty$.

3.243. **α)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x^2-x+2}{x^2-1}-\dfrac{x^2+x+2}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^3+3x^2-2x+4}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}}=+\infty$

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^4+5x+7}{x^3+1}+\dfrac{x^2+3}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5-x^4+3x^3+6x^2+2x-4}{x^4-x^3+x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^{\cancel{5}}}{\cancel{x^4}}=-\infty$

3.244. **α)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4x-3-\dfrac{x^3+7x-2}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^3-3x^2-3x-1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}}=+\infty$

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^4+5x+7}{x^3+1}+\dfrac{x^2+3}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5-x^4+3x^3+6x^2+2x-4}{x^4-x^3+x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^{\cancel{5}}}{\cancel{x^4}}=-\infty$

3.245. **α)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\left|4-x^2\right|-\left|2x^2-5x-3\right|\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^2-4-\left(2x^2-5x-3\right)\right]=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^2+5x-1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^2\right)=-\infty$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3|x-2|-|x|+1}{|x+1|-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-6-x+1}{x+1-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-5}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}=2$

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left|1-x^2\right|-3|x+1|}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-1+3x+3}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left|x-x^2\right|-|3x+5|}{2-\left|x^2-x-2\right|}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-x+3x+5}{2-x^2+x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2x+5}{-x^2+x+4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x^2}}{-\cancel{x^2}}=-1$

3.246. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=3$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-10x+1}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-10\cancel{x}}{\cancel{x}}=-10$

3.247. **α)** Αν $\lambda > -1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(\lambda+1)x^2-3x+4\lambda\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(\lambda+1)x^2\right]=+\infty$,

αν $\lambda < -1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(\lambda+1)x^2-3x+4\lambda\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(\lambda+1)x^2\right]=-\infty$

και αν $\lambda=-1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(\lambda+1)x^2-3x+4\lambda\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x-4)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x)=-\infty$

β) Αν $\lambda\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(\lambda^2-9)x^3-4x^2-\lambda x+1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(\lambda^2-9)x^3\right]=-\infty$

Αν $\lambda\in(-3,3)$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(\lambda^2-9)x^3-4x^2-\lambda x+1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(\lambda^2-9)x^3\right]=+\infty$.

Αν $\lambda=-3$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(\lambda^2-9)x^3-4x^2-\lambda x+1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}(-4x^2+3x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-4x^2)=-\infty$

και αν $\lambda=3$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(\lambda^2-9)x^3-4x^2-\lambda x+1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}(-4x^2-3x+1)=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}(-4x^2)=-\infty$

3.248. **α)** Αν $\lambda=1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\lambda-1)x^2-\lambda x+1}{(\lambda-2)x-5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x+1}{-x-5}=1$,

αν $\lambda=2$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\lambda-1)x^2-\lambda x+1}{(\lambda-2)x-5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{-5}=-\infty$,

αν $\lambda\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\lambda-1)x^2-\lambda x+1}{(\lambda-2)x-5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\lambda-1}{\lambda-2}x=-\infty$ και

αν $\lambda\in(1,2)$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\lambda-1)x^2-\lambda x+1}{(\lambda-2)x-5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\lambda-1}{\lambda-2}x=+\infty$

β) Αν $\lambda=-1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\lambda+1)x^2-3x+\lambda}{(\lambda-1)x^2-2x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x-1}{-2x^2-2x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3\cancel{x}}{-2x^{\cancel{2}}}=0$,

αν $\lambda=1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{-2x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^{\cancel{2}}}{-2\cancel{x}}=-\infty$,

αν $\lambda\neq\pm1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\lambda+1)x^2-3x+\lambda}{(\lambda-1)x^2-2x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\lambda+1)\cancel{x^2}}{(\lambda-1)\cancel{x^2}}=\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}$

γ) Αν $\lambda=2$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\lambda^2-4)x^3-3x^2+\lambda x+1}{(\lambda+2)x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x^2+2x+1}{4x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3\cancel{x^2}}{4\cancel{x^2}}=-\dfrac{3}{4}$,

αν $\lambda=-2$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\lambda^2-4)x^3-3x^2+\lambda x+1}{(\lambda+2)x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x^2+2x+1}{-2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x^{\cancel{2}}}{-2\cancel{x}}=-\infty$,

αν $\lambda\neq\pm2$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\lambda^2-4)x^3-3x^2+\lambda x+1}{(\lambda+2)x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\lambda-2)\cancel{(\lambda+2)}x^{\cancel{3}}}{\cancel{(\lambda+2)}\cancel{x^2}}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}(\lambda-2)x=\begin{cases}+\infty, & \lambda<2,\ \lambda\neq-2\\ -\infty, & \lambda>2\end{cases}$

δ) Αν $\lambda=0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\lambda x^4-3x^2+7x-5}{\left(\lambda^2-\lambda\right)x^4-3x^3+14}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x^2+7x-5}{-3x^3+14}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3\cancel{x^2}}{-3x^{\cancel{3}}}=0$,

αν $\lambda=1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\lambda x^4-3x^2+7x-5}{\left(\lambda^2-\lambda\right)x^4-3x^3+14}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-3x^2+7x-5}{-3x^3+14}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\cancel{4}}}{-3\cancel{x^3}}=-\infty$,

αν $\lambda\neq 0, 1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\lambda x^4-3x^2+7x-5}{\left(\lambda^2-\lambda\right)x^4-3x^3+14}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{\lambda}\cancel{x^4}}{\cancel{\lambda}(\lambda-1)\cancel{x^4}}=\dfrac{1}{\lambda-1}$

3.249. Αν $\alpha=1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\alpha^2-1\right)x^3+(\alpha+1)x^2+1}{\left(\alpha-\alpha^2\right)x^2+(\alpha+2)x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+1}{3x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^{\cancel{2}}}{3\cancel{x}}=+\infty$,

αν $\alpha=-1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\alpha^2-1\right)x^3+(\alpha+1)x^2+1}{\left(\alpha-\alpha^2\right)x^2+(\alpha+2)x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{-2x^2+x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{-2x^2}=0$,

αν $\alpha=0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\alpha^2-1\right)x^3+(\alpha+1)x^2+1}{\left(\alpha-\alpha^2\right)x^2+(\alpha+2)x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^3+x^2+1}{2x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^{\cancel{3}2}}{2\cancel{x}}=-\infty$,

αν $\alpha\neq\pm1, 0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\alpha^2-1\right)x^3+(\alpha+1)x^2+1}{\left(\alpha-\alpha^2\right)x^2+(\alpha+2)x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\alpha+1)\cancel{(\alpha-1)}x^{\cancel{3}}}{-\alpha\cancel{(\alpha-1)}\cancel{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{\alpha+1}{\alpha}x\right)=$

$$=\begin{cases}+\infty, & \alpha\in(-1,0)\\ -\infty, & \alpha\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)\end{cases}$$

3.250. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^{\rho}\dfrac{6x^2-7x+1}{2x^3+6x-2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x^{\rho+2}-7x^{\rho+1}+x^{\rho}}{2x^3+6x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x^{\rho+2}}{2x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}3x^{\rho-1}$.

Αν $\rho-1>0\Leftrightarrow\rho>1$, τότε:

Αν $\rho=2\kappa$, $\kappa\in\mathbb{N}^*$, είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}3x^{\rho-1}=+\infty$, ενώ αν $\rho=2\kappa+1$, $\kappa\in\mathbb{N}^*$, είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}3x^{\rho-1}=-\infty$.

Αν $\rho=1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}3x^{\rho-1}=3$, ενώ αν $\rho=0$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}3x^{\rho-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}3\dfrac{1}{x}=0$

3.251. $f(x)=\dfrac{2\left(\alpha^2+\alpha\right)x^3-\left(5\alpha^2+5\alpha-6\right)x^2+\left(\alpha^2+\alpha-7\right)x+2\alpha^2+2\alpha-5}{x^2-3x+2}$, $x\neq1,2$

Αν $\alpha\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\left(\alpha^2+\alpha\right)x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}}=+\infty$,

αν $\alpha\in(-1,0)$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\left(\alpha^2+\alpha\right)x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}}=-\infty$,

αν $\alpha=-1$ ή $\alpha=0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^2-7x-5}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=6$

3.252. Αν $\alpha\neq4$ και $\beta\neq-2$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\alpha-4)x^{\cancel{3}}}{(\beta+2)\cancel{x^2}}=\pm\infty$

Αν $\alpha=4$ και $\beta\neq-2$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-(8+4\beta)x^2+2x+1}{(\beta+2)x^2+6x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-(8+4\beta)+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{(\beta+2)+\frac{6}{x}-\frac{3}{x^2}}=-4$

Αν $\alpha=4$ και $\beta=-2$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{6x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{6x}=\dfrac{1}{3}$

3.253. Αν $\alpha\neq-1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\alpha+1)x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}}=\pm\infty$, άρα για να είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=4$ πρέπει $\alpha=-1$.

Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\beta x^2+4x+\alpha}{x^2-5x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\beta+\frac{4}{x}+\frac{\alpha}{x^2}}{1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}=\beta$, άρα $\beta=3$

3.254. $f(x)=\dfrac{(1-\alpha)x^2+(1-\alpha+\beta)x+2+\beta}{x+1}$, $x\neq-1$.

Αν $\alpha\neq1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(1-\alpha)x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}=\pm\infty$ ‘άρα για να είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=4$ πρέπει $\alpha=1$,

τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\beta x+2+\beta}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\beta+\frac{2+\beta}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\beta$, άρα $\beta=4$

3.255. $f(x)=\dfrac{\beta x^2+3}{\alpha x+2}-x+2=\dfrac{(\beta-\alpha)x^2+(2\alpha-2)x+7}{\alpha x+2}$

Αν $\beta\neq\alpha$ και $\alpha\neq0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\beta-\alpha)x^{\cancel{2}}}{\alpha\cancel{x}}=\pm\infty$

Αν $\beta\neq\alpha$ και $\alpha=0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\beta x^2}{2}=\pm\infty$

Αν $\beta=\alpha=0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x+7}{2}=-\infty$

Αν $\beta=\alpha\neq0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2\alpha-2)x+7}{\alpha x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2\alpha-2)+\frac{7}{x}}{\alpha+\frac{2}{x}}=\dfrac{2\alpha-2}{\alpha}$

Πρέπει $\dfrac{2\alpha-2}{\alpha}=4\Leftrightarrow\alpha=-1=\beta$

3.256. $f(x)=2x\left(\mu+\dfrac{x}{x^2-1}\right)=\dfrac{2\mu x^3+2x^2-2\mu x}{x^2-1}$, $x\neq\pm1$.

Αν $\mu\neq0$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2\mu x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}}=\pm\infty$,

αν $\mu=0$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=2$

3.257. α) $f(x)=\dfrac{4x^2+\lambda x+3}{4x+1}+\lambda x+\kappa=\dfrac{4(1+\lambda)x^2+2(\lambda+2\kappa)x+3+\kappa}{4x+1}$

Αν $\lambda\neq -1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{4}(1+\lambda)x^{\cancel{2}}}{\cancel{4}\cancel{x}}=\pm\infty$

Αν $\lambda=-1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2(-1+2\kappa)x+3+\kappa}{4x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2(-1+2\kappa)+\dfrac{3+\kappa}{x}}{4+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{-2+4\kappa}{4}$

β) $\dfrac{-2+4\kappa}{4}=3\Leftrightarrow\kappa=\dfrac{7}{2}$

3.258. $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma-\dfrac{x^3+2}{x^2+1}=\dfrac{\alpha x^4+(\beta-1)x^3+(\alpha+\gamma)x^2+\beta x+\gamma-2}{x^2+1}$

Αν $\alpha\neq 0$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\alpha x^{\cancel{4}2}}{\cancel{x^2}}=\pm\infty$, άρα για να είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$ πρέπει $\alpha=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\beta-1)x^3+\gamma x^2+\beta x+\gamma-2}{x^2+1}$ και αν $\beta\neq 1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\pm\infty$,

άρα πρέπει $\beta=1$. Τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\gamma x^2+\gamma-2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\gamma+\dfrac{\gamma-2}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=\gamma$, άρα $\gamma=2$.

3.259. $\lim\limits_{x\to-+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+\beta x-1}{2x^2+3x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+\alpha x^2-2}{2x^3+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x^3}}{2\cancel{x^3}}=\dfrac{1}{2}$,

άρα $\lambda=\dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+\alpha x^2-2}{2x^2+1}-\dfrac{1}{2}x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\alpha x^2-x-4}{4x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\alpha-\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{x^2}}{4+\dfrac{2}{x^2}}=\dfrac{\alpha}{2}$

$\dfrac{\alpha}{2}=1\Leftrightarrow\alpha=2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-\lambda x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+\beta x-1}{2x+3}-\dfrac{1}{2}x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2\beta-3)x-2}{4x+6}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2\beta-3)-\dfrac{2}{x}}{4+\dfrac{6}{x}}=\dfrac{2\beta-3}{4}$

$\dfrac{2\beta-3}{4}=1\Leftrightarrow\beta=\dfrac{7}{2}$.

3.260. α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{9x^2-6x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(9-\dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(|x|\cdot\sqrt{9-\dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{x^2}}\right)=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x\cdot\sqrt{9-\dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{x^2}}\right)=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{9-\dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{x^2}}=3$.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+5}{\sqrt{x^2+x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(3+\dfrac{5}{x}\right)}{\cancel{x}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}=3$

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x+2}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-x+2}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-1+\dfrac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=-2$

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{16x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+2}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^2+4}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}\sqrt[4]{16+\dfrac{3}{x^4}}-\cancel{x}\sqrt[5]{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^5}}}{\cancel{x}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\cancel{x}\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^3}}}=2$

3.261. α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-x+1}{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}-1+\dfrac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}=0$

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2-3x+4}}{x-\sqrt{x^2-3x+4}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(1-\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}}\right)}{\cancel{x}\left(1+\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}}\right)}=0$

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+5x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^{\cancel{3}\,2}\left(2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{-\cancel{x}\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}}=-\infty$

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x+7}+5x}{\sqrt{x^2-6x+8}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{7}{x^2}}+5\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1-\dfrac{6}{x}+\dfrac{8}{x^2}}+1\right)}=3$

3.262. α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(9+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}+3x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{9+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+3x\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{9+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+3\right)\right]=+\infty$

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+2x+1}+3x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\sqrt{9x^2+2x+1}+3x\right)\left(\sqrt{9x^2+2x+1}-3x\right)}{\sqrt{9x^2+2x+1}-3x}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{9x^2+2x+1-9x^2}{|x|\sqrt{9+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-3x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{-x\sqrt{9+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-3x}=$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{9+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}-3\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{-\sqrt{9+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}-3} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}+x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)\right] = +\infty$

δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3x}-2x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(-\sqrt{1-\frac{3}{x}}-2\right)\right] = +\infty$

ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+5}-2x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{4x^2}-3x+5-\cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2-3x+5}+2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(-3+\frac{5}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}+2\right)} = -\frac{3}{4}$

στ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-1}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-1}\right)} =$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}+2-\cancel{x^2}+1}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3}{-x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)} = 0$$

ζ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)} = 0$

η) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{x^2-2x+2}-x^2\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(x^2-2x+2\right)-x^4}{x\sqrt{x^2-2x+2}+x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^4}-2x^3+2x^2-\cancel{x^4}}{x^2\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+x^2} =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\cancel{3}}\left(-2+\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x^2}\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)} = -\infty$$

3.263. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt[3]{8x^3+2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}-x\sqrt[3]{8+\frac{2}{x^3}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}-\sqrt[3]{8+\frac{2}{x^3}}\right) = -\infty$

3.264. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{4x^2+3x+1}+\sqrt{x^2+5x+10}\right) =$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{4x^2+3x+1}+\sqrt{x^2+5x+10}-2x+x+x\right) =$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+x-2}+x\right)+\left(\sqrt{x^2+5x+10}+x\right)-\left(\sqrt{4x^2+3x+1}+2x\right)\right] =$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+x-2-x^2}{\sqrt{x^2+x-2}-x}+\frac{x^2+5x+10-x^2}{\sqrt{x^2+5x+10}-x}-\frac{4x^2+3x+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+3x+1}-2x}\right) =$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-2}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-x}+\frac{5x+10}{-x\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}-x}-\frac{3x+1}{-x\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-2x}\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\cancel{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-1\right)}+\frac{\cancel{x}\left(5+\frac{10}{x}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}-1\right)}-\frac{\cancel{x}\left(3+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-2\right)}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}+\frac{3}{4}=-\frac{9}{4}.$$

3.265. α) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{9x^2+2x}-4x+1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x+\sqrt{9x^2+2x}-3x+1\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}+x+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x+1}+x}+\frac{\cancel{9x^2}+2x-\cancel{9x^2}}{\sqrt{9x^2+2x}+3x}+1\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}+\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{9+\frac{2}{x}}+3\right)}+1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+1=\frac{11}{6}$$

β) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+2}+\sqrt{9x^2+1}-\sqrt{25x^2+x+1}\right)=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+2}-2x+\sqrt{9x^2+1}-3x-\sqrt{25x^2+x+1}+5x\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{4x^2}+2-\cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2+2}+2x}+\frac{\cancel{9x^2}+1-\cancel{9x^2}}{\sqrt{9x^2+1}+3x}-\frac{\cancel{25x^2}+x+1-\cancel{25x^2}}{\sqrt{25x^2+x+1}+5x}\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x\left(\sqrt{4+\frac{2}{x^2}}+2\right)}+\frac{1}{x\left(\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}+3\right)}-\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{25+1+\frac{1}{x^2}}+5\right)}\right)=0+0-\frac{1}{10}=-\frac{1}{10}$$

3.266. α) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+5}+\sqrt{9x^2+1}-4x+3\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+5}-x+\sqrt{9x^2+1}-3x+3\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}+x+5-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x+5}+x}+\frac{\cancel{9x^2}+1-\cancel{9x^2}}{\sqrt{9x^2+1}+3x}+3\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)}+\frac{1}{x\left(\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}+3\right)}+3\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+0+3=\frac{7}{2}$$

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{x^2+3}+x+5\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}+2x-\sqrt{x^2+3}-x+5\right)=$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\cancel{4x^2}+x+1-\cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2+x+1}-2x}-\frac{\cancel{x^2}+3-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+3}-x}+5\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-2\right)}-\frac{3}{x\left(-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-1\right)}+5\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}-0+5=\frac{19}{4}$$

3.267. α) $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+3}}-x\sqrt{2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\frac{x^2+\sqrt{x^4+3}-2x^2}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+3}}+x\sqrt{2}}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\frac{\sqrt{x^4+3}-x^2}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+3}}+x\sqrt{2}}=\lim_{x\to+\infty}x\frac{\cancel{x^4}+3-\cancel{x^4}}{\left(\sqrt{x^2+x^2\sqrt{1+\frac{3}{x^4}}}+x\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x^4+3}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{3}{x^4}}}+\sqrt{2}\right)x^2\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^4}}+1\right)}=0$$

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+x^2\sqrt{1+\frac{3}{x^4}}}-x\sqrt{2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(-x\sqrt{1+1\sqrt{1+\frac{3}{x^4}}}-x\sqrt{2}\right)=$

$$=\lim_{x\to-\infty}x^2\left(-\sqrt{1+1\sqrt{1+\frac{3}{x^4}}}-\sqrt{2}\right)=-\infty$$

3.268. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x^2-1}-\sqrt[5]{x^2}}{2x+\sqrt[3]{x+1}+7}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}+x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-x\sqrt[5]{\frac{1}{x^3}}}{2x+x\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}+7}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-\sqrt[5]{\frac{1}{x^3}}\right)}{\cancel{x}\left(2+\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}+\frac{7}{x}\right)}=\frac{1}{2}$

3.269. Εστω $\frac{f(x)}{\sqrt{9x^2+6x+3}-3x}=h(x)\Leftrightarrow f(x)=h(x)\left(\sqrt{9x^2+6x+3}-3x\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=2$,

$x\in(0,+\infty)$ και $\frac{g(x)}{\sqrt{x^2+2x+3}-x}=t(x)\Leftrightarrow g(x)=t(x)\left(\sqrt{x^2+2x+3}-x\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}t(x)=1$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)\left(\sqrt{9x^2+6x+3}-3x\right)}{t(x)\left(\sqrt{x^2+2x+3}-x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{h(x)}{t(x)}\cdot\frac{\cancel{9x^2}+6x+3-\cancel{9x^2}}{\sqrt{9x^2+6x+3}+3x}\cdot\frac{\sqrt{x^2+2x+3}+x}{\cancel{x^2}+2x+3-\cancel{x^2}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{h(x)}{t(x)}\cdot\frac{\cancel{x}\left(6+\frac{3}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{9+\frac{6}{x}+\frac{3}{x^2}}+3\right)}\cdot\frac{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)}{\cancel{x}\left(2+\frac{3}{x}\right)}\right]=2\cdot1\cdot1=2$$

3.270. α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\lambda x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\lambda\right)\right]$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\lambda\right)=1-\lambda$, οπότε:

Αν $\lambda>1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\lambda x\right)=-\infty$, αν $\lambda<1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\lambda x\right)=+\infty$.

Αν $\lambda=1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=0$

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}+\lambda x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+\lambda\right)\right]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+\lambda\right)=2+\lambda$, οπότε:

αν $\lambda>-2$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}+\lambda x\right)=+\infty$,

ενώ αν $\lambda<-2$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}+\lambda x\right)=-\infty$.

Αν $\lambda=2$, τότε: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}+2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\cancel{4x^2}-3x+2-\cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2-3x+2}-2x}=$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(-3+\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-2\right)}=\frac{3}{4}$$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-(\lambda+2)x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}-(\lambda+2)\right)\right]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}-(\lambda+2)\right)=-\lambda-1$, οπότε:

αν $\lambda<-1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-(\lambda+2)x\right)=+\infty$, ενώ

αν $\lambda>-1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-(\lambda+2)x\right)=-\infty$.

Αν $\lambda=-1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+2x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}=1$

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+2}-\lambda x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-\lambda\right)\right]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-\lambda\right)=2-\lambda$ οπότε: αν $\lambda>2$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+2}-\lambda x\right)=-\infty$,

ενώ αν $\lambda<2$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+2}-\lambda x\right)=+\infty$. Τέλος αν $\lambda=2$, τότε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+2}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{4x^2}+3x+2-\cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2+3x+2}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(3+\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+2\right)}=\frac{3}{4}$$

3.271. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\lambda x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-\lambda\right)\right]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-\lambda\right)=1-\lambda$, οπότε: αν $\lambda>1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$,

ενώ αν $\lambda<1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, άρα για να είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\in\mathbb{R}$ πρέπει $\lambda=1$.

Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x^2}+3-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+3}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+1\right)}=0$

3.272. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4+x^2}+\lambda x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}+\lambda\right)}{\cancel{x}}=1+\lambda=1\Leftrightarrow\lambda=0$

3.273. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+5}+\alpha x-\beta\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}+\alpha-\frac{\beta}{x}\right)\right]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}+\alpha-\frac{\beta}{x}\right)=-1+\alpha$, οπότε αν $\alpha>1$,

τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+5}+\alpha x-\beta\right)=-\infty$, ενώ αν $\alpha<1$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+5}+\alpha x-\beta\right)=+\infty$,

οπότε για να είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+5}+\alpha x-\beta\right)=4$ πρέπει $\alpha=1$. Τότε:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+5}+x-\beta\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}+x+5-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x+5}-x}-\beta\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}-1\right)}-\beta\right)=-\frac{1}{2}-\beta$$

Είναι $-\frac{1}{2}-\beta=4\Leftrightarrow\beta=-\frac{9}{2}$

3.274. Εστω $f(x)=\sqrt{x^2+5x+10}+\alpha x+\beta$, $x\in(0,+\infty)$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}+\alpha+\frac{\beta}{x}\right)\right]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}+\alpha+\frac{\beta}{x}\right)=1+\alpha$, οπότε

αν $\alpha>-1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, ενώ

αν $\alpha<-1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, άρα για να είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ πρέπει $\alpha=-1$.

Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+10}-x+\beta\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}+5x+10-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+5x+10}+x}+\beta\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x}\left(5+\frac{10}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}+1\right)}+\beta\right)=\frac{5}{2}+\beta=3\Leftrightarrow\beta=\frac{1}{2}$$

3.275. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x+x^2}+\lambda x-\mu\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\lambda-\frac{\mu}{x}\right)\right]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\lambda-\frac{\mu}{x}\right)=-2+\lambda$, οπότε

αν $\lambda>2$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x+x^2}+\lambda x-\mu\right)=-\infty$, ενώ

αν $\lambda<2$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x+x^2}+\lambda x-\mu\right)=+\infty$.

Άρα για να είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x+x^2}+\lambda x-\mu\right)=0$, πρέπει $\lambda=2$.

Τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x+x^2}+2x-\mu\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x^2}+x+\sqrt{x+x^2}+x-\mu\right)=$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}+\frac{x+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}}{\sqrt{x+x^2}-x}-\mu\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x\left(-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-1\right)}+\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(-\sqrt{\frac{1}{x}+1}-1\right)}-\mu\right)=-\frac{1}{2}-\mu$$

Είναι $-\frac{1}{2}-\mu=0\Leftrightarrow\mu=-\frac{1}{2}$.

3.276. **α)** Αν $\lambda=1$ τότε $f(x)=\sqrt{x}$ και $A_f=[0,+\infty)\neq\mathbb{R}$. Άρα $\lambda\neq 1$.

Πρέπει $\Delta\le 0\Leftrightarrow 1-4(\lambda-1)^2\le 0\Leftrightarrow(3-2\lambda)(2\lambda-1)\le 0\Leftrightarrow\lambda\le\frac{1}{2}$ ή $\lambda\ge\frac{3}{2}$

και $\lambda-1>0\Leftrightarrow\lambda>1$, άρα $\lambda\ge\frac{3}{2}$.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{(\lambda-1)x^2+x+\lambda-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{(\lambda-1)+\frac{1}{x}+\frac{\lambda-1}{x^2}}\right)=+\infty$

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{(\lambda-1)+\frac{1}{x}+\frac{\lambda-1}{x^2}}=\lambda-1>0$.

3.277. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}+\alpha x+\beta\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+\alpha+\frac{\beta}{x}\right)\right]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+\alpha+\frac{\beta}{x}\right)=1+\alpha$, οπότε αν $\alpha>-1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,

ενώ αν $\alpha<-1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, άρα για να είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=5$ πρέπει $\alpha=-1$.

Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}-x+\beta\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}+x+2-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x+2}+x}+\beta\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)}+\beta\right)=\frac{1}{2}+\beta.$$

Είναι $\frac{1}{2}+\beta=5\Leftrightarrow\beta=\frac{9}{2}$

3.278. Είναι $g(x)=x\sqrt{9+\frac{1}{x}}+x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-\kappa x-\lambda=x\left(\sqrt{9+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-\kappa-\frac{\lambda}{x}\right)$, $x>0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-\kappa-\frac{\lambda}{x}\right)=4-\kappa$.

- Αν $4-\kappa>0\Leftrightarrow\kappa<4$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.
- Αν $4-\kappa<0\Leftrightarrow\kappa>4$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$.

Επειδή είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\frac{5}{6}\in\mathbb{R}$ πρέπει $4-\kappa=0\Leftrightarrow\kappa=4$.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+x}+\sqrt{x^2+3}-4x+\lambda\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+x}-3x+\sqrt{x^2+3}-x+\lambda\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{9x^2}+x-\cancel{9x^2}}{\sqrt{9x^2+x}+3x}+\frac{\cancel{x^2}+3-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+3}+x}+\lambda\right)=$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{9+\frac{1}{x}}+3\right)}+\frac{3}{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+1\right)}+\lambda\right]=$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{9+\frac{1}{x}}+3}+\frac{3}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+1}+\lambda\right]=\frac{1}{6}+\lambda .$$

Πρέπει $\frac{1}{6}+\lambda=-\frac{5}{6}\Leftrightarrow\lambda=-1$.

3.279. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+\kappa x-1}-\sqrt{\lambda x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1+\frac{\kappa}{x}-\frac{1}{x^2}}-\sqrt{\lambda+\frac{1}{x^2}}\right)\right]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{\kappa}{x}-\frac{1}{x^2}}-\sqrt{\lambda+\frac{1}{x^2}}\right)=1-\sqrt{\lambda}$, οπότε αν $\lambda>1$, τότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+\kappa x-1}-\sqrt{\lambda x^2+1}\right)=-\infty$, ενώ αν $\lambda<1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+\kappa x-1}-\sqrt{\lambda x^2+1}\right)=+\infty$.

Άρα για να είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+\kappa x-1}-\sqrt{\lambda x^2+1}\right)=3$ πρέπει $\lambda=1$.

Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+\kappa x-1}-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+\kappa x-\cancel{1}-\cancel{x^2}-\cancel{1}}{\sqrt{x^2+\kappa x-1}+\sqrt{x^2+1}}=$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\kappa\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{\kappa}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}=\frac{\kappa}{2}.$$ Είναι $\frac{\kappa}{2}=3\Leftrightarrow\kappa=6$.

3.280. α) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-(\eta\mu\alpha)x+\sigma\upsilon\nu2\beta\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\eta\mu\alpha+\frac{\sigma\upsilon\nu2\beta}{x}\right)$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\eta\mu\alpha+\frac{\sigma\upsilon\nu2\beta}{x}\right)=1-\eta\mu\alpha$.

Αν $\eta\mu\alpha<1\Leftrightarrow\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},2\pi\right)$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Αν $\eta\mu\alpha=1\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{2}$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x+\sigma\upsilon\nu2\beta\right)=$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}+x}+\sigma\upsilon\nu2\beta\right)=$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}+\sigma\upsilon\nu2\beta\right)=\sigma\upsilon\nu2\beta$$

β) $\sigma\upsilon\nu 2\beta = -\frac{1}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow 2\beta = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \beta = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

3.281. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{2+\frac{2}{x}} - 2\sigma\upsilon\nu\varphi - \frac{\eta\mu\omega}{x}\right)\right]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2+\frac{2}{x}} - 2\sigma\upsilon\nu\varphi - \frac{\eta\mu\omega}{x}\right) = \sqrt{2} - 2\sigma\upsilon\nu\varphi$, οπότε

αν $\sqrt{2} - 2\sigma\upsilon\nu\varphi > 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi < \frac{\sqrt{2}}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \varphi \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, ενώ

αν $\sqrt{2} - 2\sigma\upsilon\nu\varphi < 0 \Leftrightarrow \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Άρα για να είναι τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ πρέπει $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+2x} - \sqrt{2}x - \eta\mu\omega\right) =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{2x^2} + 2x - \cancel{2x^2}}{\sqrt{2x^2+2x} + \sqrt{2}x} - \eta\mu\omega\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{2+\frac{2}{x}} + \sqrt{2}\right)} - \eta\mu\omega\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \eta\mu\omega$$

άρα $\frac{\sqrt{2}}{2} - \eta\mu\omega = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{6}$

3.282. Για να ορίζεται στο $\mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x)$ θα πρέπει $4x^2 + \alpha x + \beta \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 16\beta \leq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 \leq 16\beta$ (1).

Είναι $f(x) = x\sqrt{4+\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x^2}} + \gamma x = x\left(\sqrt{4+\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x^2}} + \gamma\right)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4+\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x^2}} + \gamma\right) = 2+\gamma$.

- Αν $2+\gamma > 0 \Leftrightarrow \gamma > -2$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- Αν $2+\gamma < 0 \Leftrightarrow \gamma < -2$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Επειδή θέλουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ πρέπει $2+\gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = -2$ και η $f(x)$ γίνεται:

$$f(x) = \sqrt{4x^2+\alpha x+\beta} - 2x = \frac{4x^2+\alpha x+\beta-4x^2}{\sqrt{4x^2+\alpha x+\beta}+2x} = \frac{x\left(\alpha+\frac{\beta}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4+\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x^2}}+2\right)}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha+\frac{\beta}{x}}{\sqrt{4+\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x^2}}+2} = \frac{\alpha}{4}.$$

Άρα $\frac{\alpha}{4}=6 \Leftrightarrow \alpha=24$ και από την (1) είναι $16\beta \geq 24^2 \Leftrightarrow 16\beta \geq 576 \Leftrightarrow \beta \geq 36$.

Τελικά είναι $\alpha=24$, $\gamma=-2$ και $\beta \geq 36$.

3.283. Εστω $f(x)=\sqrt{x^4+4x^2+3}-\alpha x^2+\beta x-\gamma$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\sqrt{1+\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^4}}-\alpha+\frac{\beta}{x}-\frac{\gamma}{x^2}\right)\right].$$

Είναι $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^4}}-\alpha+\frac{\beta}{x}-\frac{\gamma}{x^2}\right)=1-\alpha$, οπότε

αν $\alpha>1$, τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, ενώ αν $\alpha<1$, τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Οπότε για να είναι $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-3$ πρέπει $\alpha=1$. Τότε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x^4}+4x^2+3-\cancel{x^4}}{\sqrt{x^4+4x^2+3}+x^2}+\beta x-\gamma\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}\left(4+\frac{3}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(\sqrt{1+\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^4}}+1\right)}+\beta x-\gamma\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{1}{x}\frac{4+\frac{3}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^4}}+1}+\beta-\frac{\gamma}{x}\right)\right].$$

Είναι $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\frac{4+\frac{3}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^4}}+1}+\beta-\frac{\gamma}{x}\right)=\beta$, οπότε

αν $\beta>0$, τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, ενώ αν $\beta<0$, τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

Άρα για να είναι $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-3$ πρέπει $\beta=0$.

Τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+4x^2+3}-x^2-\gamma\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x^4}+4x^2+3-\cancel{x^4}}{\sqrt{x^4+4x^2+3}+x^2}-\gamma\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}\left(4+\frac{3}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(\sqrt{1+\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^4}}+1\right)}-\gamma\right)=2-\gamma.$$

Είναι $2-\gamma=-3 \Leftrightarrow \gamma=5$

3.284. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\sqrt{9-\frac{24}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{5}{x^4}}+\alpha+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x^2}\right)\right].$

Είναι $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9-\frac{24}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{5}{x^4}}+\alpha+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x^2}\right)=3+\alpha$, οπότε αν $\alpha > -3$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, ενώ αν $\alpha < -3$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$,

άρα για να είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{7}{3}$ πρέπει $\alpha = -3$.

Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^4-24x^3+6x^2+5}-3x^2+\beta x+\gamma\right) =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{9x^4}-24x^3+6x^2+5-\cancel{9x^4}}{\sqrt{9x^4-24x^3+6x^2+5}+3x^2}+\beta x+\gamma\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{-24+\frac{6}{x}+\frac{5}{x^3}}{\sqrt{9-\frac{24}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{5}{x^4}}+3}+\beta+\frac{\gamma}{x}\right)\right]$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-24+\frac{6}{x}+\frac{5}{x^3}}{\sqrt{9-\frac{24}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{5}{x^4}}+3}+\beta+\frac{\gamma}{x}\right) = -4+\beta$, οπότε αν $-4+\beta\neq 0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$

άρα πρέπει $\beta = 4$. Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^4-24x^3+6x^2+5}-3x^2+4x+\gamma\right) =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{9x^4-24x^3+6x^2+5-\left(3x^2-4x\right)^2}{\sqrt{9x^4-24x^3+6x^2+5}+3x^2-4x}+\gamma\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{9x^4}-\cancel{24x^3}+6x^2+5-\cancel{9x^4}+\cancel{24x^3}-16x^2}{\sqrt{9x^4-24x^3+6x^2+5}+3x^2-4x}+\gamma\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}\left(\frac{5}{x^2}-10\right)}{\cancel{x^2}\left(\sqrt{9-\frac{24}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{5}{x^4}}+3-\frac{4}{x}\right)}+\gamma\right) = -\frac{5}{3}+\gamma.$$

Είναι $-\frac{5}{3}+\gamma = \frac{7}{3} \Leftrightarrow \gamma = 4$

3.285. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\lambda+\frac{5}{x^2}-\sqrt{1+\frac{9}{x^4}}\right)\right]$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\lambda+\frac{5}{x^2}-\sqrt{1+\frac{9}{x^4}}\right) = \lambda-1$, οπότε

αν $\lambda > 1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, ενώ αν $\lambda < 1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Αν $\lambda = 1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+5-\sqrt{x^4+9}\right) =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x^4}-\cancel{x^4}-9}{x^2+\sqrt{x^4+9}}+5\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-9}{x^2\left(1+\sqrt{1+\frac{9}{x^4}}\right)}+5\right) = 5$$

3.286. α) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\eta\mu x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1+\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)$.

Για $x\in(0,+\infty)$, έχουμε: $\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|=\dfrac{|\eta\mu x|}{|x|}\le\dfrac{1}{|x|}=\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{x}\le\dfrac{\eta\mu x}{x}\le\dfrac{1}{x}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$.

Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1+\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=1+0=1$.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sigma\upsilon\nu x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(1+\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right)\right]=+\infty$ γιατί $-1\le\sigma\upsilon\nu x\le1\overset{x>0}{\Leftrightarrow}-\dfrac{1}{x}\le\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\le\dfrac{1}{x}$

και επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$

γ) $-1\le\eta\mu2x\le1\overset{x>0}{\Leftrightarrow}-\dfrac{1}{x}\le\dfrac{\eta\mu2x}{x}\le\dfrac{1}{x}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu2x}{x}=0$

δ) Θέτουμε $\dfrac{1}{x}=u$. Όταν $x\to-\infty$ τότε $u\to0$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{x+2}=\lim_{u\to0}\frac{\frac{1}{u^2}\eta\mu u}{\frac{1}{u}+2}=\lim_{u\to0}\left(\frac{1}{2u+1}\frac{\eta\mu u}{u}\right)=1$$

ε) Θέτουμε $\dfrac{x-4}{x^2+2}=u$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-4}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}=0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\eta\mu\dfrac{x-4}{x^2+2}=\lim\limits_{u\to0}\eta\mu u=0$

στ) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\eta\mu x}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{x}{x}-\frac{\eta\mu x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\frac{\eta\mu x}{x}}{1+\frac{1}{x}}$

Όταν $x\in(-\infty,0)$ είναι $\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|=\dfrac{|\eta\mu x|}{|x|}\le\dfrac{1}{-x}=-\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}\le\dfrac{\eta\mu x}{x}\le-\dfrac{1}{x}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$, από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$.

Τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\frac{\eta\mu x}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\dfrac{1-0}{1+0}=1$.

3.287. α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+\eta\mu x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(2+\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)\right]=+\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$ από Κ.Π.

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^2-3}{4x}-\sigma\upsilon\nu x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(\dfrac{2-\frac{3}{x^2}}{4}-\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right)\right]=-\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$ από Κ.Π.

γ) $-1\le \eta\mu x\le 1 \Leftrightarrow -1\le -\eta\mu x\le 1 \Leftrightarrow 1\le 2-\eta\mu x\le 3 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \dfrac{x^2}{x+1}\le \dfrac{x^2}{x+1}(2-\eta\mu x)\le \dfrac{3x^2}{x+1}$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x+1}=+\infty$, είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2(2-\eta\mu x)}{x+1}=+\infty$

3.288. **α)** $-1\le \sigma\upsilon\nu x\le 1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} -\dfrac{x}{x^2+2}\le \dfrac{x\sigma\upsilon\nu x}{x^2+2}\le \dfrac{x}{x^2+2}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2+2}=0$ είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x}{x^2+2}=0$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x\eta\mu x}{x+\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\cancel{2}}\left(1+\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right)}=+\infty$,

αφού από Κ.Π. είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$

γ) Θέτουμε $\dfrac{1}{x}=u$. Όταν $x\to+\infty$, τότε $u\to0^+$, οπότε $\lim\limits_{u\to0^+}u^2\eta\mu u=0$

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+\eta\mu x)\eta\mu\dfrac{1}{x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}+\eta\mu x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=1$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)\underset{u\to0}{\overset{\frac{1}{x}=u}{=}}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\eta\mu x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)\underset{u\to0^+}{\overset{\frac{1}{x}=u}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\eta\mu u\eta\mu\dfrac{1}{u}=0$

γιατί $-1\le\eta\mu\dfrac{1}{u}\le1 \overset{u\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} -\eta\mu u\le\eta\mu u\eta\mu\dfrac{1}{u}\le\eta\mu u$ και από ΚΠ είναι $\lim\limits_{u\to0}\eta\mu u\eta\mu\dfrac{1}{u}=0$.

ε) $-1\le\sigma\upsilon\nu x\le1\Leftrightarrow 1\le 2+\sigma\upsilon\nu x\le 3\Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\le\dfrac{1}{2+\sigma\upsilon\nu x}\le 1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \dfrac{x+3}{3}\le\dfrac{x+3}{2+\sigma\upsilon\nu x}\le x+3$

Από Κ.Π. είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{2+\sigma\upsilon\nu x}=+\infty$

στ) Είναι $-1\le\sigma\upsilon\nu x\le1$, $-1\le\eta\mu x\le1$,

άρα $-2\le\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\le 2\Leftrightarrow 1\le 3+\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\le 5\Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{5}\le\dfrac{1}{3+\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}\le 1 \overset{x>10}{\Leftrightarrow} \dfrac{x^2+2x-1}{5}\le\dfrac{x^2+2x-1}{3+\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}\le x^2+2x-1.$

Από ΚΠ είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x-1}{3+\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}=+\infty$

3.289. **α)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\eta\mu\dfrac{1}{x}\underset{u\to0^+}{\overset{\frac{1}{x}=u}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\left(\dfrac{1}{u}+1\right)\eta\mu u=\lim\limits_{u\to0^+}\left[(u+1)\dfrac{\eta\mu u}{u}\right]=1$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\eta\mu\dfrac{1}{x}\underset{u\to0^+}{\overset{\frac{1}{x}=u}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{1}{\sqrt{u}}\eta\mu u=\lim\limits_{u\to0^+}\left(\sqrt{u}\dfrac{\eta\mu u}{u}\right)=0$

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^4\eta\mu\dfrac{1}{x}\underset{u\to0^-}{\overset{\frac{1}{x}=u}{=}}\lim\limits_{u\to0^-}\dfrac{\eta\mu u}{u^4}=\lim\limits_{u\to0^-}\left(\dfrac{1}{u^3}\dfrac{\eta\mu u}{u}\right)=-\infty$

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x-x^4\eta\mu\frac{1}{x}}{2x+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4-x^3\eta\mu\frac{1}{x}}{2+\frac{5}{x}}=-\infty$,

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\eta\mu\dfrac{1}{x}\overset{\frac{1}{x}=u}{\underset{u\to0^+}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{\eta\mu u}{u^3}=\lim\limits_{u\to0^+}\left(\dfrac{1}{u^2}\dfrac{\eta\mu u}{u}\right)=+\infty$

ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\eta\mu\dfrac{1}{x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)\right)=$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)\right)=0,$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}x\eta\mu\dfrac{1}{x}\overset{\frac{1}{x}=u}{\underset{u\to0^+}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$

στ) Για κάθε $x>0$ είναι $x=|x|$, οπότε:

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{|x|-|\eta\mu x|}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x-|\eta\mu x|}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{|\eta\mu x|}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\frac{1}{x}}{1-\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|}=+\infty,$$

αφού για κάθε $x>0$ είναι $\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|=\dfrac{|\eta\mu x|}{x}\le\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{x}\le\dfrac{\eta\mu x}{x}\le\dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)$,

άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$

3.290. α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+2}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\cancel{2}}\eta\mu\frac{1}{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+1}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)\right]=\dfrac{1}{2}$,

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}x\eta\mu\dfrac{1}{x}\overset{\frac{1}{x}=u}{\underset{u\to0^+}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\eta\mu\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x}\eta\mu\frac{1}{x}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)}{\cancel{x^2}+\cancel{x}-\cancel{x^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\eta\mu\dfrac{1}{x}\left(-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}-1\right)\right]=-2$

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}{\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{x}}$. Εστω $\dfrac{1}{x}=\omega\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\omega}$.

Όταν $x \to +\infty$, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} \omega = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, οπότε: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{\omega\to 0} \frac{\eta\mu\omega}{\omega} = 1.$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}. \text{ Άρα } \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}{\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

3.291. α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x\eta\mu x+2}{x\sqrt{x^2-9}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(1-2\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}} = 1$, γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x} = 0$ από Κ.Π.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-10x\eta\mu x-5\sigma\upsilon\nu 2x}{x^4+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(1-10\frac{\eta\mu x}{x}-5\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(x^2+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)} = 0$, γιατί από Κ.Π

προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{x} = 0$

3.292. α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}\eta\mu x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\eta\mu x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\frac{\eta\mu x}{x}\right) = 0$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x}{x^5-4x^3+7x+3}\sigma\upsilon\nu x = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^{\cancel{5}3}\left(1-\frac{4}{x^2}+\frac{7}{x^4}+\frac{3}{x^5}\right)}\sigma\upsilon\nu x =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{x^2}+\frac{7}{x^4}+\frac{3}{x^5}}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right) = 0\cdot 1\cdot 0 = 0$$

γ) Εστω $f(x)=\dfrac{(x+1)\eta\mu 2x}{x^4+3x^2+2}$, $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $|f(x)|=\left|\dfrac{(x+1)\eta\mu 2x}{x^4+3x^2+2}\right|=\dfrac{|x+1|}{x^4+3x^2+2}\cdot|\eta\mu 2x|\le\dfrac{|x+1|}{x^4+3x^2+2}\cdot 1$

Για $x\in(-\infty,-1)$ είναι: $|f(x)|\le-\dfrac{x+1}{x^4+3x^2+2}\Leftrightarrow\dfrac{x+1}{x^4+3x^2+2}\le f(x)\le-\dfrac{x+1}{x^4+3x^2+2}$

Είναι: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{x^4+3x^2+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{x+1}{x^4+3x^2+2}\right)=0$,

άρα και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}{x^3-3x+4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3\dfrac{\eta\mu x}{x}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}}{1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}}=0$.

$-1\le\eta\mu x\le 1\overset{x<0}{\Leftrightarrow}\dfrac{1}{x}\le\dfrac{\eta\mu x}{x}\le-\dfrac{1}{x}$ και από Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$ και

$-1\le\sigma\upsilon\nu x\le 1\overset{x<0}{\Leftrightarrow}-\dfrac{1}{x^2}\le\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\le\dfrac{1}{x^2}$ και με Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}=0$

ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2-4x\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}+2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(3-4\dfrac{1}{x}\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)\right]=+\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\overset{\frac{1}{x}=u}{=}\lim\limits_{u\to0}u\sigma\upsilon\nu u=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^2}=0$.

στ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5+\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2x}{x}-2\dfrac{\eta\mu x}{x}}{4+\dfrac{\eta\mu x}{x}}=\dfrac{5}{4}$ γιατί

$-1\le\eta\mu x\le 1\overset{x<0}{\Leftrightarrow}\dfrac{1}{x}\le\dfrac{\eta\mu x}{x}\le-\dfrac{1}{x}$ και από Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$ και

$0\le\sigma\upsilon\nu^2x\le 1\overset{x<0}{\Leftrightarrow}\dfrac{1}{x}\le\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2x}{x}\le 0$ και με Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2x}{x}=0$

3.293. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+3\eta\mu^\nu x}{3x^3+\eta\mu^\nu x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x^3}\left(1+3\dfrac{\eta\mu^\nu x}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(3+\dfrac{\eta\mu^\nu x}{x^3}\right)}=\dfrac{1}{3}$,

αφού $\left|\dfrac{\eta\mu^\nu x}{x^3}\right|\le\dfrac{1}{|x^3|}\overset{x<0}{=}-\dfrac{1}{x^3}\Leftrightarrow\dfrac{1}{x^3}\le\dfrac{\eta\mu^\nu x}{x^3}\le-\dfrac{1}{x^3}$

και επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x^3}\right)=0$ είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu^\nu x}{x^3}=0$

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3+3\eta\mu^\nu x}{3x^3+\eta\mu^\nu x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cancel{x^3}\left(1+3\dfrac{\eta\mu^\nu x}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(3+\dfrac{\eta\mu^\nu x}{x^3}\right)}$.

Αν $\nu=3$, τότε $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$, αν $\nu>3$ τότε $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\frac{1}{3}$, ενώ

αν $\nu=1$, τότε $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3+3\eta\mu x}{3x^3+\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cancel{x}\left(x^2+3\frac{\eta\mu x}{x}\right)}{\cancel{x}\left(3x^2+\frac{\eta\mu x}{x}\right)}=3$ και όμοια

αν $\nu=2$, είναι $\lim\limits_{x\to0}f(x)=3$.

3.294. $\left|\eta\mu x\cdot\ln\frac{2^{-x}+e}{e^{-x}+e}\right|=|\eta\mu x|\left|\ln\frac{2^{-x}+e}{e^{-x}+e}\right|\le\left|\ln\frac{2^{-x}+e}{e^{-x}+e}\right|\Leftrightarrow-\ln\frac{2^{-x}+e}{e^{-x}+e}\le\eta\mu x\cdot\ln\frac{2^{-x}+e}{e^{-x}+e}\le\ln\frac{2^{-x}+e}{e^{-x}+e}\quad(1)$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}2^{-x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^{-x}+e}{e^{-x}+e}=1$.

Θέτουμε $\frac{2^{-x}+e}{e^{-x}+e}=u$, με $\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^{-x}+e}{e^{-x}+e}=1$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{2^{-x}+e}{e^{-x}+e}=\lim\limits_{u\to1}\ln u=0$

Από το κριτήριο παρεμβολής στην (1), προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\eta\mu x\cdot\ln\frac{2^{-x}+e}{e^{-x}+e}\right)=0$

3.295. $0\le x^4f^4(x)\le x^2|g(x)|+x^4f^4(x)\le|\eta\mu x|\le1\overset{x>0}{\Leftrightarrow}0\le f^4(x)\le\frac{1}{x^4}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^4}=0$ είναι και

$\lim\limits_{x\to+\infty}f^4(x)=0$ $-\sqrt[4]{f^4(x)}\le-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|=\sqrt[4]{f^4(x)}$ και από Κ.Π. είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

$0\le x^2|g(x)|\le x^2|g(x)|+x^4f^4(x)\le|\eta\mu x|\le1\overset{x>0}{\Leftrightarrow}0\le|g(x)|\le\frac{1}{x^2}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ είναι και

$\lim\limits_{x\to+\infty}|g(x)|=0$. Επειδή $-|g(x)|\le g(x)\le|g(x)|$, από Κ.Π. είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$.

3.296. Εστω $\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}=g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)\sigma\upsilon\nu x$, $\sigma\upsilon\nu x\ne0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)\sigma\upsilon\nu x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right)=0$, γιατί από ΚΠ είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda\sigma\upsilon\nu x)\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)\sigma\upsilon\nu x-\lambda\sigma\upsilon\nu x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sigma\upsilon\nu x(g(x)-\lambda)\right]=0$,

γιατί $|\sigma\upsilon\nu x(g(x)-\lambda)|\le|g(x)-\lambda|\Leftrightarrow-|g(x)-\lambda|\le\sigma\upsilon\nu x(g(x)-\lambda)\le|g(x)-\lambda|$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}|g(x)-\lambda|=0$.

3.297. **α)** Πρέπει $x+1\ge0\Leftrightarrow x\ge-1$ και $x\ne0$, άρα $A_f=[-1,0)\cup(0,+\infty)$.

β) i. $-1\le\eta\mu\frac{1}{x}\le1\overset{x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow}-x\le x\eta\mu\frac{1}{x}\le x$ και από ΚΠ είναι $\lim\limits_{x\to0^+}x\eta\mu\frac{1}{x}=0$

$-1\le\eta\mu\frac{1}{x}\le1\overset{x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)}{\Leftrightarrow}x\le x\eta\mu\frac{1}{x}\le-x$ και από ΚΠ είναι $\lim\limits_{x\to0^-}x\eta\mu\frac{1}{x}=0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to0}x\eta\mu\frac{1}{x}=0$

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)\overset{\frac{1}{x}=u}{\underset{u\to 0}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}\cdot f(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+x}-\lambda\sqrt{x}\right)\eta\mu\frac{1}{x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\lambda\frac{1}{\sqrt{x}}\right)x\eta\mu\frac{1}{x}\right]=1$

3.298. α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{2x}-4\cdot 3^x+3}{3^{2x}+2\cdot 3^x-3}\overset{3^x=u}{\underset{u\to 1}{=}}\lim\limits_{u\to 1}\frac{u^2-4u+3}{u^2+2u-3}=\lim\limits_{u\to 1}\frac{\cancel{(u-1)}(u-3)}{\cancel{(u-1)}(u+3)}=-\frac{1}{2}$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{2x+1}-2^x-1}{3\cdot 4^x-2^{x+2}+1}\overset{2^x=u}{\underset{u\to 1}{=}}\lim\limits_{u\to 1}\frac{2u^2-u-1}{3u^2-4u+1}=\lim\limits_{u\to 1}\frac{\cancel{(u-1)}(2u+1)}{\cancel{(u-1)}(3u-1)}=\frac{3}{2}$

γ) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{4^{2x}-5\cdot 4^x+4}{4^{2x+1}-2\cdot 4^{x+1}-32}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{4^{2x}-5\cdot 4^x+4}{4\cdot 4^{2x}-2\cdot 4\cdot 4^x-32}$.

Θέτουμε $4^x=u$, οπότε αφού $x\to 1$, τότε $u\to 4$ και είναι:

$\lim\limits_{u\to 4}\frac{(u-1)(u-4)}{4(u-4)(u+2)}=\lim\limits_{u\to 4}\frac{u-1}{4(u+2)}=\frac{1}{8}$.

3.299. α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x+3^{x+1}}{2^{x+1}+3^{x+3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{3^x}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x+3\right)}{\cancel{3^x}\left(2\left(\frac{2}{3}\right)^x+27\right)}=\frac{1}{9}$

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4e^{x+1}-6\cdot 2^x}{e^x-2^{x+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4e\cdot e^x-6\cdot 2^x}{e^x-2\cdot 2^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\cancel{2^x}\left[4e\left(\frac{e}{2}\right)^x-6\right]}{\cancel{2^x}\left[\left(\frac{e}{2}\right)^x-2\right]}=\frac{4e\cdot 0-6}{0-2}=3$

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5^x-2^{x+1}}{3\cdot 5^{x+1}+2^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\cancel{2^x}\left(\left(\frac{5}{2}\right)^x-2\right)}{\cancel{2^x}\left(15\left(\frac{5}{2}\right)^x+1\right)}=-2$

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x+2}-2^{x+1}+3}{e^x+2^{x+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{e^x}\left(e^2-2\left(\frac{2}{e}\right)^x+\frac{3}{e^x}\right)}{\cancel{e^x}\left(1+4\left(\frac{2}{e}\right)^x\right)}=e^2$

ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^{2x+1}-2^x-1}{3\cdot 4^x-2^{x+2}+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{4^x}\left(2-\frac{1}{2^x}-\frac{1}{4^x}\right)}{\cancel{4^x}\left(3-4\frac{1}{2^x}+\frac{1}{4^x}\right)}=\frac{2}{3}$

στ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4\cdot 2^{x+1}-2\cdot 5^x+3}{e^{x+2}+4^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^x\left(8-2\left(\frac{5}{2}\right)^x+\frac{3}{2^x}\right)}{e^x\left(e^2+\left(\frac{4}{e}\right)^x\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{2}{e}\right)^x\dfrac{8-2\left(\frac{5}{2}\right)^x+\frac{3}{2^x}}{e^2+\left(\frac{4}{e}\right)^x}\right]=+\infty$

ζ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^{3x+1}-5^{3x+2}}{3^{2x+1}+2^{3x+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\cdot 8^x-25\cdot 125^x}{3\cdot 9^x+4\cdot 8^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{125^x\left(2\cdot\left(\frac{8}{125}\right)^x-25\right)}{9^x\left(3+4\left(\frac{8}{9}\right)^x\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{125}{9}\right)^x\dfrac{\left(2\cdot\left(\frac{8}{125}\right)^x-25\right)}{\left(3+4\left(\frac{8}{9}\right)^x\right)}\right]=-\infty$

η) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4^x-3^{x+1}+2}{4^{x+2}-5\cdot 3^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{4^x}\left[1-3\left(\frac{3}{4}\right)^x+\frac{2}{4^x}\right]}{\cancel{4^x}\left[16-5\left(\frac{3}{4}\right)^x+\frac{1}{4^x}\right]}=\dfrac{1-3\cdot 0+2\cdot 0}{16-5\cdot 0+0}=\dfrac{1}{16}$

3.300. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{\sqrt{x+2}}+e^{\sqrt{x-2}}-2e^{\sqrt{x}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{\sqrt{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}}+e^{\sqrt{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}}-2e^{\sqrt{x}}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{2}{x}}}+e^{\sqrt{x}\sqrt{1-\frac{2}{x}}}-e^{\sqrt{x}}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{\sqrt{x}}\left(e^{\sqrt{1+\frac{2}{x}}}+e^{\sqrt{1-\frac{2}{x}}}-2\right)\right]=+\infty$,

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\sqrt{x}}=\lim\limits_{u\to+\infty}e^u\overset{\sqrt{x}=u}{=}+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{\sqrt{1+\frac{2}{x}}}+e^{\sqrt{1-\frac{2}{x}}}-2\right)=2e-2$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

3.301. Αν $0<\lambda<3$, τότε: $f(x)=\dfrac{3^x\left[\lambda^3\left(\frac{\lambda}{3}\right)^x-1+\frac{5}{3^x}\right]}{3^x\left[\left(\frac{\lambda}{3}\right)^x+1-\frac{8}{3^x}\right]}=\dfrac{\lambda^3\left(\frac{\lambda}{3}\right)^x-1+\frac{5}{3^x}}{\left(\frac{\lambda}{3}\right)^x+1-\frac{8}{3^x}}$

Επειδή $\dfrac{\lambda}{3}<1$ είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\lambda}{3}\right)^x=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{\lambda^3\cdot 0-1+0}{0+1-8\cdot 0}=-1\neq 64$.

Αν $\lambda=3$, τότε: $f(x)=\dfrac{3^3\cdot 3^x-3^x+5}{3^x+3^x-8}=\dfrac{26\cdot 3^x+5}{2\cdot 3^x-8}=\dfrac{3^x\left(26+\dfrac{5}{3^x}\right)}{3^x\left(2-\dfrac{8}{3^x}\right)}= =\dfrac{26+\dfrac{5}{3^x}}{2-\dfrac{8}{3^x}}$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{26+\dfrac{5}{3^x}}{2-\dfrac{8}{3^x}}=\dfrac{26+0}{2-0}=13\neq 64$.

Αν $\lambda>3$, τότε: $f(x)=\dfrac{\lambda^x\left[\lambda^3-\left(\dfrac{3}{\lambda}\right)^x+\dfrac{5}{\lambda^x}\right]}{\lambda^x\left[1+\left(\dfrac{3}{\lambda}\right)^x-\dfrac{8}{\lambda^x}\right]}=\dfrac{\lambda^3-\left(\dfrac{3}{\lambda}\right)^x+\dfrac{5}{\lambda^x}}{1+\left(\dfrac{3}{\lambda}\right)^x-\dfrac{8}{\lambda^x}}$

Επειδή $\lambda>3$ είναι: $\dfrac{3}{\lambda}<1$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{\lambda}\right)^x=0$, άρα: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\lambda^3-\left(\dfrac{3}{\lambda}\right)^x+\dfrac{5}{\lambda^x}}{1+\left(\dfrac{3}{\lambda}\right)^x-\dfrac{8}{\lambda^x}}=\lambda^3$.

Πρέπει $\lambda^3=64\Leftrightarrow\lambda=4$.

3.302. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\lambda^x\cdot\lambda-2^x+3}{\lambda^x+4\cdot 2^x-1}$.

Αν $\lambda>2$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{\lambda^x}\left(\lambda-\left(\dfrac{2}{\lambda}\right)^x+\dfrac{3}{\lambda^x}\right)}{\cancel{\lambda^x}\left(1+4\cdot\left(\dfrac{2}{\lambda}\right)^x-\dfrac{1}{\lambda^x}\right)}=\lambda$.

Αν $0<\lambda<2$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{2^x}\left(\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^x\cdot\lambda-1+\dfrac{3}{2^x}\right)}{\cancel{2^x}\left(\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^x+4-\dfrac{1}{2^x}\right)}=-\dfrac{1}{4}$ και

αν $\lambda=2$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\cdot 2^x-2^x+3}{2^x+4\cdot 2^x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x+3}{5\cdot 2^x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{2^x}\left(1+\dfrac{3}{2^x}\right)}{\cancel{2^x}\left(5-\dfrac{1}{2^x}\right)}=\dfrac{1}{5}$

3.303. Αν $0<\alpha<2$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\alpha^x-2^x}{\alpha^x+2^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{\alpha^x}\left(1-\left(\dfrac{2}{\alpha}\right)^x\right)}{\cancel{\alpha^x}\left(1+\left(\dfrac{2}{\alpha}\right)^x\right)}=1$.

Αν $\alpha > 2$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\alpha^x-2^x}{\alpha^x+2^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{2^x}\left(\left(\frac{\alpha}{2}\right)^x-1\right)}{\cancel{2^x}\left(\left(\frac{\alpha}{2}\right)^x+1\right)}=-1$ και

αν $\alpha=2$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\alpha^x-2^x}{\alpha^x+2^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^x-2^x}{2^x+2^x}=0$

3.304. Αν $\alpha<\beta$, τότε $f(x)=\dfrac{3\alpha^x\cdot\alpha-2\beta^x\cdot\frac{1}{\beta}}{\alpha^x+5\beta^x\cdot\beta}=\dfrac{\beta^x\left[3\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x\cdot\alpha-2\cdot\frac{1}{\beta}\right]}{\beta^x\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x+5\beta\right]}=\dfrac{3\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x\cdot\alpha-\frac{2}{\beta}}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x+5\beta}$

Οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{3\cdot0\cdot\alpha-\frac{2}{\beta}}{0+5\beta}=-\dfrac{2}{5\beta^2}$.

Αν $\beta<\alpha$, τότε $f(x)=\dfrac{\alpha^x\left[3\alpha-2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x\cdot\frac{1}{\beta}\right]}{\alpha^x\left[1+5\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x\cdot\beta\right]}=\dfrac{3\alpha-2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x\cdot\frac{1}{\beta}}{1+5\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x\cdot\beta}$

Οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{3\alpha-2\cdot0\cdot\frac{1}{\beta}}{1+5\cdot0\cdot\beta}=3\alpha$.

Αν $\alpha=\beta$, τότε $f(x)=\dfrac{3\alpha^x\cdot\alpha-2\alpha^x\cdot\frac{1}{\alpha}}{\alpha^x+5\alpha^x\cdot\alpha}=\dfrac{3\alpha-\frac{2}{\alpha}}{1+5\alpha}=\dfrac{3\alpha^2-2}{\alpha+5\alpha^2}$

Οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{3\alpha^2-2}{\alpha+5\alpha^2}$.

3.305. $g(x)=\ln\dfrac{\kappa^{3x}+e^{3x}}{e^{2x}}-x=\ln\dfrac{\kappa^{3x}+e^{3x}}{e^{2x}}-\ln e^x=\ln\dfrac{\frac{\kappa^{3x}+e^{3x}}{e^{2x}}}{e^x}=\ln\dfrac{\kappa^{3x}+e^{3x}}{e^{3x}}$

Αν $\kappa>e$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\kappa^{3x}+e^{3x}}{e^{3x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{e^{3x}}\left(\left(\frac{\kappa}{e}\right)^{3x}+1\right)}{\cancel{e^{3x}}}=+1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\ln1=0$,

αν $0<\kappa<e$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\kappa^{3x}+e^{3x}}{e^{3x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\kappa^{3x}\left(1+\left(\frac{e}{\kappa}\right)^{3x}\right)}{e^{3x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\kappa}{e}\right)^{3x}\left(1+\left(\frac{e}{\kappa}\right)^{3x}\right)=+\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$. Αν $\kappa=e$, τότε $g(x)=\ln\dfrac{e^{3x}+e^{3x}}{e^{3x}}=\ln\dfrac{2\cancel{e^{3x}}}{\cancel{e^{3x}}}=\ln2$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\ln2$

3.306. α) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{2x^2-3}{1-x}} \underset{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3}{1-x}=-\infty}{\overset{\frac{2x^2-3}{1-x}=u}{=}} \lim\limits_{u\to-\infty} e^u = 0$

β) $\dfrac{x+1}{x^2-5x}=u$ με $\lim\limits_{x\to+\infty} u = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x^2-5x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} = 0$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x+1}{x^2-5x}} = \lim\limits_{u\to 0} e^u = 1$.

γ) $\dfrac{x^2-x+1}{x-2}=u$ με $\lim\limits_{x\to-\infty} u = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = -\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{x^2-x+1}{x-2}} = \lim\limits_{u\to-\infty} e^u = 0$

δ) $\dfrac{x^2-5}{x^2+2x}=u$, $\lim\limits_{x\to-\infty} u = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 1$, οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{x^2-5}{x^2+2x}} = \lim\limits_{u\to 1} e^u = e$

ε) $\sqrt{x^2+3}+x=u$ με $\lim\limits_{x\to-\infty} u = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3}+x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x^2}+3-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+3}-x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x\left(-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-1\right)} = 0$

οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\sqrt{x^2+3}+x} = \lim\limits_{u\to 0} e^u = 1$

3.307. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1+8^{-\frac{1}{x}}}{3-8^{-\frac{1}{x}}} \underset{u\to+\infty}{\overset{-\frac{1}{x}=u}{=}} \lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1+8^u}{3-8^u} = \lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\cancel{8^u}\left(8^{-u}+1\right)}{\cancel{8^u}\left(38^{-u}-1\right)} = -1$

3.308. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\ln(\eta\mu x)} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\ln(\eta\mu x)-\ln x+\ln x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\ln\frac{\eta\mu x}{x}+\ln x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{\ln x}{\ln x}}{\frac{\ln\frac{\eta\mu x}{x}+\ln x}{\ln x}} \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\ln(\eta\mu x)} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\frac{1}{\ln x}\ln\frac{\eta\mu x}{x}+1} = \dfrac{1}{0\cdot 0+1} = 1$

Γιατί αν θέσουμε $\dfrac{\eta\mu x}{x}=u$ με $\lim\limits_{x\to 0^+} u = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$, τότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\dfrac{\eta\mu x}{x} = \lim\limits_{u\to 1}\ln u = 0$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\ln x} = 0$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$

3.309. α) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3\ln x+2}{4\ln^3 x+\ln^2 x+1} \underset{u\to-\infty}{\overset{\ln x=u}{=}} \lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{3u+2}{4u^3+u^2+1} = \lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{3\cancel{u}}{4u^{\cancel{3}2}} = 0$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-\ln\sqrt{x^2+2x+3}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x+3}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}\right) = \ln 1 = 0$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^{x+2}+3\right)-x-2\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^{x+2}+3\right)-\ln e^{x+2}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{e^{x+2}+3}{e^{x+2}}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{\cancel{e^{x+2}}\left(1+\frac{3}{e^{x+2}}\right)}{\cancel{e^{x+2}}}\right) = \ln 1 = 0$

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2\ln(x+1)-\ln(x^2+x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{(x+1)^2}{x^2+x+1}=\lim\limits_{u\to1}\ln u=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)^2}{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=1$

ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[3\ln(x+2)-\ln(x^2+3)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{(x+2)^3}{x^2+3}\right)=\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$, γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+2)^3}{x^2+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x^2+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}}=+\infty$

στ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[3\ln(2x)-\ln(x^3+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{8x^3}{x^3+1}=\lim\limits_{u\to8}\ln u=\ln 8$,

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8x^3}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}}=8$

3.310. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(2x+\sigma\upsilon\nu^2x)-2\ln x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{2x+\sigma\upsilon\nu^2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2x}{x^2}\right)=\lim\limits_{u\to0^+}\ln u=-\infty$

γιατί $|u|=\left|\dfrac{2}{x}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2x}{x^2}\right|\le\left|\dfrac{2}{x}\right|+\dfrac{|\sigma\upsilon\nu^2x|}{x^2}\le\left|\dfrac{2}{x}\right|+\dfrac{1}{x^2}$

και για $x>0$, είναι $|u|\le\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\Leftrightarrow-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}\le u\le\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=0$, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}u=0$ και $u>0$

3.311. Θέτω $g(x)=f(x)+\sqrt{x^2+x+2}-x+1$ (1) με $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=4$.

Όταν το x βρίσκεται κοντά στο $+\infty$ ισχύει: $f(x)=g(x)-\left(\sqrt{x^2+x+2}-x+1\right)=$

$$=g(x)-\frac{x^2+x+2-(x-1)^2}{\sqrt{x^2+x+2}+x-1}=g(x)-\frac{x^2+x+2-x^2+2x-1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1-\frac{1}{x}\right)}=g(x)-\frac{\cancel{x}\left(3+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1-\frac{1}{x}\right)}$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-\dfrac{3+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1-\frac{1}{x}}\right]=4-\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{2}$.

Επειδή η f είναι άρτια, ισχύει: $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Οπότε: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\overset{x=-h}{=}\lim\limits_{-h\to-\infty}f(-h)=\lim\limits_{h\to+\infty}f(h)=\dfrac{5}{2}$.

3.312. **α)** $f(x)+\sqrt{x^2+2x+3}+x=g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)-\left(\sqrt{x^2+2x+3}+x\right)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=4$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[g(x)-\frac{\cancel{x^2}+2x+3-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+2x+3}-x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[g(x)-\frac{\cancel{x}\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-1\right)}\right]=4+1=5$$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-f(-x)\right]\overset{-x=u}{\underset{u\to-\infty}{=}}\lim\limits_{u\to-\infty}\left(-f(u)\right)=-5$

3.313. $3f(x)+\sqrt{x^2+2x+3}-x=g(x)\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{g(x)+x-\sqrt{x^2+2x+3}}{3}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{3}\left(g(x)+\frac{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}-2x-3}{x+\sqrt{x^2+2x+3}}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{3}\left(g(x)+\frac{\cancel{x}\left(-2-\frac{3}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}\right)\right]=\frac{1}{3}$$

3.314. $(8x+1)f(x)-3x^2\eta\mu\dfrac{2}{x}=g(x)\overset{x<-1}{\Leftrightarrow} f(x)=\dfrac{g(x)}{8x+1}+3\dfrac{x^2}{8x+1}\eta\mu\dfrac{2}{x}$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{8x+1}=0$, και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{8x+1}\eta\mu\dfrac{2}{x}\overset{\frac{2}{x}=u}{\underset{u\to0^-}{=}}\lim\limits_{u\to0^-}\dfrac{\frac{4}{u^2}}{\frac{16}{u}+1}\eta\mu u=\lim\limits_{u\to0^-}\dfrac{4}{16+u}\dfrac{\eta\mu u}{u}=\dfrac{1}{4}$,

άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{3}{4}$

3.315. $\dfrac{f(x)+2x\eta\mu\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+2x+3}-x}=g(x)\overset{x>0}{\Leftrightarrow} f(x)=g(x)\left(\sqrt{x^2+2x+3}-x\right)-2x\eta\mu\dfrac{1}{x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\left(\sqrt{x^2+2x+3}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)\dfrac{\cancel{x^2}+2x+3-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+2x+3}+x}\right]=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)\frac{\cancel{x}\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)}\right]=3$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\eta\mu\dfrac{1}{x}\overset{\frac{1}{x}=u}{\underset{u\to0}{=}}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

3.316. **α)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}^{\cancel{2}}}{\cancel{\sqrt{x}}\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\left(\frac{\cancel{x}-\cancel{x}+1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\frac{1}{\cancel{\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}=\frac{1}{2}$$

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}-\frac{x}{2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-x\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}-\frac{x}{2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(-\frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}\sqrt{1-\frac{1}{x}}}-\frac{1}{2}\right)\right]=+\infty$

3.317. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(\frac{f(x)}{x}-3-\frac{6}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(2f(x)-6x+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{f(x)}{x}-3-\frac{6}{x^2}}{2\left(f(x)-3x\right)+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}}=\frac{3-3-0}{2\cdot6+0-0}=0$

3.318. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+xf(x)+5+4x}{x^2f(x)+xf(x)-2x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(3+\frac{f(x)}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{4}{x}\right)}{\cancel{x^2}\left(f(x)+\frac{f(x)}{x}-2x\right)}=\frac{3+3}{3-1}=3$

3.319. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3(x+2)f^2(x)-4f(x)+5x}{xf^2(x)+(x+3)f(x)+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{xf^2(x)}\left[3\left(1+\frac{2}{x}\right)-\frac{4}{xf(x)}+\frac{5}{f^2(x)}\right]}{\cancel{xf^2(x)}\left(1+\left(1+\frac{3}{x}\right)\frac{1}{f(x)}+\frac{2}{xf^2(x)}\right)}=3$

3.320. Είναι (1): $f^5(x)+f(x)=32x^5\Leftrightarrow f(x)\left[f^4(x)+1\right]=32x^5$.

Αν $x>0$ και επειδή $f^4(x)+1>0$, είναι $f(x)>0$, οπότε από την (1) προκύπτει

$f^5(x)<32x^5\Leftrightarrow 0<f(x)<2x$, άρα για $x>0$, $0<\frac{f(x)}{x^5}<\frac{2}{x^4}$ και επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^4}=0$, από το

κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^5}=0$.

3.321. $\left|\left(x^2+1\right)f(x)-x\right|\le1\Leftrightarrow\frac{x-1}{x^2+1}\le f(x)\le\frac{x+1}{x^2+1}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}=0$ άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

3.322. $\left|\left(1+x^4\right)f(x)-x\right|\le x^2\Leftrightarrow\frac{x-x^2}{1+x^4}\le f(x)\le\frac{x^2+x}{1+x^4}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x}{1+x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}}{x^{\cancel{4}2}}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2+x}{1+x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{-x^2}}{x^{\cancel{4}2}}=0$, άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

3.323. $\left(f(x)+g(x)\right)^2-2f(x)g(x)-2\left(f(x)+g(x)\right)\le\frac{1}{x}-2\Leftrightarrow$

$$\left[f(x)-1\right]^2+\left[g(x)-1\right]^2 \le \frac{1}{x}$$

Επειδή $\left[f(x)-1\right]^2+\left[g(x)-1\right]^2 \ge 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, από το ΚΠ είναι και

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(f(x)-1\right)^2+\left(g(x)-1\right)^2\right]=0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2+(\beta-1)^2=0 \Leftrightarrow \alpha=1=\beta.$$

3.324. Εστω $\frac{x}{x+1}=u$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$

και $x=xu+u \Leftrightarrow xu-x=-u \Leftrightarrow x(u-1)=-u \Leftrightarrow x=\frac{-u}{u-1}$, $u\neq 1$. Τότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x^2-1)\frac{f\left(\frac{x}{x+1}\right)-2}{6x+5}\right]=\lim_{u\to1}\left[\left(\left(\frac{-u}{u-1}\right)^2-1\right)\frac{f(u)-2}{6\frac{-u}{u-1}+5}\right]=\lim_{u\to1}\left[\left(\frac{u^2-(u-1)^2}{(u-1)^2}\right)\frac{f(u)-2}{\frac{-6u+5u-5}{u-1}}\right]$$

$$=\lim_{u\to1}\left[\left(\frac{2u-1}{(u-1)^2}\right)\frac{f(u)-2}{\frac{-u-5}{u-1}}\right]=\lim_{u\to1}\left[\frac{2u-1}{-u-5}\cdot\frac{f(u)-2}{u-1}\right]=-\frac{1}{6}\cdot 6=-1$$

3.325. Εστω ότι το $P(x)$ είναι ν-οστού βαθμού.

Αν $\nu=1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{x^2-1}=0$ και αν $\nu>2$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{x^2-1}=\pm\infty$.

Άρα για να είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{x^2-1}=1$, πρέπει $\nu=2$.

Εστω $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$. Τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\alpha x^2}{x^2}=\alpha=1$

Εστω $\frac{x^2+\beta x+\gamma}{x^2-1}=f(x) \overset{x\neq\pm1}{\Leftrightarrow} x^2+\beta x+\gamma=f(x)(x^2-1)$ και

$\lim\limits_{x\to1}(x^2+\beta x+\gamma)=\lim\limits_{x\to1}\left[f(x)(x^2-1)\right] \Leftrightarrow 1+\beta+\gamma=0 \Leftrightarrow \gamma=-1-\beta$. Τότε

$$\lim_{x\to1}\frac{P(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+\beta x-1-\beta}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)+\beta\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\frac{2+\beta}{2}=3 \Leftrightarrow \beta=4 \text{ και } \gamma=-5$$

Άρα $P(x)=x^2+4x-5$.

3.326. Εστω ότι $f(x)$ είναι ν-οστού βαθμού. Αν $\nu>1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$, άρα $\nu=1$.

Εστω $f(x)=\alpha x+\beta$, $\alpha\neq0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=4 \Leftrightarrow \alpha=4$, $f(0)=5 \Leftrightarrow \beta=5$.

Είναι $\lim\limits_{x\to4}\frac{4x+5}{x-\lambda}=7$. Αν $\lambda=4$, τότε το όριο $\lim\limits_{x\to4}\frac{4x+5}{x-4}$ δεν υπάρχει, αφού τα πλευρικά όρια στο 4 διαφέρουν. Άρα $\lambda\neq4$. Τότε $\lim\limits_{x\to4}\frac{4x+5}{x-\lambda}=\frac{21}{4-\lambda}=7 \Leftrightarrow \lambda=1$

3.327. $\left|\frac{f^2(x)-5g^2(x)}{f(x)+g(x)}\right| \le \left|\frac{f^2(x)}{f(x)+g(x)}\right| + 5\left|\frac{g^2(x)}{f(x)+g(x)}\right| \le \frac{f^2(x)}{f(x)} + \frac{g^2(x)}{g(x)} \Leftrightarrow$

$-(f(x)+g(x)) \le \frac{f^2(x)-5g^2(x)}{f(x)+g(x)} \le f(x)+g(x)$ από κ.π. είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{f^2(x)-5g^2(x)}{f(x)+g(x)}=0$

3.328. **α)** Για $y=0$ είναι $|f(x)|\le|x| \Leftrightarrow -|x|\le f(x)\le|x| \overset{x\ne0}{\Leftrightarrow} -\frac{|x|}{|x|^2}\le\frac{f(x)}{x^2}\le\frac{|x|}{|x|^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|}\le\frac{f(x)}{x^2}\le\frac{1}{|x|}$

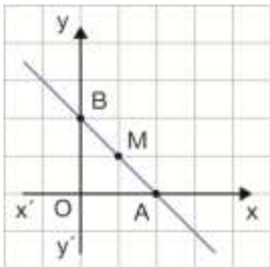
Επειδή $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|}=0$ είναι και $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$

β) $\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2+3f(x)}{2x^2-|f(x)|} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(6+3\frac{f(x)}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(2-\left|\frac{f(x)}{x^2}\right|\right)}=3$

3.329. **α)** $K(x)=x+30.000$

β) $\lim_{x\to+\infty}P(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+30.000}{x}=1$ και $\lim_{x\to0^+}P(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x+30.000}{x}=+\infty$

3.330. **α)** Εστω $A(\alpha,0)$, $\alpha>x_M=3$, τότε $\lambda_{AB}=\frac{2}{3-\alpha}$ και



$AB: y-0=\frac{2}{3-\alpha}(x-\alpha) \Leftrightarrow y=\frac{2}{3-\alpha}x-\frac{2\alpha}{3-\alpha}$

Για $x=0$ είναι $y=\frac{2\alpha}{3-\alpha}$

και $B\left(0,\frac{2\alpha}{3-\alpha}\right)$, $(OAB)=\frac{\alpha^2}{\alpha-3}$

β) $\lim_{x\to+\infty}(OAB)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}=+\infty$

$\lim_{x\to3}(OAB)=\lim_{x\to3^+}\frac{x^2}{x-3}=+\infty$

3.331. Από το πυθαγόρειο θεώρημα είναι: $(B\Gamma)=\sqrt{\beta^2+x^2}$, $\frac{(B\Gamma)}{(AB)}=\frac{\sqrt{\beta^2+x^2}}{x}$,

$\lim_{x\to+\infty}\frac{(B\Gamma)}{(AB)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\beta^2+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{\frac{\beta^2}{x^2}+1}}{\cancel{x}}=1$

3.332. **α)** $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{x}\le\frac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\frac{1}{|x|}\le\frac{\eta\mu x}{x}\le\frac{1}{|x|}$ για $x\in(0,+\infty)$ είναι $-\frac{1}{x}\le\frac{\eta\mu x}{x}\le\frac{1}{x}$

είναι $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$ και $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$, άρα και $\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$

β) $x^2\left[f^2(x)+g^2(x)\right]-2\left[f(x)-g(x)\right]\le x\eta\mu x-\frac{1}{x^2}-1\Leftrightarrow$

για $x\neq 0$ είναι: $f^2(x)+g^2(x)-\frac{2f(x)}{x^2}+\frac{2g(x)}{x^2}\le\frac{\eta\mu x}{x}-\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}$

είναι $\lim_{x\to+\infty}\left(f^2(x)+g^2(x)-\frac{2f(x)}{x^2}+\frac{2g(x)}{x^2}\right)\le\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\eta\mu x}{x}-\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}\right)\Leftrightarrow$

$\kappa^2+\lambda^2\le 0\Leftrightarrow\kappa=\lambda=0$, γιατί $\lim_{x\to+\infty}\frac{2f(x)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(2f(x)\frac{1}{x^2}\right)=0$ και

$\lim_{x\to+\infty}\frac{2g(x)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(2g(x)\frac{1}{x^2}\right)=0$.

3.333. α) Είναι $\lim_{y\to+\infty}\frac{2y^2\eta\mu x+xy^2+2x^2y}{xy^2+1}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^2\left(2\eta\mu x+x+\frac{2x^2}{y}\right)}{y^2\left(x+\frac{1}{y^2}\right)}=\frac{2\eta\mu x+x+0}{x+0}$

άρα $f(x)=\frac{2\eta\mu x+x}{x}$ για κάθε $x>0$.

β) Είναι $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|\le\frac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\frac{1}{|x|}\le\frac{\eta\mu x}{x}\le\frac{1}{|x|}$ και $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right)=0$ άρα και

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$. Οπότε $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2\frac{\eta\mu x}{x}+1\right)=1$

3.334. $z=x(1-i)+\eta\mu x(1+i)=x+\eta\mu x+(\eta\mu x-x)i$

$$f(x)=\frac{|z|^2}{z_1z_2x^2}=\frac{(x+\eta\mu x)^2+(\eta\mu x-x)^2}{2x^2}=\frac{2x^2+2\eta\mu^2x}{2x^2}=1+\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2$$

α) $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|\le\frac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\frac{1}{|x|}\le\frac{\eta\mu x}{x}\le\frac{1}{|x|}$ και $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right)=0$ άρα και $\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$.

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right)=1$

β) $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(1+\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right)=2$

γ) $\lim_{x\to+\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\left(\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)^2\right)\overset{\frac{1}{x}=u}{=}\lim_{u\to0}\left(1+\left(\frac{\eta\mu u}{u}\right)^2\right)=2$

3.335. α) $\lim\limits_{\omega\to+\infty} f(\omega) = \lim\limits_{\omega\to+\infty} \dfrac{\omega^2+(x^2+y^2)\omega+2-\omega^2-4y\omega-3}{\sqrt{\omega^2+(x^2+y^2)\omega+2}+\sqrt{\omega^2+4y\omega+3}} =$

$$= \lim_{\omega\to+\infty} \frac{(x^2+y^2-4y)\omega-1}{\omega\left(\sqrt{1+\dfrac{x^2+y^2}{\omega}+\dfrac{2}{\omega^2}}+\sqrt{1+\dfrac{4y}{\omega}+3}\right)} = \frac{x^2+y^2-4y}{2}$$

Πρέπει $\dfrac{x^2+y^2-4y}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2+(y-2)^2 = 4$, άρα ο γ.τ. του Μ είναι κύκλος με κέντρο $\Lambda(0,2)$ και $\rho = 2$.

β) $\lim\limits_{\omega\to+\infty} g(\omega) = \lim\limits_{\omega\to+\infty}\left[\left(\sqrt{\omega^2+2x\omega+3x^2}-\omega\right)+\left(\sqrt{\omega^2-2y\omega+5y^2}-\omega\right)\right] =$

$$= \lim_{\omega\to+\infty}\left[\frac{2x\omega+3x^2}{\sqrt{\omega^2+2x\omega+3x^2}+\omega}+\frac{-2y\omega+5y^2}{\sqrt{\omega^2-2y\omega+5y^2}+\omega}\right] = x-y$$

Είναι $x-y=-2$ και το Κ ανήκει στην ευθεία $x-y+2=0$.

γ) $d(\Lambda,\varepsilon) = \dfrac{|0-2+2|}{\sqrt{5}} = 0 < 2$, άρα έχουν 2 κοινά σημεία.

3.336. α) Εστω ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. Τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) > f(x_2)$, οπότε $f(f(x_1)) < f(f(x_2))$ και $-f(x_1) < -f(x_2)$, άρα και $f(f(x_1)) - f(x_1) < f(f(x_2)) - f(x_2) \Leftrightarrow -x_1+5 < -x_2+5 \Leftrightarrow x_1 > x_2$ που είναι άτοπο.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα είναι και 1–1 και αντιστρέφεται.

$f^{-1}(x) = y$ και $x = f^{-1}(y)$, τότε $9f(y) = 6y - f^{-1}(y) + 5 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = 6y - 9f(y) + 5$ και $f^{-1}(x) = 6x - 9f(x) + 5$, $x \in \mathbb{R}$

γ) i. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(f(x))}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(f(x))}{f(x)}\dfrac{f(x)}{x} = k^2$, γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(f(x))}{f(x)} \overset{f(x)=u}{\underset{u\to+\infty}{=}} \lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{f(u)}{u} = k$

ii. $9(f\circ f)(x) = 6f(x) - x + 5 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} 9\dfrac{f(f(x))}{x} = 6\dfrac{f(x)}{x} - 1 + \dfrac{9}{x}$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\left[9\frac{f(f(x))}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[6\frac{f(x)}{x} - 1 + \frac{5}{x}\right] \Leftrightarrow 9k^2 = 6k-1 \Leftrightarrow 9k^2-6k+1=0 \Leftrightarrow$$

$(3k-1)^2 = 0 \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{3}$

3.337. α) Πρέπει $1-e^x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ και $1+e^x > 0$ που ισχύει. Άρα $A = (-\infty, 0)$.

β) $1+e^x > 1-e^x \Leftrightarrow \ln(1+e^x) > \ln(1-e^x) \Leftrightarrow \ln(1-e^x) - \ln(1+e^x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0$

γ) για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow -e^{x_1} > -e^{x_2} \Leftrightarrow 1-e^{x_1} > 1-e^{x_2} \Leftrightarrow$ $\ln(1-e^{x_1}) > \ln(1-e^{x_2})$ και όμοια $-\ln(1+e^{x_1}) > -\ln(1+e^{x_2})$, άρα και $f(x_1) > f(x_2)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα οπότε είναι και 1–1 και αντιστρέφεται.

$$f(x)=y \Leftrightarrow \ln(1-e^x)-\ln(1+e^x)=y \Leftrightarrow \ln\frac{1-e^x}{1+e^x}=y \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x=\ln\frac{1-e^y}{1+e^y},$$

άρα $f^{-1}(x)=\ln\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$

δ) i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(-4)x^4-3x^3+7x^2-6x+2}{x^3-5x^2+9}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(-4)x^{\cancel{4}}}{\cancel{x^3}}=-\infty$

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{f^{-1}(x)}-e^{f(x)}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{\ln\frac{1-e^x}{1+e^x}}-e^{\ln\frac{1-e^x}{1+e^x}}\right)=0$

3.338. α) Για $x>0$ είναι $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^3+2\dfrac{f(x)}{x}\le 3\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^3$ και

$$\lim_{x\to0^+}\left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+2\frac{f(x)}{x}\right]\le\lim_{x\to0^+}3\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3\Leftrightarrow k^3+2k\le3\ (1)$$

Για $x<0$ είναι $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^3+2\dfrac{f(x)}{x}\ge 3\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^3$ και

$$\lim_{x\to0^-}\left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+2\frac{f(x)}{x}\right]\ge\lim_{x\to0^-}3\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3\Leftrightarrow k^3+2k\ge3\ (2)$$

Από τις $(1),(2)$ είναι $k^3+2k=3\Leftrightarrow k^3+2k-3=0\Leftrightarrow k=1$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^3+2\dfrac{f(x)}{x}\right]\le\lim\limits_{x\to+\infty}3\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^3\Leftrightarrow\lambda^3+2\lambda\le0$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^3+2\dfrac{f(x)}{x}\right]\ge\lim\limits_{x\to-\infty}3\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^3\Leftrightarrow\lambda^3+2\lambda\ge0$, άρα

$\lambda^3+2\lambda=0\Leftrightarrow\lambda(\lambda^2+2)=0\Leftrightarrow\lambda=0$

Από προηγούμενες ασκήσεις είναι $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$

β) i. Εστω $\dfrac{f(x)}{x}=g(x)\overset{x\neq0}{\Leftrightarrow}f(x)=xg(x)$ και $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(xg(x))=0$

$\lim\limits_{x\to2}h(x)=\lim\limits_{x\to2}\left[f(2-x)+2\right]\underset{u\to0}{\overset{2-x=u}{=}}\lim\limits_{u\to0}(f(u)+2)=2$

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to2}(xh(x)-2)=2$, άρα $xh(x)-2>0$ κοντά στο 2 και $\lim\limits_{x\to2}(6-2x-2h(x))=-2$, άρα $6-2x-2h(x)<0$ κοντά στο 2.

$$\lim_{x\to2}\frac{|xh(x)-2|-|6-2x-2h(x)|}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{xh(x)-2+6-2x-2h(x)}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{h(x)\cancel{(x-2)}-2\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=0$$

3.339. α) $|f(x)-x|\le 2014 \Leftrightarrow -2014\le f(x)-x\le 2014 \Leftrightarrow x-2014\le f(x)\le x+2014 \ (1) \overset{x>0}{\Leftrightarrow}$

$1-\dfrac{2014}{x}\le \dfrac{f(x)}{x}\le 1+\dfrac{2014}{x}$ και από Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$

β) Αν $\nu>1$ τότε για $x>0$ είναι $\dfrac{1}{x^{\nu-1}}-\dfrac{2014}{x^{\nu}}\le \dfrac{f(x)}{x^{\nu}}\le \dfrac{1}{x^{\nu-1}}+\dfrac{2014}{x^{\nu}}$.

Από Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^{\nu}}=0$. Αν $\nu=1$ τότε από το **α)** είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$

γ) $\lim\limits_{x\to0^+}\left[xf\left(\dfrac{2014}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2014f\left(\dfrac{2014}{x}\right)}{\dfrac{2014}{x}}\ \underset{u\to+\infty}{\overset{\frac{2014}{x}=u}{=}}\ \lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{2014f(u)}{u}=2014$

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2+5x+6}{x^2}f\left(\dfrac{x^2}{x+3}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+2)\dfrac{f\left(\dfrac{x^2}{x+3}\right)}{\dfrac{x^2}{x+3}}\right]=+\infty$,

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(\dfrac{x^2}{x+3}\right)}{\dfrac{x^2}{x+3}}\ \underset{u\to+\infty}{\overset{\frac{x^2}{x+3}=u}{=}}\ \lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{f(u)}{u}=1$

3.340. α) Εστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1)\ge f(x_2)$, τότε $f^3(x_1)\ge f^3(x_2)$ και $f^3(x_1)+3f(x_1)\ge f^3(x_2)+3f(x_2)\Leftrightarrow x_1+4\ge x_2+4\Leftrightarrow x_1\ge x_2$ που είναι άτοπο.

β) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα είναι 1–1 και αντιστρέφεται.

$f(x)=y\Leftrightarrow \dots\ f^{-1}(x)=x^3+3x-4,\ x\in\mathbb{R}$

γ) $f(x)=3\Rightarrow 3^3+3\cdot3=x+4\Leftrightarrow x=32$, δηλαδή $f(32)=3$, οπότε

$f\left(2^{x^2+4x}\right)<3\Leftrightarrow f\left(2^{x^2+4x}\right)<f(32)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}2^{x^2+4x}<32=2^5\Leftrightarrow x^2+4x<5\Leftrightarrow x\in(-5,1)$

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f^{-1}(x)}{x^3}\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+3x-4}{x^3}\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=0$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+3x-4}{x^3}=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$

Συνέχεια συνάρτησης

3.356 **α)** Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^x = e^0 = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x+1) = 1$ και $f(0) = e^0 = 1$.

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 1$, άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

β) $$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+3-4}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2} = \frac{1}{2},$$

όμως $f(1) = 2 \neq \frac{1}{2} = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$, οπότε η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

γ) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = 2$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(3x-1) = 2$ και $f(1) = 2$

δ) $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1+\eta\mu x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1+\eta\mu x-1}{x\sqrt{1+\eta\mu x}+1} = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\frac{1}{\sqrt{1+\eta\mu x}+1}\right) = \frac{1}{2}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x}{2x} = \frac{1}{2}$, $f(0) = \frac{1}{2}$, άρα f συνεχής στο $x_0 = 0$.

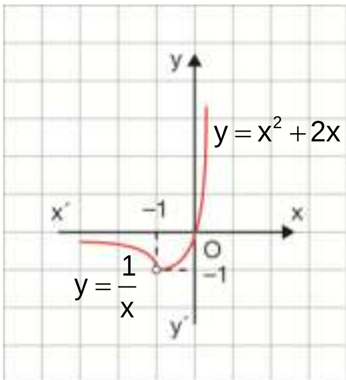
3.357. **α)** Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,-1)$, γιατί είναι ρητή συνάρτηση και είναι επίσης συνεχής στο $(-1,+\infty)$ ως πολυωνυμική.

Για την συνέχεια της f στο $x_0 = -1$ ισχύει:

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-}\frac{1}{x} = -1$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+}\left(x^2+2x\right) = -1$

και $f(-1) = \frac{1}{-1} = -1$, δηλαδή $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$,

οπότε η f είναι συνεχής και στο $x_0 = -1$. Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σήμα .

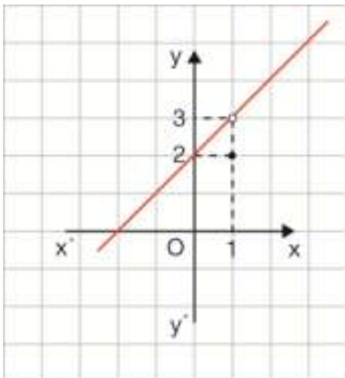


β) Για $x \neq 1$ είναι $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x-1} = \frac{(x+3)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = x+3$,

δηλαδή $f(x) = \begin{cases} x+3 & , x \neq 1 \\ 2 & , x = 1 \end{cases}$.

Σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική συνάρτηση. Για την συνέχεια της f στο $x_0 = 1$ ισχύει: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x+3) = 4 \neq f(1)$,

$f(1) = 2$, οπότε η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.



3.358. **α)** Για $x \neq 1$ η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Στο $x_0 = 1$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{|x+1|+|x+2|-5}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1+x+2-5}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 2 = f(1)$$

άρα η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

β) Για $x \neq 0$ η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Για $x < 0$ είναι:

$$|f(x)| = \left|x^2 \eta\mu \frac{1}{x}\right| = x^2 \left|\eta\mu \frac{1}{x}\right| \leq x^2 \Leftrightarrow -x^2 \leq x^2 \eta\mu \frac{1}{x} \leq x^2 .$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-} (-x^2) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 = 0$, είναι και $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(1 - \dfrac{\eta\mu x}{x}\right) = 0$, $f(0) = 0$, άρα f συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

3.359. Για $x \neq 0$ είναι: $|g(x)| = \left|f(x)\eta\mu \dfrac{1}{x^2}\right| = |f(x)| \left|\eta\mu \dfrac{1}{x^2}\right| \leq |f(x)| \Leftrightarrow -|f(x)| \leq g(x) \leq |f(x)|$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)| = |f(0)| = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0} (-|f(x)|) = |f(0)| = 0$, άρα και $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0 = g(0)$

άρα η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

3.360. **α)** Η f είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων x^2 και $\eta\mu x$.

β) Η f είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $2x^2+1$, $\ln x$, $3x$.

γ) Η f είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $x^3 - x^2 + 3$ και $x^2 - 3x + 4$.

δ) Η f είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $x^2 - x + 2$, $\sigma\upsilon\nu x$, $3x$.

ε) Η f είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $\eta\mu x$, $\dfrac{2x-1}{x+4}$.

ζ) Η f είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $\sigma\upsilon\nu x$, x^4 και $(2x^2+3)$.

3.361. Αν $x < 3$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \left(\dfrac{1}{3}x^2 - \alpha^2\right) = 3 - \alpha^2$

Αν $x > 3$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (\alpha x + 5) = 3\alpha + 5$

$f(3) = 3 - \alpha^2$. Για να είναι η f συνεχής στο $x_0 = 3$, πρέπει: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3+} f(x) = f(3)$.

Δηλαδή $3 - \alpha^2 = 3\alpha + 5 \Leftrightarrow \alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1$ ή $\alpha = -2$

3.362. $$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \eta\mu \frac{1}{x}}{\eta\mu x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\eta\mu x} \cdot x^2 \eta\mu \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}} \cdot x^2 \eta\mu \frac{1}{x}\right)$$

$\left|x^2 \eta\mu \dfrac{1}{x}\right| = |x^2| \cdot \left|\eta\mu \dfrac{1}{x}\right| \leq |x^2| = x^2$. Δηλαδή $-x^2 \leq x^2 \eta\mu \dfrac{1}{x} \leq x^2$.

$\lim\limits_{x\to 0} (-x^2) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^2 \eta\mu \dfrac{1}{x}\right) = 0$. Άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{1} \cdot 0 = 0$.

Για να είναι η f συνεχής στο $x_0 = 0$, πρέπει: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lambda = 0$.

3.363. Θέτουμε $\frac{1}{x}=u$, όταν $x\to 0^-$ τότε $u\to -\infty$, ενώ όταν $x\to 0^+$ τότε $u\to +\infty$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{u\to -\infty}\frac{\frac{1}{u}}{1+e^u}=\lim_{u\to -\infty}\left(\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{1+e^u}\right)=0,\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{u\to +\infty}\frac{\frac{1}{u}}{1+e^u}=\lim_{u\to +\infty}\left(\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{1+e^u}\right)=0\cdot 0=0$$

και $f(0)=0$, άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=0$. Επειδή για $x\neq 0$ η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

3.364. Για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{1,2\}$, κάθε κλάδος της συνάρτησης f είναι συνεχής. Πρέπει η f να είναι συνεχής στα $x_1=1$ και $x_2=2$. Για $x<1$ είναι $x-1<0$, οπότε $|x-1|=-(x-1)$ και

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{2(x-1)+x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2(x-1)+(x-1)(x-2)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{\cancel{(x-1)}\left[2+(x-2)\right]}{\cancel{x-1}}=\lim_{x\to 1^-}(2+x-2)=1$$

Επίσης, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2+x+1+\alpha+\beta\right)=\alpha+\beta+3=f(1)$.

Πρέπει $\alpha+\beta+3=1\Leftrightarrow \alpha+\beta=-2\ (1)$.

Στο $x_2=2$ είναι: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2+x+1+\alpha+\beta\right)=7+\alpha+\beta$

και $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(-3\alpha x+2\beta)=-6\alpha+2\beta=f(2)$.

Πρέπει $7+\alpha+\beta=-6\alpha+2\beta\Leftrightarrow 7\alpha-\beta=-7\ (2)$. Από (1) (2) είναι $\left.\begin{matrix}\alpha+\beta=-2\\ 7\alpha-\beta=-7\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\alpha=-\frac{9}{8}\\ \beta=-\frac{7}{8}\end{matrix}$.

3.365. $$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\alpha x^2+\beta x-\alpha x-\beta}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\alpha x\cancel{(x-1)}+\beta\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=\alpha+\beta,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\beta x\left(\sqrt{x}-1\right)-\alpha\left(\sqrt{x}-1\right)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)(\beta x-\alpha)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{(x-1)}(\beta x-\alpha)}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{\beta-\alpha}{2}$$

Πρέπει $\begin{cases}\alpha+\beta=2\\ \frac{\beta-\alpha}{2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=3\\ \alpha=-1\end{cases}$

3.366. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=2$, είναι: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)=\lambda-\kappa$.

Για $x<2$ είναι $f(x)=\frac{x^2+x+\lambda}{x-2}\Leftrightarrow f(x)(x-2)=x^2+x+\lambda$

και $\lim\limits_{x\to 2^-}\left[f(x)(x-2)\right]=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2+x+\lambda\right)\Leftrightarrow 0=6+\lambda\Leftrightarrow\lambda=-6$.

Τότε $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{(x+3)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=5$.

Είναι $\lambda-\kappa=5 \Rightarrow -6-\kappa=5 \Leftrightarrow \kappa=-11$.

Τότε $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{4x^2-11x+6}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\cancel{(x-2)}(4x-3)}{\cancel{x-2}}=5$

3.367. $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{|x+3|-x^2-6x-9}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{-\cancel{(x+3)}-(x+3)^{\cancel{2}}}{(x-3)\cancel{(x+3)}}=\dfrac{1}{6}$

$\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{\alpha x-\beta}{5x-15}=\dfrac{-3\alpha-\beta}{-30}=\dfrac{3\alpha+\beta}{30}=f(-3)$

Είναι $\dfrac{3\alpha+\beta}{30}=\dfrac{1}{6}\Leftrightarrow 3\alpha+\beta=5\Leftrightarrow \beta=5-3\alpha>0\Leftrightarrow \alpha<\dfrac{5}{3}$ άρα $\alpha=1$ και $\beta=2$.

3.368. Για $x>0$ η f είναι συνεχής ως γινόμενο σ.σ.

Θέτουμε $-\dfrac{1}{x^2}=u\Leftrightarrow x^2=-\dfrac{1}{u}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{-u}}$. Όταν $x\to 0^+$ τότε $u\to-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{-u}}e^u=0\cdot 0=0$

Για $x<0$ η f είναι συνεχής ως πράξεις σ.σ.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\ln(x^2+1)}{e^{-x}}+\alpha e^x-\sigma\upsilon\nu x\right)=0+\alpha-1=\alpha-1=f(0)$.

Είναι $\alpha-1=0\Leftrightarrow\alpha=1$

3.369. Για $x<1$ και $1<x<2$ η f είναι συνεχής ως άθροισμα σ.σ.

Για $x>2$ η f είναι συνεχής ως πηλίκο σ.σ.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(\alpha e^x+\beta)=\alpha e+\beta=f(1)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1+\alpha\ln x)=0$,

άρα $\alpha e+\beta=0$ (1).

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x-1+\alpha\ln x)=1+\alpha\ln 2=f(2)$ και

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-2}}}\underset{u\to+\infty}{\overset{\frac{1}{x-2}=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{1+e^u}=0$,

άρα $1+\alpha\ln 2=0\Leftrightarrow\alpha=-\dfrac{1}{\ln 2}$ και $(1)\Rightarrow\beta=\dfrac{e}{\ln 2}$

3.370. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2+2x-8}{\sqrt{2x+5}-3}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x+4)(x-2)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{2x+5-9}=$

$=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x+4)\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{2\cancel{(x-2)}}=18$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left[\alpha x^2+(\beta-1)x\right]=4\alpha+2\beta-2=f(2)$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 2, ισχύει ότι $4\alpha+2\beta-2=18 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta=10 \ (1)$

$g(x)=h(x) \Leftrightarrow (\alpha+1)x^2+\alpha x+3\beta = x^2-2\beta x+\beta \Leftrightarrow \alpha x^2+(\alpha+2\beta)x+2\beta=0 \ (2)$

Επειδή οι C_g, C_h έχουν ένα μόνο κοινό σημείο η (2) έχει μοναδική ρίζα και αυτό συμβαίνει όταν $\Delta=0 \Leftrightarrow (\alpha+2\beta)^2-8\alpha\beta=0 \Leftrightarrow \alpha^2+4\alpha\beta+4\beta^2-8\alpha\beta=0 \Leftrightarrow \alpha^2-4\alpha\beta+4\beta^2=0 \Leftrightarrow$ $(\alpha-2\beta)^2=0 \Leftrightarrow \alpha=2\beta$. Τότε $(1) \Rightarrow 5\beta=10 \Leftrightarrow \beta=2$ και $\alpha=2\cdot 2=4$.

3.371. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1^-}\left(3x^2-(\alpha^3+1)x+1\right)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(2x^3-(\alpha^2+\beta)x+\alpha\right)=3-\alpha^3 \Leftrightarrow$

$3-\alpha^3=2-\alpha^2-\beta+\alpha \Leftrightarrow \beta=\alpha^3-\alpha^2+\alpha-1 \ (1)$

$f(2)=15 \Leftrightarrow 16-2\alpha^2-2\beta+\alpha=15 \Leftrightarrow \beta=\dfrac{\alpha-2\alpha^2+1}{2}$

$(1) \Rightarrow \alpha^3-\alpha^2+\alpha-1=\dfrac{\alpha-2\alpha^2+1}{2} \Leftrightarrow 2\alpha^3-\cancel{2\alpha^2}+2\alpha-2=\alpha-\cancel{2\alpha^2}+1 \Leftrightarrow 2\alpha^3+\alpha-3=0 \Leftrightarrow$

$(\alpha-1)(2\alpha^2+2\alpha+3)=0 \Leftrightarrow \alpha=1$ ή $2\alpha^2+2\alpha+3=0$ που είναι αδύνατο.

Για $\alpha=1$ είναι $\beta=\dfrac{1-2+1}{2}=0$

3.372. $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\left((\alpha^2-1)x^2+(\beta-2)x-12\right)=\alpha^2-1-\beta+2-12=\alpha^2-\beta-11$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}(\alpha x+1)=-\alpha+1$

Είναι $-\alpha+1=-11 \Leftrightarrow \alpha=12$ και $\alpha^2-\beta-11=-11 \Leftrightarrow \beta=144$

3.373. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=1$, ισχύει: $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1) \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to1^-}\left[x^2+(\alpha^2+4\alpha)x+\beta^2\right]=\lim\limits_{x\to1^+}\left(x^3-\beta x-4\right)=1-\beta^2-4 \Leftrightarrow$

$1+\alpha^2+4\alpha+\beta^2=1-\beta^2-4 \Leftrightarrow \alpha^2+4\alpha+4+2\beta^2=0 \Leftrightarrow (\alpha+2)^2+2\beta^2=0 \Leftrightarrow$

$\alpha+2=0 \Leftrightarrow \alpha=-2$ και $\beta=0$.

3.374. Για $x\neq0$ η g είναι συνεχής. Για να είναι η g συνεχής στο πεδίο ορισμού της, πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_0=0$. Δηλαδή:

$\lim\limits_{x\to0} g(x)=g(0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0}\left(3\beta x^2-\alpha^2x+4\right)=\alpha+\beta+1 \Leftrightarrow 4=\alpha+\beta+1 \Leftrightarrow \alpha+\beta=3 \ (1)$

Είναι $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(\alpha x^2-2\beta x+5\right)=\alpha-2\beta+5\overset{(1)}{=}3-\beta-2\beta+5=8-3\beta$ και

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(2\alpha x-\beta+2)=2\alpha-\beta+2\overset{(1)}{=}6-2\beta-\beta+2=8-3\beta=f(1)$

Είναι $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1)$

3.375. Για $x\neq2$ είναι: $(x-2)f(x)=x^2-7x+10 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x^2-7x+10}{x-2}=\dfrac{\cancel{(x-2)}(x-5)}{\cancel{x-2}}=x-5$

Είναι $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2}(x-5)=-3$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=2$, ισχύει: $f(2)=\lim\limits_{x\to2} f(x)=-3$.

3.376. Για $x \neq 1$ έχουμε: $(x-1)f(x)=\sqrt{x^2+3}-2 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0=1$.

Είναι: $f(1)=\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+3-4}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}=\frac{1}{2}.$$

Άρα, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & ,\ x\neq1\\[2mm] \dfrac{1}{2} & ,\ x=1\end{cases}$

3.377. Εστω $\dfrac{(x^3-2x^2)f(x)-x\eta\mu4x}{\sqrt{x^2+9}-3}=g(x)\Leftrightarrow(x^3-2x^2)f(x)-x\eta\mu4x=g(x)\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)\Leftrightarrow$

$$f(x)=\frac{g(x)\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)}{x^3-2x^2}+\frac{x\eta\mu4x}{x^3-2x^2},\ x\neq0 \text{ και } x\neq2$$

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left[\frac{g(x)\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)}{x^3-2x^2}+\frac{x\eta\mu4x}{x^3-2x^2}\right]=$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{g(x)\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(x-2)\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}+\frac{4\cancel{x}}{\cancel{x}(x-2)}\frac{\eta\mu4x}{4x}\right]=\frac{36}{-2\cdot6}-2\cdot1=-5$$

3.378. Εστω $\dfrac{\eta\mu x-xf(x)}{\eta\mu x+x}=g(x)\Leftrightarrow\eta\mu x-xf(x)=g(x)(\eta\mu x+x)\Leftrightarrow$

$$f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}-g(x)\left(\frac{\eta\mu x}{x}+1\right),\ x\neq0$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left[\frac{\eta\mu x}{x}-g(x)\left(\frac{\eta\mu x}{x}+1\right)\right]=1-2(1+1)=-3=f(0)$$

3.379. $xf(x)-5x^3=2\eta\mu x-x^2\Leftrightarrow f(x)=2\dfrac{\eta\mu x}{x}-x+5x^2,\ x\neq0$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(2\frac{\eta\mu x}{x}-x+5x^2\right)=2=f(0)$$

3.380. Εστω $\dfrac{f(x)+x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{x}=g(x)\Leftrightarrow f(x)=xg(x)-x^2\eta\mu\dfrac{1}{x},\ x\neq0$

$$-1\leq\eta\mu\frac{1}{x}\leq1\overset{x\neq0}{\Leftrightarrow}-x^2\leq x^2\eta\mu\frac{1}{x}\leq x^2.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = \lim\limits_{x\to 0}\left(-x^2\right) = 0$ είναι και $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 \eta\mu\frac{1}{x}\right) = 0$.

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(xg(x) - x^2\eta\mu\frac{1}{x}\right) = 0$$

3.381. Εστω $\dfrac{(x-2)f(x)-\eta\mu(x-2)}{\sqrt{x+2}-2} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} + \dfrac{\eta\mu(x-2)}{x-2}$, $x \neq 2$, $x > -2$.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\left[g(x)\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} + \frac{\eta\mu(x-2)}{x-2}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 2}\left[g(x)\frac{\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+2}+2\right)} + \frac{\eta\mu(x-2)}{x-2}\right] = 2 = f(2)$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\eta\mu(x-2)}{x-2} \underset{u\to 0}{\overset{x-2=u}{=}} \lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u} = 1$$

3.382. Εστω $\dfrac{f(x)-\sqrt{x+2}}{x-2} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)(x-2) + \sqrt{x+2}$, $x \in [-2,2) \cup (2,+\infty)$

$$f(2) = \lim_{x\to 2}\left[g(x)(x-2) + \sqrt{x+2}\right] = 2$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{g(x)(x-2)+\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \lim_{x\to 2}\left(g(x) + \frac{x+2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 2}\left(g(x) + \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+2}+2\right)}\right) = \frac{5}{4}$$

3.383. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x+1)}{x-1} = 3 \underset{u\to 2}{\overset{x+1=u}{\Leftrightarrow}} \lim\limits_{u\to 2}\dfrac{f(u)}{u-2} = 3$, άρα και $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2} = 3$.

Εστω $\dfrac{f(x)}{x-2} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)(x-2)$, $x \neq 2$. $f(2) = \lim\limits_{x\to 2} g(x)(x-2) = 0$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{g(x)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = 3$$

3.384. Εστω $g(x) = \dfrac{f(x)+x^2-2x-5}{x+2}$, $x \neq -2$, με $\lim\limits_{x\to -2} g(x) = 2$.

Τότε: $f(x)+x^2-2x-5 = g(x)(x+2) \Leftrightarrow f(x) = g(x)(x+2) - x^2 + 2x + 5$.

Είναι $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \lim\limits_{x\to -2}\left[g(x)\cdot(x+2) - x^2 + 2x + 5\right] = 2\cdot 0 - 4 - 4 + 5 = -3$.

Επειδή η C_f διέρχεται από το σημείο $M(-2,-3)$, ισχύει: $f(-2) = -3$.

Άρα $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = f(-2) = -3$, οπότε η f είναι συνεχής στο $x_0 = -2$.

3.385. **α)** Θέτω $3+h=x \Leftrightarrow h=x-3$. Όταν $h\to 0$, τότε: $x-3\to 0$, δηλαδή $x\to 3$,

οπότε $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)}{h}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{x-3}=2$.

β) $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-3}\Leftrightarrow f(x)=g(x)(x-3)$, $\lim\limits_{x\to 3}g(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\left[g(x)(x-3)\right]=0$.

Η f είναι συνεχής στο $x_0=3$, άρα $f(3)=\lim\limits_{x\to 3}f(x)=0$.

3.386. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+1)}{x}=4 \underset{u\to 1}{\overset{x+1=u}{\Leftrightarrow}} \lim\limits_{u\to 1}\dfrac{f(u)}{u-1}=4$, άρα και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=4$.

Εστω $\dfrac{f(x)}{x-1}=g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)(x-1)$, $x\neq 1$. $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}g(x)(x-1)=0$.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=4$

3.387. Για $x=0$ είναι $f(0)+f(2)=3\Leftrightarrow 2+f(2)=3\Leftrightarrow f(2)=1$

και $\lim\limits_{x\to 0}f(x+2)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+3-f(x)\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+3\right)-\lim\limits_{x\to 0}f(x)=3-2=1$

Θέτουμε $x+2=u\Leftrightarrow x=u-2$. Όταν $x\to 0$ τότε $u\to 2$. Τότε: $\lim\limits_{x\to 0}f(x+2)=1\Leftrightarrow \lim\limits_{u\to 2}f(u)=1$.

Άρα $\lim\limits_{u\to 2}f(u)=f(2)=1$, οπότε η f είναι συνεχής στο $x_1=2$.

3.388. Για $x=0$ είναι $f(0)+f(1)=8\Leftrightarrow f(1)=5$.

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{h\to 0}f(1+h)=\lim\limits_{h\to 0}\left(4h^2+4h+8-f(h)\right)=8-3=5=f(1)$.

3.389. Όπου x το $x+3$, έχουμε: $f(x+3)+f(x)=2(x+3)^2+6(x+3)+19=2x^2+18x+55$

Για $x=0$ είναι $f(3)+f(0)=55\Leftrightarrow f(3)=50$.

$\lim\limits_{x\to 3}f(x)\underset{h\to 0}{\overset{x=3+h}{=}}\lim\limits_{h\to 0}f(3+h)=\lim\limits_{h\to 0}\left(2h^2+18h+55-f(h)\right)=50=f(3)$

3.390. **α)** Εστω $\dfrac{f(x)}{x}=g(x)\Leftrightarrow f(x)=xg(x)$, $x\neq 0$. $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}xg(x)=0$

β) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)\underset{h\to 0}{\overset{x=1+h}{=}}\lim\limits_{h\to 0}f(1+h)=\lim\limits_{h\to 0}f(h)=0$ και για $x=0$ είναι $f(1)=f(0)=0$

3.391. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x+3)}{x-3}=2 \underset{u\to 6}{\overset{x+3=u}{\Leftrightarrow}} \lim\limits_{u\to 6}\dfrac{f(u)}{u-6}=2$, άρα και $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{f(x)}{x-6}=2$.

Εστω $\dfrac{f(x)}{x-6}=g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)(x-6)$, $x\neq 6$.

$f(6)=\lim\limits_{x\to 6}f(x)=\lim\limits_{x\to 6}\left(g(x)(x-6)\right)=0$, $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{f(x)-f(6)}{x-6}=\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{g(x)\cancel{(x-6)}}{\cancel{x-6}}=2$.

3.392. Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$. Αρκεί $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, $x_0\in\mathbb{R}$.

Εστω $x-x_0=h$. Όταν $x\to x_0$ είναι $h\to 0$. Τότε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=\lim_{h\to 0}\left(f(x_0)+2f(h)\right)=f(x_0)+2f(0)=f(x_0+0)=f(x_0)$$

3.393. Είναι $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$. Αρκεί $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, $x_0\in\mathbb{R}$.

Εστω $x-x_0=h-3$. Όταν $x\to x_0$ είναι $h\to 3$. Τότε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{h\to 3} f((x_0-3)+h)=\lim_{h\to 3}\left(f(x_0-3)\cdot f(h)\right)==f(x_0-3)\cdot f(3)=f(x_0-3+3)=f(x_0).$$

3.394. Για $x=y=0$ είναι $f(0)=f(0)+2f(0)\Leftrightarrow f(0)=0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$. Για να είναι η f συνεχής στο $\mathbb{R}$, αρκεί $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, $x_0\in\mathbb{R}$.

Θέτουμε $x=x_0+h$, όταν $x\to x_0$ είναι $h\to 0$.

Οπότε: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=\lim\limits_{h\to 0}\left(f(x_0)+2f(h)+x_0\cdot h\right)=$

$$=f(x_0)+2\lim_{h\to 0} f(h)+\lim_{h\to 0} x_0\cdot h=f(x_0)+2\cdot 0+x_0\cdot 0=f(x_0)$$

3.395. Για $x=y=1$ είναι $f(1)=1$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_1=1$, ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=1$.

Για να είναι η f συνεχής στο $\mathbb{R}$, αρκεί $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, $x_0\in\mathbb{R}$.

Θέτουμε $\dfrac{x}{x_0}=h\Leftrightarrow x=x_0h$. Όταν $x\to x_0$ είναι $h\to 1$.

Τότε: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{h\to 1} f(x_0h)\overset{(1)}{=}\lim\limits_{h\to 1}\left[f(x_0)+f(h)\right]=f(x_0)+\lim\limits_{h\to 1} f(h)=$

$$=f(x_0)+f(1)=f(x_0\cdot 1)=f(x_0)$$

3.396. α) Για $x=y=0$ είναι $f(0)=f(0)f(0)\Leftrightarrow f(0)=1$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$. Για να είναι η f συνεχής στο $\mathbb{R}$, αρκεί $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, $x_0\in\mathbb{R}$.

Θέτουμε $x=x_0+h$, όταν $x\to x_0$ είναι $h\to 0$.

Οπότε: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=\lim\limits_{h\to 0}\left(f(x_0)f(h)\right)=f(x_0)\lim\limits_{h\to 0} f(h)=f(x_0)$

β) Είναι $\lim\limits_{x\to \alpha} f(x)=f(\alpha)$. Αρκεί $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, $x_0\in\mathbb{R}$.

Εστω $x-x_0=h-\alpha$. Όταν $x\to x_0$ είναι $h\to \alpha$.

Τότε: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{h\to \alpha} f((x_0-\alpha)+h)=\lim\limits_{h\to \alpha}\left(f(x_0-\alpha)\cdot f(h)\right)=$

$$=f(x_0-\alpha)\cdot f(\alpha)=f(x_0-\alpha+\alpha)=f(x_0).$$

3.397. Για $x=y=0$ είναι $f(0)=f(0)f(0)\Leftrightarrow f(0)=1$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$. Για να είναι η f συνεχής στο $\mathbb{R}$, αρκεί $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, $x_0\in\mathbb{R}$.

Θέτουμε $x=x_0+h$, όταν $x\to x_0$ είναι $h\to 0$.

Οπότε: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=\lim\limits_{h\to 0}\left[f(x_0)\left[f(h)+h\right]+h\right]=f(x_0)\lim\limits_{h\to 0}\left[\left[f(h)+h\right]+h\right]=f(x_0)$

3.398. **α)** Θέτουμε $\dfrac{f(x)+3xe^x}{x}=g(x)\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} f(x)+3xe^x=xg(x)\Leftrightarrow f(x)=xg(x)-3xe^x$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(xg(x)-3xe^x\right)=0$. Για $x=y=0$ είναι $f(0)=f(0)-f(0)\Leftrightarrow f(0)=0$.

β) Θέτουμε $x=x_0+h$, όταν $x\to x_0$ είναι $h\to 0$.

Οπότε: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{h\to 0}f(x_0-h)=\lim\limits_{h\to 0}\left[f(x_0)e^h-f(h)e^{x_0}-3x_0h\right]=f(x_0)$

3.399. Για $x>0$ είναι $x^2+2x+\dfrac{\eta\mu x}{x}\le f(x)\le 5x^3+x+1$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2+2x+\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(5x^3+x+1\right)=1$, άρα και $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ ισχύει: $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$.

3.400. $\left|xf(x)-x\eta\mu x\right|\le x^2\Leftrightarrow -x^2\le xf(x)-x\eta\mu x\le x^2\Leftrightarrow -x^2+x\eta\mu x\le xf(x)\le x^2+x\eta\mu x$

Αν $x>0$, τότε: από (1) προκύπτει: $-x+\eta\mu x\le f(x)\le x+\eta\mu x$

Είναι: $\lim\limits_{x\to 0^+}(-x+\eta\mu x)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}(x+\eta\mu x)=0$.

Από κριτήριο παρεμβολής ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ ισχύει: $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$.

3.401. **α)** Για $x=3$ είναι $18\le f(x)\le 18\Leftrightarrow f(3)=18$

β) $\lim\limits_{x\to 3}6x=18$, $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2+9\right)=18$, άρα και $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=18=f(3)$.

γ) $\lim\limits_{x\to 1/3}\left(x^2f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)\underset{u\to 3}{\overset{\frac{1}{x}=u}{=}}\lim\limits_{u\to 3}\left(\dfrac{1}{u^2}f(u)\right)$. $6x\le f(x)\le x^2+9\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}\dfrac{6}{x}\le\dfrac{1}{x^2}f(x)\le 1+\dfrac{9}{x^2}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6}{x}=2$, $\lim\limits_{x\to 3}\left(1+\dfrac{9}{x^2}\right)=2$, άρα και $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x^2}f(x)=2$

3.402. $\left|x^2f(x)+\sigma\upsilon\nu x-1\right|\le\eta\mu^4x\Leftrightarrow-\eta\mu^4x\le x^2f(x)+\sigma\upsilon\nu x-1\le\eta\mu^4x\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}$

$$-\frac{\eta\mu^4x}{x^2}+\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\le f(x)\le\frac{\eta\mu^4x}{x^2}+\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu^4x}{x^2}+\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2\eta\mu^2x+\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^2x}{x^2(1+\sigma\upsilon\nu x)}\right)=$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\eta\mu^2x+\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x}\right)=\frac{1}{2}$$

και όμοια $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{\eta\mu^4x}{x^2}+\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\right)=\dfrac{1}{2}$ άρα και $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{1}{2}$.

Επειδή η f είναι συνεχής είναι και $f(0)=\dfrac{1}{2}$.

3.403. $\sqrt{x^2-x+10} \le \sqrt{10}+xf(x) \le \sqrt{10}-\frac{x}{2\sqrt{10}}+x^{10}\eta\mu\frac{1}{x} \overset{x>0}{\Leftrightarrow}$

$\frac{\sqrt{x^2-x+10}-\sqrt{10}}{x} \le f(x) \le -\frac{1}{2\sqrt{10}}+x^9\eta\mu\frac{1}{x}$

$-1\le \eta\mu\frac{1}{x} \le 1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} -x^9 \le x^9\eta\mu\frac{1}{x} \le x^9$ και από το ΚΠ είναι $\lim\limits_{x\to 0} x^9\eta\mu\frac{1}{x}=0$,

οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2\sqrt{10}}+x^9\eta\mu\frac{1}{x}\right)=-\frac{\sqrt{10}}{20}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2-x+10}-\sqrt{10}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x+\cancel{10}-\cancel{10}}{x\left(\sqrt{x^2-x+10}+\sqrt{10}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(2x-1)}{\cancel{x}\left(\sqrt{x^2-x+10}+\sqrt{10}\right)}=-\frac{\sqrt{10}}{20}$$

άρα και $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\frac{\sqrt{10}}{20}$. Επειδή η f είναι συνεχής είναι και $f(0)=-\frac{\sqrt{10}}{20}$.

3.404. **α)** $|f(x)-\eta\mu(x-1)| \le x^2-2x+1=(x-1)^2 \Leftrightarrow -(x-1)^2 \le f(x)-\eta\mu(x-1) \le (x-1)^2 \Leftrightarrow$

$\eta\mu(x-1)-(x-1)^2 \le f(x) \le (x-1)^2+\eta\mu(x-1)$

Για $x=1$ είναι $0\le f(1)\le 0 \Leftrightarrow f(1)=0$. Από ΚΠ είναι και $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$.

β) Για $x>1$ είναι $\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}-(x-1) \le \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \le (x-1)+\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1}\left[(x-1)+\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}\right] \underset{u\to 0^+}{\overset{x-1=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0^+}\left(u+\frac{\eta\mu u}{u}\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to 1}\left[-(x-1)+\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}\right]=1$,

άρα και $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1$. Όμοια και $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1$

3.405. $f^2(x)-2f(x)+1\le x^2 \Leftrightarrow (f(x)-1)^2 \le x^2$. Για $x=0$ είναι:

$(f(0)-1)^2 \le 0 \Leftrightarrow f(0)-1=0 \Leftrightarrow f(0)=1$ και $|f(x)-1| \le |x| \Leftrightarrow 1-|x| \le f(x) \le 1+|x|$.

Από κρ. παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$, άρα f συνεχής στο $x_0=0$.

3.406. Για $x=1$ είναι $f(1)=g(1)=0$ και για $x=2$ είναι $f(2)=g(2)=0$.

$0\le f^2(x) \le f^2(x)+g^2(x)$. Από κρ. παρεμβολής είναι: $\lim\limits_{x\to 1} f^2(x)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=0=f(1)$ και $\lim\limits_{x\to 2} f^2(x)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=0=f(2)$. Όμοια για την g.

3.407. Για $x=0$ είναι $f^2(0)+g^2(0) \le \eta\mu^{2\nu}0=0$. Όμως $f^2(0)+g^2(0)\ge 0$, άρα $f^2(0)+g^2(0)=0$ $\Leftrightarrow f(0)=g(0)=0$. Είναι $0\le f^2(x)+g^2(x) \le \eta\mu^{2\nu}x$ και $\lim\limits_{x\to 0}\eta\mu^{2\nu}x=0$, άρα λόγω του κριτηρίου παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to 0}\left(f^2(x)+g^2(x)\right)=0$.

Είναι $0 \le f^2(x) \le f^2(x)+g^2(x)$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(f^2(x)+g^2(x)\right)=0$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής, προκύπτει ότι: $\lim\limits_{x\to 0} f^2(x)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$ και f συνεχής στο $x_0=0$.

Όμοια και $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$ και g συνεχής στο $x_0=0$.

3.408. Για $x=0$ είναι $f^2(0)+g^2(0)\le 2f(0)\cdot g(0) \Leftrightarrow f^2(0)-2f(0)\cdot g(0)+g^2(0)\le 0 \Leftrightarrow$

$\left(f(0)-g(0)\right)^2 \le 0$. Όμως $\left(f(0)-g(0)\right)^2 \ge 0$, άρα $\left(f(0)-g(0)\right)^2=0 \Leftrightarrow f(0)=g(0)$.

Είναι: $f^2(x)+g^2(x)\le 2f(x)\cdot g(x)+x^2 \Leftrightarrow$

$f^2(x)-2f(x)\cdot g(x)+g^2(x)\le x^2 \Leftrightarrow \left(f(x)-g(x)\right)^2 \le x^2$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$. Οπότε και $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)-g(x)\right)^2 \le 0$. Όμως $\left(f(x)-g(x)\right)^2 \ge 0$ και

$\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)-g(x)\right)^2 \ge 0$. Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)-g(x)\right)^2=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)-g(x)\right)=0$.

Εστω $h(x)=f(x)-g(x) \Leftrightarrow f(x)=h(x)+g(x)$ και $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=0$.

Τότε: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(h(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to 0} h(x)+\lim\limits_{x\to 0} g(x)=g(0)=f(0)$,

άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

3.409. $f^2(x)+4g^2(x)\le 4f(x)g(x)+\eta\mu^2 x \Leftrightarrow 0\le\left(f(x)-2g(x)\right)^2 \le \eta\mu^2 x$

Για $x=0$ είναι $0\le\left(f(0)-2g(0)\right)^2\le 0 \Leftrightarrow \left(f(0)-2g(0)\right)^2=0 \Leftrightarrow f(0)=2g(0)$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\eta\mu^2 x=0$ είναι και $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)-2g(x)\right)^2=0$

$-\sqrt{\left(f(x)-2g(x)\right)^2} \le f(x)-2g(x) \le \sqrt{\left(f(x)-2g(x)\right)^2}$.

Από το Κ.Π. είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)-2g(x)\right)=0$

Εστω $f(x)-2g(x)=h(x) \Leftrightarrow f(x)=2g(x)+h(x)$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2g(x)+h(x)\right)=0$

3.410. Για $x>0$ είναι $f(x)\ge \dfrac{\eta\mu x}{x}+2x+5$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\ge \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}+2x+5\right) \Leftrightarrow f(0)\ge 5$

Για $x<0$ είναι $f(x)\le \dfrac{\eta\mu x}{x}+2x+5$ και $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\le \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}+2x+5\right) \Leftrightarrow f(0)\le 5$.

Άρα $f(0)=5$

3.411. Για $x>2$ είναι $f(x)\ge \dfrac{x^3-6x+4}{x-2}=\dfrac{\cancel{(x-2)}\left(x^2+2x-2\right)}{\cancel{x-2}}=x^2+2x-2$ και

για $x<2$ είναι $f(x)\le \dfrac{x^3-6x+4}{x-2}=x^2+2x-2$, άρα για $x\ne 2$ είναι $f(x)=x^2+2x-2$

$f(2)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+2x-2\right)=6$

3.412. α) Είναι $f^3(x)+2f(x)=x^2 \Leftrightarrow f(x)\left(f^2(x)+2\right)=x^2$ και επειδή $f^2(x)+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει ότι: $f(x)=\dfrac{x^2}{f^2(x)+2}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) $|f(x)|=\left|\dfrac{x^2}{f^2(x)+2}\right|=\dfrac{x^2}{f^2(x)+2}\le\dfrac{x^2}{2}$, αφού $f^2(x)+2\ge 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Είναι $|f(x)|\le\dfrac{x^2}{2}\Leftrightarrow -\dfrac{x^2}{2}\le f(x)\le\dfrac{x^2}{2}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2}=0$ είναι και $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$. Η αρχική σχέση για $x=0$, γίνεται: $f^3(0)+2f(0)=0\Leftrightarrow f(0)\left(f^2(0)+2\right)=0\Leftrightarrow f(0)=0$ ή $f^2(0)+2=0$ που είναι αδύνατο. Άρα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$, οπότε η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

3.413. $f^3(x)+f(x)=3x$ και $f^3(x_0)+f(x_0)=3x_0$ και με αφαίρεση κατά μέλη:

$$f^3(x)-f^3(x_0)+f(x)-f(x_0)=x-x_0\Leftrightarrow f(x)-f(x_0)=\frac{x-x_0}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1}$$

$$|f(x)-f(x_0)|=\frac{|x-x_0|}{|f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1|}<|x-x_0|,$$

γιατί $f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)>0$, αφού έχει $\Delta<0$, άρα $|x-x_0|<f(x)-f(x_0)<|x-x_0|$ και από Κ.Π. είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

3.414. $\dfrac{g(x)-x}{g(x)+x}<0\Leftrightarrow\left(g(x)-x\right)\left(g(x)+x\right)<0\Leftrightarrow g^2(x)-x^2<0\Leftrightarrow g^2(x)<x^2\Leftrightarrow$

$|g(x)|\le|x|\Leftrightarrow-|x|\le g(x)\le|x|$. Από Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$

3.415. α) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{\lambda x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{x\left(\lambda-\frac{2}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\eta\mu\frac{1}{x}}{\lambda-\frac{2}{x}}\overset{\frac{1}{x}=u}{\underset{u\to 0}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\frac{\eta\mu u}{u}}{\lambda-2u}$.

Αν $\lambda>0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{1}{\lambda}$.

Αν $\lambda=0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\frac{\eta\mu u}{u}}{-2u}=\lim\limits_{u\to 0}\left(-\dfrac{\eta\mu u}{u}\cdot\dfrac{1}{2u}\right)=-\infty$

γιατί $\lim\limits_{u\to 0}\left(-\dfrac{\eta\mu u}{u}\right)=-1$ και $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1}{2u}=+\infty$ αφού $u>0$ $(x\to+\infty)$.

β) Είναι $g(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}&,\lambda>0\\ 0&,\lambda=0\end{cases}$, $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}g(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\dfrac{1}{\lambda}=+\infty$, οπότε η g δεν είναι συνεχής στο $x=0$ και είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

3.416. α) Για $x=y=1$ είναι: $f(1)=2f(1)\Leftrightarrow f(1)=0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=1$, ισχύει: $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=0$. Για να είναι η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ αρκεί να είναι συνεχής στο $x_0\in(0,+\infty)$. Δηλαδή $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Θέτουμε $\dfrac{x}{x_0}=\dfrac{h}{1}\Leftrightarrow x=x_0\cdot h$. Όταν $x\to x_0$ είναι $h\to1$.

Τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{h\to1}f(x_0\cdot h)=\lim\limits_{h\to1}\left[f(x_0)+f(h)+(x_0^2-x_0)(h^2-h)\right]=$

$=f(x_0)+\lim\limits_{h\to1}f(h)+0=f(x_0)$

β) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{h\to1}\dfrac{f(x_0h)-f(x_0)}{x_0h-x_0}=\lim\limits_{h\to1}\dfrac{f(h)+(x_0^2-x_0)(h^2-h)}{x_0(h-1)}=$

$=\dfrac{1}{x_0}\cdot\lim\limits_{h\to1}\dfrac{f(h)}{h-1}+\lim\limits_{h\to1}\left(\dfrac{x_0(x_0-1)(h-1)\cdot h}{x_0(h-1)}\right)=\dfrac{1}{x_0}\cdot4+x_0-1=\dfrac{4}{x_0}+x_0-1$

3.417. α) Για $x=0$ είναι $f^2(0)-4f(0)+4=0\Leftrightarrow(f(0)-2)^2=0\Leftrightarrow f(0)=2$

$f^2(x)-4f(x)+4=4-4\sigma\upsilon\nu^2x\Leftrightarrow(f(x)-2)^2=4\eta\mu^2x$

και $\lim\limits_{x\to0}(f(x)-2)^2=\lim\limits_{x\to0}4\eta\mu^2x=0$

$-\sqrt{(f(x)-2)^2}\le f(x)-2\le\sqrt{(f(x)-2)^2}\Leftrightarrow-\sqrt{(f(x)-2)^2}+2\le f(x)\le\sqrt{(f(x)-2)^2}+2$

Από το κρ. παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to0}f(x)=2=f(0)$

β) $\lim\limits_{x\to0^+}\left[x^2f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]\overset{\frac{1}{x}=u}{\underset{u\to+\infty}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{f(u)}{u^2}$

$-\sqrt{(f(u)-2)^2}+2\le f(u)\le\sqrt{(f(u)-2)^2}+2\overset{u>0}{\Leftrightarrow}\dfrac{-\sqrt{(f(u)-2)^2}+2}{u^2}\le\dfrac{f(u)}{u^2}\le\dfrac{\sqrt{(f(u)-2)^2}+2}{u^2}$.

Επειδή $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\sqrt{(f(u)-2)^2}+2}{u^2}=0$ είναι και $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{f(u)}{u^2}=0$.

Όμοια και $\lim\limits_{x\to0^-}\left[x^2f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]\overset{\frac{1}{x}=u}{\underset{u\to-\infty}{=}}\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{f(u)}{u^2}=0$

3.418. α) Για $x\neq2$ είναι $\dfrac{f(x)-3}{x-2}=g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)(x-2)+3$ και $f(2)=\lim\limits_{x\to2}f(x)=3$

β) Επειδή η f είναι περιττή ισχύει ότι $f(-2)=-f(2)=-3$

και $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\left[-f(-x)\right]\overset{-x=u}{\underset{u\to2}{=}}\lim\limits_{u\to2}\left[-f(u)\right]=-3=f(-2)$

γ) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f(x)+3}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{-f(-x)+3}{x+2}\overset{-x=u}{\underset{u\to2}{=}}\lim\limits_{u\to2}\dfrac{-f(u)+3}{-u+2}=\lim\limits_{u\to2}\dfrac{f(u)-3}{u-2}=6$

3.419. α) Για $x=\dfrac{\pi}{2}$ είναι $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=3$ και από Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}g(x)=3$

β) $1+2\sqrt{\eta\mu x}\le g(x)\le 2+\eta\mu x \Leftrightarrow 2\sqrt{\eta\mu x}-2\le 3-g(x)\le \eta\mu x-1<0$

για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, άρα $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[|3-g(x)|-xg(x)-3\right]\frac{1}{g(x)-3}=+\infty$,

γιατί $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[|3-g(x)|-xg(x)-3\right]=-\frac{3\pi}{2}-3$ και $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{g(x)-3}=-\infty$

3.420. α) $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\alpha x^2+\beta x-6\right)\Leftrightarrow 0=4\alpha+2\beta-6\Leftrightarrow \beta=3-2\alpha$

Για $x\neq 2$ είναι $f(x)=\frac{\alpha x^2+(3-2\alpha)x-6}{x-2}=\frac{\alpha x\cancel{(x-2)}+3\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}$

και $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=2\alpha+3=5\Leftrightarrow \alpha=1$ και $\beta=3-2=1$

β) $(x-2)f(x)=x^2+x-6\Leftrightarrow f(x)=\frac{\cancel{(x-2)}(x+3)}{\cancel{x-2}}=x+3$, $x\neq 2$. Επειδή η f είναι συνεχής και $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x+3)=5=f(2)$, είναι $f(x)=x+3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Θέτουμε $\frac{1}{f(x)}=u$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f^2(x)\eta\mu\frac{1}{f(x)}\right]=\lim\limits_{u\to 0^+}\frac{\eta\mu u}{u}\frac{1}{u}=+\infty$

3.421. α) Για $y=x_0$: $|f(x)-f(x_0)|\le\rho|x-x_0|\Leftrightarrow -\rho|x-x_0|\le f(x)-f(x_0)\le\rho|x-x_0|\Leftrightarrow$

$f(x_0)-\rho|x-x_0|\le f(x)\le f(x_0)+\rho|x-x_0|$

και με Κ.Π. είναι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

β) Εστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\neq x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1)=x_1$ και $f(x_2)=x_2$,

τότε $|f(x_1)-f(x_2)|\le\rho|x_1-x_2|\Leftrightarrow \cancel{|x_1-x_2|}\le\rho\cancel{|x_1-x_2|}\Leftrightarrow \rho\ge 1$ άτοπο.

Θεωρήματα συνέχειας

3.466. Για $1 \le x < 2$ η $f(x) = 2x^2 - x - 3$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική, για $2 < x \le 3$ η $f(x) = x^2 - 1$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Εξετάζουμε τη συνέχεια στο $x_0 = 2$.

Είναι: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (2x^2 - x - 3) = 3$ και $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - 1) = 3 = f(2)$.

Οπότε η f είναι συνεχής στο $[1,3]$.

Επίσης, $f(1) = 2 \cdot 1^2 - 1 - 3 = -2 < 0$, $f(3) = 3^2 - 1 = 8 > 0$, οπότε $f(1) \cdot f(3) < 0$.

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θ. Bolzano, άρα υπάρχει $\rho \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $f(\rho) = 0$.

Λύνοντας την εξίσωση $f(x) = 0$ έχουμε: $2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \in (1,2)$ ή $x = -1 \notin (1,2)$ και

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \notin (2,3)$ ή $x = 1 \notin (2,3)$. Άρα η ρίζα $\rho = \frac{3}{2} \in (1,3)$.

3.467. Είναι $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (x^2 + x - 6) = 6 = f(3)$, ενώ $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x^2 - 6x + 8) = -1$, οπότε η f δεν είναι συνεχής στο $[0,6]$. Όμως η εξίσωση $x^2 + x - 6 = 0$ στο διάστημα $(0,3)$ έχει λύση $x = 2$ και η εξίσωση $x^2 - 6x + 8 = 0$ στο διάστημα $(3,6)$ έχει λύση $x = 4$.

3.468. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -2$, η f δεν είναι συνεχής στο 2.

Για $x \in (0,2]$ είναι $f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi = 1$ ή $\xi = 3$ που απορρίπτεται.

Για $x \in (2,4)$ είναι $f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi = 3$

3.469. **α)** Εστω $f(x) = x^4 + 8x^3 - x^2 + x - 3$. $f(0) = -3$, $f(1) = 6$, δηλαδή $f(0)f(1) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

β) Εστω $f(x) = x\eta\mu x - e^{2x}\sigma\upsilon\nu x$. $f(0) = -1$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, δηλαδή $f(0)f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

γ) Εστω $f(x) = 5x + 1 - 2\sigma\upsilon\nu x$. Είναι $f(0) = -1$, $f(\pi) = 5\pi - 1$, δηλαδή $f(0)f(\pi) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$, η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,\pi)$.

δ) Εστω $f(x) = x^6 + 8x^4 + \lambda^2 x^2 + \lambda x - 8$. Είναι $f(-1) = \lambda^2 - \lambda + 1 > 0$ $(\Delta < 0)$, $f(0) = -8$, δηλαδή $f(-1)f(0) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[-1,0]$, η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-1,0)$.

3.470. **α)** Εστω $f(x) = (x+2)(x^{10}+1) + (x-2)(x^{20}+1)$, $x \in [-2,2]$.

Είναι $f(-2) = -4(2^{20}+1) < 0$, $f(2) = 4(2^{10}+1) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[-2,2]$ η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^{10}+1}{x-2} + \frac{x^{20}+1}{x+2} = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-2,2)$.

β) Εστω $f(x)=x\eta\mu x-e^x\sigma\upsilon\nu x$. Είναι $f(0)=-1<0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}>0$ και f συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, άρα η $f(x)=0\Leftrightarrow \frac{x}{\sigma\upsilon\nu x}-\frac{e^x}{\eta\mu x}=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

3.471. $\frac{2\eta\mu x_0}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x_0}=\frac{\sigma\upsilon\nu x_0}{\eta\mu^2 x_0}+1\Leftrightarrow 2\eta\mu^3 x_0=\sigma\upsilon\nu x_0\left(1+\sigma\upsilon\nu^2 x_0\right)+\left(1+\sigma\upsilon\nu^2 x_0\right)\eta\mu^2 x_0$

Εστω $f(x)=2\eta\mu^3 x-\left(1+\sigma\upsilon\nu^2 x\right)\sigma\upsilon\nu x-\left(1+\sigma\upsilon\nu^2 x\right)\eta\mu^2 x$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $f(0)=-2$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, οπότε λόγω Θ. Bolzano...

3.472. Εστω $f(x)=x^4+3x^3+2x+5$, $x\in[-2,0]$.
Είναι $f(-2)=16-24-4+5=-7<0$ και $f(0)=5>0$, άρα λόγω Θ. Bolzano...

3.473. Είναι $f^2(x)-g^2(x)=-5x\Leftrightarrow \left(f(x)+g(x)\right)\left(f(x)-g(x)\right)=-5x$.
Επειδή $f(x)>g(x)$ είναι $f(x)-g(x)>0$ άρα $f(x)+g(x)=\frac{-5x}{f(x)-g(x)}$.
Εστω $h(x)=f(x)+g(x)=-\frac{5x}{f(x)-g(x)}$, $x\in[\alpha,\beta]$. Η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων $h(\alpha)=\frac{-5\alpha}{f(\alpha)-g(\alpha)}>0$ και $h(\beta)=\frac{-5\beta}{f(\beta)-g(\beta)}<0$ δηλαδή $h(\alpha)\cdot h(\beta)<0$. Άρα λόγω του θ. Bolzano η εξίσωση $h(x)=0\Leftrightarrow f(x)+g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α,β).

3.474. Εστω $g(x)=f(x)-\left(e^2+1\right)\ln x+x$, $x\in[1,e]$. $g(1)=f(1)+1$ και $g(e)=f(e)-e^2-1+e$.
Είναι $2\ln x-x<f(x)<\ln^2 x+x$, άρα $2\ln1-1<f(1)<\ln^2 1+1\Leftrightarrow 0<f(1)+1<1\Leftrightarrow 0<g(1)<1$ και $2\ln e-e<f(e)<\ln^2 e+e\Leftrightarrow 1-e^2<f(e)-e^2-1+e<e^2-2e$, άρα $g(e)<0$ και λόγω του Θ. Bolzano...

3.475. Εστω $g(x)=f(x)-e^3x$, $x\in[0,1]$.
$2\le f(0)<e^2\Rightarrow g(0)>0$ και $3\le f(1)\le e^3\Leftrightarrow 3-e^3\le f(1)-e^3<0\Rightarrow g(1)<0$, δηλαδή $g(0)g(1)<0$ και επειδή η g είναι συνεχής, από το Θ. Bolzano η $g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=e^3x$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(0,1)$

3.476. $f(-2)=0$, $f(1)=1$, $g(x)=f(x)-3x$, $x\in[-2,1]$
$g(-2)=f(-2)+6=6>0$, $g(1)=f(1)-3=-2<0$ και Θ. Bolzano...

3.477. $f(-1)f(1)<0\Leftrightarrow\left(3^\lambda-9\right)\left(3^\lambda-1\right)<0\Leftrightarrow\lambda\in(0,2)$

3.478. Είναι $h(x)=\dfrac{f(x)+g(x)}{2}=\dfrac{x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma-x^3+\alpha x^2-\beta x+\gamma}{2}=\alpha x^2+\gamma$.

Η h είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$ ως πολυωνυμική. Είναι: $h(\rho_1)=\alpha\rho_1^2+\gamma$. Όμως το ρ_1 είναι ρίζα της f, οπότε: $f(\rho_1)=0\Leftrightarrow \rho_1^3+\alpha\rho_1^2+\beta\rho_1+\gamma=0\Leftrightarrow \alpha\rho_1^2+\gamma=-\rho_1(\rho_1^2+\beta)$.

Άρα $h(\rho_1)=-\rho_1(\rho_1^2+\beta)<0$. $h(\rho_2)=\alpha\rho_2^2+\gamma$. Όμως $g(\rho_2)=0\Leftrightarrow$

$-\rho_2^3+\alpha\rho_2^2-\beta\rho_2+\gamma=0\Leftrightarrow \alpha\rho_2^2+\gamma=\rho_2(\rho_2^2+\beta)$ άρα $h(\rho_2)=\rho_2\cdot(\rho_2^2+\beta)>0$.

Δηλαδή $h(\rho_1)\cdot h(\rho_2)<0$, οπότε λόγω του θ. Bolzano η εξίσωση $h(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (ρ_1,ρ_2).

3.479. **α)** $e^{f(f(x))}=e^{g(f(x))+f(x)}\Leftrightarrow f(f(x))=g(f(x))+f(x)$.

Αν $f(x)=u\in\mathbb{R}$, τότε $f(u)-g(u)=u$, οπότε και $f(x)-g(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Είναι $f(x)=g(x)+x$, στο $[\rho_1,\rho_2]$. Άρα $f(\rho_1)=g(\rho_1)+\rho_1=\rho_1$, $f(\rho_2)=g(\rho_2)+\rho_2=\rho_2$, και $f(\rho_1)\cdot f(\rho_2)=\rho_1\cdot\rho_2<0$ και λόγω του Θ. Bolzano...

3.480. Η συνάρτηση $g(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική.

Είναι: $\left.\begin{matrix} g(0)=\gamma \\ g(1)=\alpha+\beta+\gamma\end{matrix}\right\}$ οπότε $g(0)\cdot g(1)=\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=\gamma^2+\beta\gamma+\alpha\gamma<0$

άρα από θ. Bolzano $\exists\rho\in(0,1): g(\rho)=0$, δηλαδή το τριώνυμο πρέπει να έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα, άρα $\Delta\geq 0$.

Αν $\Delta=0$ τότε $\rho=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$ και $g(x)=\alpha\left(x+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2$.

Όμως $g(0)\cdot g(1)=\alpha\left(\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2\cdot\alpha\left(1+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\alpha^2\dfrac{\beta^2}{4\alpha^2}\left(1+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)\geq 0$ άτοπο.

Άρα $\Delta>0\Leftrightarrow\beta^2-4\alpha\gamma>0\Leftrightarrow\beta^2>4\alpha\gamma$.

3.481. Εστω $f(f(\rho))=\rho$. Έστω $g(x)=f(x)-x$.

Είναι $g(\rho)=f(\rho)-\rho$ και $g(f(\rho))=f(f(\rho))-f(\rho)=\rho-f(\rho)=-(f(\rho)-\rho)$,

άρα $g(\rho)g(f(\rho))=-(f(\rho)-\rho)^2\leq 0$, άρα Θ. Bolzano...

3.482. **α)** Η σχέση (1) για $x=-2$ γίνεται: $f^2(f(-2))+f(f^2(-2))=3(-2)^2\Leftrightarrow$

$f^2(-2)+f((-2)^2)=12\Leftrightarrow(-2)^2+f(4)=12\Leftrightarrow f(4)=8>0$.

Είναι $f(-2)f(4)<0$ και η f είναι συνεχής στο $[-2,4]$ οπότε λόγω του θεωρήματος Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-2,4)$.

β) Στη σχέση (1) για $x=\xi$ έχουμε: $f^2(f(\xi))+f(f^2(\xi))=3\xi^2\Leftrightarrow$

$f^2(\xi)+f(\xi^2)=3\xi^2\Leftrightarrow\xi^2+f(\xi^2)=3\xi^2\Leftrightarrow f(\xi^2)=2\xi^2>0$. Δηλαδή $f(\xi)f(\xi^2)<0$, οπότε λόγω του θεωρήματος Bolzano υπάρχει $x_0\in(\xi,\xi^2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

3.483. Εστω $g(2)g(3)<0$, τότε λόγω του Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$, τότε $f(x_0)=(x_0^2-5x_0+6)g(x_0)=0$, άτοπο αφού $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(2,3)$.

3.484. Για $x=\alpha$ είναι $f(\alpha)f(\alpha)\geq 0 \Leftrightarrow f^2(\alpha)\geq 0$ που ισχύει.

Αν $x=\beta$, τότε $f(\alpha)f(\beta)\geq 0$ και ισχύει από την υπόθεση.

Εστω $x\in(\alpha,\beta)$.

Επειδή $f(\alpha)f(\beta)>0$, οι αριθμοί $f(\alpha),f(\beta)$ είναι ομόσημοι.

Εστω ότι $f(\alpha)>0$, $f(\beta)>0$, τότε αν $f(\alpha)f(x)<0$, θα ήταν $f(x)<0$ και $f(\beta)f(x)<0$, οπλότε από το Θ.Bolzano η f θα είχε τουλάχιστον μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα (α,x) και (x,β), το οποίο όμως είναι άτοπο, αφού το ρ είναι η μοναδική ρίζα της $f(x)=0$ στο (α,β). Όμοια αν $f(\alpha)<0$ και $f(\beta)<0$.

3.485. Επειδή $g(\kappa)+g(\lambda)+g(\mu)=0$ και $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ένα από τα $g(\kappa),g(\lambda),g(\mu)$ θα έχει διαφορετικό πρόσημο από τα άλλα δύο. Έστω $g(\kappa)$ ετερόσημο από τα $g(\lambda),g(\mu)$, τότε $g(\lambda)g(\kappa)<0$. Αν η g ήταν συνεχής, λόγω του Θ. Bolzano θα υπήρχε $\xi\in(\kappa,\lambda)$ ή στο (λ,κ) τέτοιο ώστε $g(\xi)=0$ που είναι αδύνατο.

3.486. $\frac{1}{x}-e^x+4=0 \Leftrightarrow 1-xe^x+4x=0$.

Εστω $f(x)=1-xe^x+4x$, $x\in[0,2]$. Είναι $f(0)=1$ και $f(2)=9-2e^2<0$, και η f είναι συνεχής, άρα από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}-e^x+4=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,2)$.

3.487. Εστω $f(x)=\ln x+x-e^{-2x}$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$, άρα υπάρχει $0<\alpha<1$ τέτοιο ώστε $f(\alpha)<0$. Επειδή $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$, υπάρχει $\beta>1$ τέτοιο, ώστε $f(\beta)>0$. Επειδή $f(\alpha)f(\beta)<0$ και η f είναι συνεχής, από το Θ. Bolzano η $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(\alpha,\beta)\subseteq(0,+\infty)$

3.488. **α)** Για $x=0$ είναι $f(3)<f(0)=0$ και για $x=\frac{1}{3}$ είναι $f(1)>f(4)=0$, άρα $f(1)f(3)<0$ και f συνεχής, άρα από το Θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in(1,3)$ τέτοιος ώστε $f(\xi)=0$

β) Για $x=\frac{\xi}{3}$ είναι $f(\xi+3)<f(\xi)=0$ και για $x=\frac{\xi}{3}-1$ είναι $f(\xi-3)>f(\xi)=0$, δηλαδή $f(\xi-3)f(\xi+3)<0$ και λόγω του Θ. Bolzano...

3.489. Εστω $g(x)=f(x)-\frac{1}{x}$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$, άρα υπάρχει $0<\alpha<1$ τέτοιο ώστε $f(\alpha)<0$. Είναι $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, άρα υπάρχει $\beta>1$ τέτοιο ώστε $f(\beta)>0$. Από το Θ. Bolzano η $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(\alpha,\beta)\subseteq(0,+\infty)$.

3.490. **α)** Εστω $g(x)=\frac{f(x)}{x^\nu}$, $x\neq 0$. Τότε $f(x)=x^\nu\cdot g(x)$ με $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=0$. Τότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+x^\nu\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^\nu\cdot g(x)+x^\nu\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x^\nu\cdot\left(g(x)+1\right)\right]=+\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+x^\nu\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[x^\nu\cdot\left(g(x)+1\right)\right]=\begin{cases}+\infty, & \nu=\text{άρτιος}\\ -\infty, & \nu=\text{περιττός}\end{cases}$$

β) Εστω $g(x)=f(x)+x^\nu$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$, άρα υπάρχει $\alpha<0: f(\alpha)<0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, άρα υπάρχει $\beta>0: f(\beta)>0$. Δηλαδή $g(\alpha)\cdot g(\beta)<0$, άρα λόγω Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta): g(x_0)=0$.

3.491. **α)** $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{-2x}+e^{-2x}+1-x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-2x}+\frac{1}{xe^{2x}}+\frac{1}{x}-1\right)=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\frac{f(x)}{x}=-\infty$$

β) Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2$, υπάρχει $\alpha\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\alpha)>0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, υπάρχει $\beta>1$ τέτοιο ώστε $f(\beta)<0$ και Θ. Bolzano στο $[\alpha,\beta]$.

3.492. Εστω $h(x)=f(x)-g(x)=x^3-3x^2-3x+6$, $x\in[1,2]$.

Είναι $h(1)=1$, $h(2)=-4$ και επειδή η h είναι συνεχής ως πολυωνυμική, λόγω του Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(1,2)$: $h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=g(x_0)$

3.493. Εστω $h(x)=f(x)-g(x)=\ln(x+1)-3x+2$, $x\in[0,1]$.

Είναι $h(0)=2$, $h(1)=\ln 2-1<0$ και επειδή η h είναι συνεχής ως άθροισμα σ.σ., λόγω του Θ.Β υπάρχει $x_0\in(0,1)$: $h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=g(x_0)$

3.494. Για $x>0$ είναι $\frac{\eta\mu x}{x}\le f(x)\le x+1$ και από Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1=f(0)$ και για $x=2$ είναι $\eta\mu 2\le 2f(2)\le 6\Leftrightarrow\frac{\eta\mu 2}{2}\le f(2)\le 3$. Εστω $g(x)=f(x)+x^2-x-2$, $x\in[0,2]$.

Είναι $g(0)=f(0)-2=-1<0$, $g(2)=f(2)\ge\frac{\eta\mu 2}{2}>0$, άρα Θ.Β...

3.495. $f(\xi)\cdot g(\xi)=\xi^2-\xi\Leftrightarrow f(\xi)\cdot g(\xi)-\xi(\xi-1)=0$.

Εστω $h(x)=f(x)\cdot g(x)-x\cdot(x-1)$, $x\in[\alpha,\alpha+1]$.

Η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\alpha+1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Είναι:

$h(\alpha)=f(\alpha)\cdot g(\alpha)-\alpha(\alpha-1)=(\alpha-1)\cdot g(\alpha)-\alpha(\alpha-1)=(\alpha-1)(g(\alpha)-\alpha)$.

Επειδή είναι $\alpha>1$ ισχύει $\alpha-1>0$. Επειδή $\alpha<g(x)<\alpha+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι και

$\alpha<g(\alpha)<\alpha+1$, άρα $g(\alpha)-\alpha>0$ και $h(\alpha)>0$.

$h(\alpha+1)=f(\alpha+1)\cdot g(\alpha+1)-(\alpha+1)\cdot\alpha=\alpha g(\alpha+1)-(\alpha+1)\cdot\alpha=\alpha[g(\alpha+1)-(\alpha+1)]$

Είναι: $\alpha>0$ και $\alpha<g(\alpha+1)<\alpha+1$, δηλαδή $g(\alpha+1)-(\alpha+1)<0$, οπότε $h(\alpha+1)<0$.

Δηλαδή ισχύει: $h(\alpha)\cdot h(\alpha+1)<0$. Άρα, λόγω του θ. Bolzano, υπάρχει $\xi\in(\alpha,\alpha+1)$ τέτοιο ώστε: $h(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)\cdot g(\xi)-\xi(\xi-1)=0\Leftrightarrow f(\xi)\cdot g(\xi)=\xi^2-\xi$.

3.496. Εστω $h(x)=f(x)-g(x)-1$, $x\in[\alpha,\beta]$. Η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Είναι:

$h(\alpha)=f(\alpha)-g(\alpha)-1=f(\alpha)-f(\beta)-1>1-1=0$ και $h(\beta)=f(\beta)-g(\beta)-1=f(\beta)-f(\alpha)-1$

$f(\alpha)-f(\beta)>1\Leftrightarrow f(\beta)-f(\alpha)<-1\Leftrightarrow f(\beta)-f(\alpha)-1<-2\Leftrightarrow h(\beta)<-2<0$.

Δηλαδή $h(\alpha)h(\beta)<0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$h(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)-g(\xi)-1=0\Leftrightarrow f(\xi)=g(\xi)+1$.

3.497. Εστω $g(x)=f(x)-2x^2$, $x\in[\alpha,\beta]$.

Είναι $g(\alpha)=f(\alpha)-2\alpha^2=2(\beta^2-\alpha^2)$, $g(\beta)=f(\beta)-2\beta^2=-2(\beta^2-\alpha^2)$, δηλαδή

$g(\alpha)g(\beta)<0$ και επειδή η g είναι συνεχής, από το Θ.Β υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=2x_0^{\ 2}$.

3.498. Εστω $g(x)=f(x)(x^2-5x+6)+2x-5$, $x\in[2,3]$. $g(2)=-1$, $g(3)=1$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις σ.σ., λόγω του Θ.Β υπάρχει $x_0\in(2,3)$ τέτοιο ώστε

$$g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=\frac{5-2x_0}{x_0^{\ 2}-5x_0+6}.$$

3.499. Εστω $h(x)=f(x)+g(x)-x^2f(x)g(x)$, $x\in[0,1]$.

Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Είναι $h(0)=f(0)+g(0)$

Για $x=0$ είναι $10\le f(0)\le 11$, $12\le g(0)\le 13$ οπότε $22\le f(0)+g(0)\le 24$, άρα $h(0)>0$.

Είναι $h(1)=f(1)+g(1)-f(1)g(1)$

Για $x=1$ είναι $10\le f(1)\le 11$, $12\le g(1)\le 13$ οπότε $22\le f(1)+g(1)\le 24$

και $120\le f(1)g(1)\le 143$. Δηλαδή $f(1)+g(1)\le 24<120\le f(1)g(1)$,

άρα $f(1)+g(1)-f(1)g(1)<0\Leftrightarrow h(1)<0$.

Επειδή $h(0)\cdot h(1)<0$ λόγω του θεωρήματος Bolzano υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε:

$h(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)+g(\xi)=\xi^2f(\xi)g(\xi)$.

3.500. Είναι $f^2(x)+g^2(x)=2x\left[f(x)-g(x)\right]+x^6-2x^2-1 \Leftrightarrow$

$f^2(x)+g^2(x)=2xf(x)-2xg(x)+x^6-2x^2-1 \Leftrightarrow$

$f^2(x)-2xf(x)+x^2+g^2(x)+2xg(x)+x^2=x^6-1 \Leftrightarrow$

$\left(f(x)-x\right)^2+\left(g(x)+x\right)^2=x^6-1 \quad (1)$

Για $x=1$ η (1) γίνεται $\left(f(1)-1\right)^2+\left(g(1)+1\right)^2=0 \Leftrightarrow f(1)=1$ και $g(1)=-1$.

Για $x=-1$ η (1) γίνεται $\left(f(-1)+1\right)^2+\left(g(-1)-1\right)^2=0 \Leftrightarrow f(-1)=-1$ και $g(-1)=1$.

Εστω η συνάρτηση $h(x)=4f(x)+5g(x)$ η οποία είναι συνεχής στο $[-1,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Είναι $h(-1)=4f(-1)+5g(-1)=4\cdot(-1)+5\cdot 1=1>0$ και $h(1)=4f(1)+5g(1)=4\cdot 1+5\cdot(-1)=-1<0$, δηλαδή $h(-1)h(1)<0$ οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε $h(\xi)=0 \Leftrightarrow 4f(\xi)+5g(\xi)=0$.

3.501. Εστω $g(x)=f^2(x)-f(x)+x$, $x\in[0,2]$.

$g(0)=f^2(0)-f(0)=f(0)\left(f(0)-1\right)<0$, $g(2)=f^2(2)-f(2)+2>0$, αφού έχει $\Delta<0$, άρα Θ.Β....

3.502. $\dfrac{e+1}{e}<\kappa<e^8+1 \Leftrightarrow \dfrac{e+1}{e}-1<\kappa-1<e^8 \Leftrightarrow \dfrac{1}{e}<\kappa-1<e^8 \Leftrightarrow \ln\dfrac{1}{e}<\ln(\kappa-1)<\ln e^8 \Leftrightarrow$

$-1<\ln(\kappa-1)<8 \Leftrightarrow -1<g(\kappa)<8$

Εστω $h(x)=f(x)-g(\kappa)$, $x\in[1,2]$. Είναι $h(1)=f(1)-g(\kappa)=-1-g(\kappa)<0$, γιατί $-7<1-g(\kappa)<0$ και $h(2)=f(2)-g(\kappa)=8-g(\kappa)>0$, άρα Θ. Bolzano...

3.503. **α)** $-\eta\mu^4 x\le xf(x)-\sqrt{x^2+x+1}+1\le \eta\mu^4 x \Leftrightarrow$

$$-\frac{\eta\mu^4 x}{x}+\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}\le f(x)\le \frac{\eta\mu^4 x}{x}+\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x},\ x>0.$$

Από Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\dfrac{1}{2}$ και επειδή η f είναι συνεχής είναι και $f(0)=\dfrac{1}{2}$.

β) Είναι $f(0)+f(1)=e^0-5 \Leftrightarrow f(1)=-\dfrac{9}{2}$. Εστω $g(x)=f(x)-x+5$, $x\in[0,1]$.

Είναι $g(0)=f(0)+5=\dfrac{11}{2}>0$, $g(1)=f(1)+4=-\dfrac{1}{2}<0$ και Θ. Bolzano...

3.504. Αρκεί να υπάρχει $x_0\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=g(x_0) \Leftrightarrow f(x_0)-g(x_0)=0$.

Εστω $h(x)=f(x)-g(x)=f(x)-\dfrac{x}{2}+1$, $x_0\in[0,2]$. Είναι $h(0)=f(0)+1$ και $h(2)=f(2)$.

Παρατηρούμε ότι για να εφαρμόσουμε το θ. Bolzano για την h στο $[0,2]$ πρέπει να υπολογίσουμε τα $f(0), f(2)$.

Είναι: $|xf(x)-2\eta\mu x|\le x^2 \Leftrightarrow -x^2\le xf(x)-2\eta\mu x\le x^2 \Leftrightarrow -x^2+2\eta\mu x\le xf(x)\le x^2+2\eta\mu x$.

Για $x>0$ είναι: $\frac{-x^2}{x}+\frac{2\eta\mu x}{x}\le f(x)\le\frac{x^2}{x}+\frac{2\eta\mu x}{x}\Leftrightarrow -x+\frac{2\eta\mu x}{x}\le f(x)\le x+\frac{2\eta\mu x}{x}$

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}\left(-x+\frac{2\eta\mu x}{x}\right)=2$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\left(x+\frac{2\eta\mu x}{x}\right)=2$, οπότε λόγω του κριτηρίου παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=2$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, ισχύει: $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)=2$.

Δηλαδή $f(0)=2$ και $h(0)=2+1=3$.

Είναι $f(x)+f(x+2)=x^2-2$ και για $x=0$ είναι: $f(0)+f(2)=-2\Leftrightarrow f(2)=-4$.

Οπότε $h(2)=-4$. Δηλαδή $h(0)\cdot h(2)<0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $[0,2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, λόγω του θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=g(x_0)$.

3.505. Εστω $h(x)=\rho\cdot f(x)+(1-\rho)\cdot g(x)-x$, $x\in[\alpha,\beta]$.

Η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι: $h(\alpha)=\rho\cdot f(\alpha)+(1-\rho)\cdot g(\alpha)-\alpha=\rho\cdot f(\alpha)+g(\alpha)-\rho\cdot g(\alpha)-\alpha=$

$\rho\cdot\alpha+g(\alpha)-\rho\cdot g(\alpha)-\alpha=(\rho-1)\cdot\alpha-g(\alpha)\cdot(\rho-1)=(\rho-1)\cdot(\alpha-g(\alpha))$.

Επειδή $f(x)>g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, ισχύει: $f(\alpha)>g(\alpha)\Leftrightarrow\alpha>g(\alpha)\Leftrightarrow\alpha-g(\alpha)>0$ και $0<\rho<1\Leftrightarrow\rho-1<0$. Άρα $h(\alpha)<0$.

Επίσης $h(\beta)=\rho\cdot f(\beta)+(1-\rho)\cdot g(\beta)-\beta=\rho\cdot f(\beta)+(1-\rho)\beta-\beta=\rho\cdot f(\beta)-\rho\cdot\beta=\rho\cdot(f(\beta)-\beta)$

Είναι $f(\beta)>g(\beta)\Leftrightarrow f(\beta)-\beta>0$ και επειδή $\rho>0$ είναι $h(\beta)>0$.

Δηλαδή $h(\alpha)\cdot h(\beta)<0$, οπότε λόγω του θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $h(x_0)=0\Leftrightarrow\rho\cdot f(x_0)+(1-\rho)\cdot g(x_0)=x_0$.

3.506. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, για το σύνολο τιμών της ισχύει:

$f([0,1])=[f(0),f(1)]$. Άρα $f(0)=0$ και $f(1)=1$.

Επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$, για το σύνολο τιμών της ισχύει:

$g([0,1])=[g(1),g(0)]$. Άρα $g(0)=1$ και $g(1)=0$.

Είναι $(f\circ g)(\xi)=(g\circ f)(\xi)+2\xi^2-1\Leftrightarrow f(g(\xi))-g(f(\xi))-2\xi^2+1=0$.

Εστω η συνάρτηση $h(x)=f(g(x))-g(f(x))-2x^2+1$, $x\in[0,1]$.

Η h είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ ως σύνθεση και άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

$h(0)=f(g(0))-g(f(0))+1=f(1)-g(0)+1=1-1+1=1>0$ και

$h(1)=f(g(1))-g(f(1))-2+1=f(0)-g(1)-1=0-0-1=-1<0$, δηλαδή

$h(0)h(1)<0$, άρα λόγω του θεωρήματος Bolzano υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε:

$h(\xi)=0\Leftrightarrow(f\circ g)(\xi)=(g\circ f)(\xi)+2\xi^2-1$

3.507. Εστω $f(t), g(t)$ οι συναρτήσεις που εκφράζουν την απόσταση της αμαξοστοιχίας από την Αθήνα, την πρώτη και τη δεύτερη ημέρα αντίστοιχα. Επειδή το δρομολόγιο ξεκινά στις 7 το πρωί και τελειώνει στις 5 το απόγευμα, ισχύει $7 \le t \le 17$.
Εστω x km η απόσταση Αθήνα – Αλεξανδρούπολη. Τότε στις 7π.μ. ισχύει $f(7)=0$ γιατί το τραίνο εκείνη τη στιγμή ξεκινά από την Αθήνα και $g(7)=x$ γιατί την άλλη ημέρα στις 7π.μ. το τραίνο απέχει από την Αθήνα x km.
Όμοια για τις 17μ.μ., ισχύει: $f(17)=x$ και $g(17)=0$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in (7,17)$ τέτοια ώστε $f(t_0)=g(t_0)$.
Εστω $h(t)=f(t)-g(t)$, $t \in [7,17]$. Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο $[7,17]$ και η h είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων είναι: $h(7)=f(7)-g(7)=-x<0$ και $h(17)=f(17)-g(17)=x>0$. Δηλαδή $h(7)\cdot h(17)<0$, οπότε λόγω του θ. Bolzano υπάρχει $t \in (7,17)$ τέτοιο ώστε: $h(t)=0 \Leftrightarrow f(t_0)-g(t_0)=0 \Leftrightarrow f(t_0)=g(t_0)$.

3.508. **α)** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{ημx}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} συνx=1$ και $f(0)=1$, άρα f συνεχής στο 0 και επειδή είναι συνεχής και στα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Εστω $g(x)=f(x)-f(x-f(x))$, $x \in [0,\pi]$.

$g(0)=f(0)-f(f(0))=1-f(1)=1-συν1>0$,

$g(\pi)=f(\pi)-f(\pi-f(\pi))=-1-f(\pi+1)=-1-συν(\pi+1)<0$ και Θ.Β.....

3.509. Είναι: $f(\alpha)+f(\alpha+1)=0 \Leftrightarrow f(\alpha)=-f(\alpha+1)$. Οπότε: $f(\alpha)\cdot f(\alpha+1)=-f^2(\alpha+1)\le 0$.

- Αν $f(\alpha)\cdot f(\alpha+1)=0$ τότε $f(\alpha)=0$ ή $f(\alpha+1)=0$ οπότε οι αριθμοί $\alpha, \alpha+1$ είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.
- Αν $f(\alpha)\cdot f(\alpha+1)<0$ τότε, επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\alpha+1]$, λόγω του θεωρήματος Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[\alpha,\alpha+1]$.

Άρα γενικά η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[\alpha,\alpha+1]$.

3.510. $f(0)f(1)=-f^2(1)\le 0$.
Αν $f(0)f(1)<0$, τότε από το θ.Β η $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.
Αν $f(0)f(1)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$ ή $f(1)=0$ η ρίζα είναι το 0 ή το 1.

3.511. $f(\alpha)=-e^{\alpha-\beta}f(\beta)$, $f(\alpha)f(\beta)=-e^{\alpha-\beta}f^2(\beta)\le 0$.
Αν $f(\alpha)f(\beta)<0$, τότε από το θ.Β η $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α,β).
Αν $f(\alpha)f(\beta)=0 \Leftrightarrow f(\alpha)=0$ ή $f(\beta)=0$ η ρίζα είναι το α ή το β.

3.512. $f(\alpha)f(\alpha+1)=-f^2(\alpha)\le 0$
Αν $f(\alpha)f(\alpha+1)<0$, τότε από το θ.Β η $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(\alpha,\alpha+1)$.

Αν $f(\alpha)f(\alpha+1)=0 \Leftrightarrow f(\alpha)=0$ ή $f(\alpha+1)=0$ η ρίζα είναι το α ή το $\alpha+1$.

3.513. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=f(x)+g(x)+h(x)-x$, $x\in[\alpha,\beta]$.

Η φ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Είναι: $\varphi(\alpha)=f(\alpha)+g(\alpha)+h(\alpha)-\alpha$ και $\varphi(\beta)=f(\beta)+g(\beta)+h(\beta)-\beta$.

Είναι $f(\alpha)\geq\frac{\alpha}{8}$, $g(\alpha)\geq\frac{\alpha}{2}$, $h(\alpha)\geq\frac{3\alpha}{8}$.

Άρα $f(\alpha)+g(\alpha)+h(\alpha)\geq\frac{\alpha}{8}+\frac{\alpha}{2}+\frac{3\alpha}{8}=\alpha \Leftrightarrow f(\alpha)+g(\alpha)+h(\alpha)-\alpha\geq 0 \Leftrightarrow \varphi(\alpha)\geq 0$.

Είναι $f(\beta)\leq\frac{\beta}{4}$, $g(\beta)\leq\frac{\beta}{8}$, $h(\beta)\leq\frac{5\beta}{8}$.

Άρα $f(\beta)+g(\beta)+h(\beta)\leq\frac{\beta}{4}+\frac{\beta}{8}+\frac{5\beta}{8}=\beta \Leftrightarrow f(\beta)+g(\beta)+h(\beta)-\beta\leq 0 \Leftrightarrow \varphi(\beta)\leq 0$.

Δηλαδή $\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta)\leq 0$.

- Αν $\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta)=0 \Leftrightarrow \varphi(\alpha)=0$ ή $\varphi(\beta)=0$ η φ έχει ρίζα το α ή το β.
- Αν $\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta)<0$ τότε λόγω του θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $\varphi(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)+g(\xi)+h(\xi)-\xi=0$. Οπότε γενικά υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $\varphi(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)+g(\xi)+h(\xi)-\xi=0 \Leftrightarrow f(\xi)+g(\xi)+h(\xi)=\xi$.

3.514. Εστω $g(x)=f(\eta\mu x)-\eta\mu x$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

$g(0)=f(0)\geq 0$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(1)-1\leq 0$, δηλαδή $g(0)g\left(\frac{\pi}{2}\right)\leq 0$.

Αν $g(0)g\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$, τότε επειδή η g είναι συνεχής, από το Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(\eta\mu x_0)=\eta\mu x_0$

Αν $g(0)g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \Leftrightarrow g(0)=0$ ή $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ η ρίζα είναι το 0 ή το $\frac{\pi}{2}$.

Άρα υπάρχει $x_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ τέτοιο ώστε $f(\eta\mu x_0)=\eta\mu x_0$.

3.515. Εστω $h(x)=f(g(x))+g(f(x))-2x$, $x\in[0,4]$.

$h(0)=f(g(0))+g(f(0))\geq 0$, $h(2)=f(g(2))+g(f(2))-8=\left[f(g(2))-4\right]+\left[g(f(2))-4\right]\leq 0$

Δηλαδή $h(0)h(2)\leq 0$.........

3.516. Εστω $g(x)=f(x)-f(x+2)$, $x\in[1,3]$.

$g(1)=f(1)-f(3)$, $g(3)=f(3)-f(5)=f(3)-f(1)=-(f(1)-f(3))$. Είναι $g(1)g(3)\leq 0$........

3.517. Εστω $f(x)=x-\beta^2\eta\mu x-\beta^2$, $x\in\left[0,2\beta^2\right]$.

Η f είναι συνεχής στο $\left[0,2\beta^2\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$f(0)=-\beta^2<0$, $f\left(2\beta^2\right)=2\beta^2-\beta^2\cdot\eta\mu\left(2\beta^2\right)-\beta^2=\beta^2\left(1-\eta\mu\left(2\beta^2\right)\right)\geq 0$.

Δηλαδή $f(0)\cdot f\left(2\beta^2\right)\leq 0$.

Αν $f(0)\cdot f\left(2\beta^2\right)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$ αδύνατο ή $f\left(2\beta^2\right)=0$, τότε ο αριθμός $2\beta^2$ είναι ρίζα της f.

Αν $f(0)\cdot f\left(2\beta^2\right)<0$, τότε λόγω του Θ. Β. υπάρχει $\xi\in\left(0,2\beta^2\right): f(\xi)=0 \Leftrightarrow \xi-\beta^2\eta\mu\xi=\beta^2$.

Άρα, γενικά υπάρχει $\xi\in\left(0,2\beta^2\right]$ τέτοιο ώστε $\xi-\beta^2\eta\mu\xi=\beta^2$.

3.518. Εστω $h(x)=g(x)-g\left(x+\frac{\beta-\alpha}{3}\right)$. Επειδή η g έχει πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta]$,

πρέπει: $\begin{cases}\alpha\leq x\leq\beta\\ \alpha\leq x+\frac{\beta-\alpha}{3}\leq\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha\leq x\leq\beta\\ \alpha-\frac{\beta-\alpha}{3}\leq x\leq\beta-\frac{\beta-\alpha}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha\leq x\leq\beta\\ \frac{4\alpha-\beta}{3}\leq x\leq\frac{2\cdot\beta+\alpha}{3}\end{cases}$

άρα $x\in\left[\alpha,\frac{\alpha+2\beta}{3}\right]$. Παρατηρούμε ότι: $h(\alpha)=g(\alpha)-g\left(\alpha+\frac{\beta-\alpha}{3}\right)=g(\alpha)-g\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)$ και

$h\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)=g\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)-g\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}+\frac{\beta-\alpha}{3}\right)=g\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)-g\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)\Leftrightarrow$

$h\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)=g\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)-g(\alpha)=-h(\alpha)$. Δηλαδή $h(\alpha)\cdot h\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)=-h^2(\alpha)\leq 0$.

- Αν $h(\alpha)\cdot h\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)=0\Leftrightarrow h(\alpha)=0$ ή $h\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)=0$, τότε η h έχει ρίζα το α ή το $\frac{2\alpha+\beta}{3}$.
- Αν $h(\alpha)\cdot h\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)<0$ τότε επειδή η h είναι συνεχής στο $\left[\alpha,\frac{2\alpha+\beta}{3}\right]$ ως σύνθεση και

  άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, λόγω του θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in\left[\alpha,\frac{2\alpha+\beta}{3}\right]$ τέτοιο

  ώστε $h(\xi)=0$. Άρα γενικά υπάρχει $\xi\in\left[\alpha,\frac{2\alpha+\beta}{3}\right]\subseteq[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε

  $h(\xi)=0\Leftrightarrow g(\xi)-g\left(\xi+\frac{\beta-\alpha}{3}\right)=0\Leftrightarrow g(\xi)=g\left(\xi+\frac{\beta-\alpha}{3}\right)$.

3.519. Εστω $g(x)=f(x)-f\left(x+\frac{\beta-\alpha}{6}\right)$, $x\in\left[\alpha,\frac{5\beta+\alpha}{6}\right]$.

Πρέπει $\begin{cases}\alpha\leq x\leq\beta\\ \alpha\leq x+\frac{\beta-\alpha}{6}\leq\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha\leq x\leq\beta\\ \frac{7\alpha-\beta}{6}\leq x\leq\frac{5\beta+\alpha}{6}\end{cases}\Rightarrow\alpha\leq x\leq\frac{5\beta+\alpha}{6}$

$g\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)=f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, $g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)$,

$g\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\leq 0$.....

3.520. Εστω $g(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{\nu}\right)$. Είναι

$$\left.\begin{cases} g(0)=f(0)-f\left(\frac{1}{\nu}\right) \\ g\left(\frac{1}{\nu}\right)=f\left(\frac{1}{\nu}\right)-f\left(\frac{2}{\nu}\right) \\ g\left(\frac{2}{\nu}\right)=f\left(\frac{2}{\nu}\right)-f\left(\frac{3}{\nu}\right) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ g\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)=f\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)-f(1) \end{cases}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} g(0)+g\left(\frac{1}{\nu}\right)+g\left(\frac{2}{\nu}\right)+\ldots+g(1)=f(0)-f(1)=0$$

Άρα $g(0)=g\left(\frac{1}{\nu}\right)=g\left(\frac{2}{\nu}\right)=\ldots=g(1)=0$ ή ένας τουλάχιστον έχει διαφορετικό πρόσημο από τους υπόλοιπους. Έστω ότι το $g\left(\frac{1}{\nu}\right)$ είναι ετερόσημο των υπόλοιπων, τότε $g\left(\frac{1}{\nu}\right)g\left(\frac{2}{\nu}\right)<0$ και λόγω του Θ.Β υπάρχει $\xi\in\left(\frac{1}{\nu},\frac{2}{\nu}\right)\subseteq(0,1)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0$. Άρα γενικά υπάρχει $\xi\in[0,1]$ τέτοιο, ώστε $g(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{\nu}\right)$

3.521. Εστω $h(x)=f(x)-g(x)$, $x\in[0,1]$. Είναι $h(0)=f(0)-g(0)$, $h(1)=f(1)-g(1)$.

$f(0)+f(1)=g(0)+g(1)\Leftrightarrow f(0)-g(0)=-f(1)+g(1)\Leftrightarrow h(0)=-h(1)$,

δηλαδή $h(0)h(1)=-h^2(1)\le 0$.

Αν $h(0)h(1)<0$, τότε επειδή η h είναι συνεχής στο $[0,1]$, λόγω του Θ.Β υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=g(x_0)$.

Αν $h(0)h(1)=0\Leftrightarrow x_0=0$ ή $x_0=1$.

Άρα γενικά υπάρχει $x_0\in[0,1]$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=g(x_0)$.

3.522. Εστω $h(x)=f^2(x)-2f(x)+x^2-3$, $x\in[0,2]$.

$h(0)=f^2(0)-2f(0)-3=(f(0)-3)(f(0)+1)<0$, γιατί $0\le f(0)\le 1$.

$h(2)=f^2(2)-2f(2)+1=(f(2)-1)^2\ge 0$. Δηλαδή $h(0)\cdot h(2)\le 0$.

- Αν $h(0)\cdot h(2)=0\Leftrightarrow h(2)=0$, $(h(0)<0)$ το 2 είναι ρίζα της h.
- Αν $h(0)\cdot h(2)<0$, τότε επειδή η h είναι συνεχής στο $[0,2]$ υπάρχει $\xi\in(0,2):h(\xi)=0$.

Άρα γενικά υπάρχει $\xi\in(0,2]:h(\xi)=0$.

3.523. Εστω $g(x)=f^2(x)-xf(x)-1+x$, $x\in[1,2]$. Είναι $g(1)=f^2(1)-f(1)=f(1)(f(1)-1)\le 0$,

$g(2)=f^2(2)-2f(2)+1=(f(2)-1)^2\ge 0$, δηλαδή $g(1)g(2)\le 0$.............

3.524. **α)** $\begin{cases} 0 \le x \le \theta \\ 0 \le x + \dfrac{\theta}{2} \le \theta \end{cases} \Rightarrow 0 \le x \le \dfrac{\theta}{2}$.

β) Εστω $g(x) = f(x) - f\left(x + \dfrac{\theta}{2}\right)$, $x \in \left[0, \dfrac{\theta}{2}\right]$.

Είναι $g(0) = f(0) - f\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$, $g\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = f\left(\dfrac{\theta}{2}\right) - f(\theta) = -\left(f(0) - f\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right)$, άρα $g(0)g\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \le 0$......

3.525. Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in [-2,2]$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = x_0 \Leftrightarrow f(x_0)g(x_0) - x_0 = 0$.

Εστω $\varphi(x) = f(x)g(x) - x$, $x \in [-2,2]$. Η φ είναι συνεχής στο $[-2,2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Είναι $\varphi(-2) = f(-2)g(-2) + 2$ και $\varphi(2) = f(2)g(2) - 2$.

Επειδή $f^2(x) + g^2(x) = 4$ για κάθε $x \in [-2,2]$, ισχύει ότι:

$f^2(-2) + g^2(-2) = 4$ και $f^2(2) + g^2(2) = 4$, οπότε:

$$\varphi(-2) = f(-2)g(-2) + 2 = \frac{1}{2}(2f(-2)g(-2) + 4) = \frac{1}{2}\left(2f(-2)g(-2) + f^2(-2) + g^2(-2)\right) \Leftrightarrow$$

$$\varphi(-2) = \frac{1}{2}\left[f(-2) + g(-2)\right]^2 \ge 0 \text{ και}$$

$$\varphi(2) = f(2)g(2) - 2 = \frac{1}{2}(2f(2)g(2) - 4) = \frac{1}{2}\left(2f(2)g(2) - f^2(2) - g^2(2)\right) \Leftrightarrow$$

$\varphi(2) = -\dfrac{1}{2}\left[f(2) + g(2)\right]^2 \le 0$. Δηλαδή $\varphi(-2)\varphi(2) \le 0$.

- Αν $\varphi(-2)\varphi(2) < 0$ τότε λόγω του θεωρήματος Bolzano υπάρχει $x_0 \in (-2,2)$ τέτοιο ώστε: $\varphi(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0)g(x_0) - x_0 = 0$.
- Αν $\varphi(-2)\varphi(2) = 0 \Leftrightarrow \varphi(-2) = 0$ ή $\varphi(2) = 0$ τότε $x_0 = -2$ ή $x_0 = 2$.

Άρα γενικά υπάρχει $x_0 \in [-2,2]$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0)g(x_0) - x_0 = 0$

3.526. $|x_0 - y_0| = \dfrac{\beta - \alpha}{2} \Leftrightarrow y_0 = x_0 - \dfrac{\beta - \alpha}{2}$ ή $y_0 = x_0 + \dfrac{\beta - \alpha}{2}$

Εστω $g(x) = f(x) - f\left(x - \dfrac{\beta - \alpha}{2}\right)$, $x \in \left[\alpha, \dfrac{\alpha + \beta}{2}\right]$.

Είναι $g(\alpha) = f(\alpha) - f\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)$, $g(\beta) = f(\beta) - f\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right) = f(\alpha) - f\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)$,

άρα $g(\alpha)g(\beta) \le 0$..........

3.527. **α)** Εύκολα αποδεικνύεται ότι $f \uparrow [1,3]$. $f([1,3]) = [f(1), f(3)] = [8, 44]$

β) Εστω $x_1, x_2 \in (4,9)$ με $x_1 < x_2$. Τότε $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Leftrightarrow \sqrt{x_1} - 3 < \sqrt{x_2} - 3 \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{x_1} - 3} > \frac{1}{\sqrt{x_2} - 3} \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x_1} - 3} > \frac{5}{\sqrt{x_2} - 3} \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2), \text{ άρα } g \downarrow (4,9).$$

$\lim\limits_{x \to 4^+} g(x) = -5$, $\lim\limits_{x \to 9^-} g(x) = -\infty$ άρα $g((4,9)) = (-\infty, -5)$

γ) Εύκολα αποδεικνύεται ότι $f \uparrow \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$. $f\left(\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\right)=\left[f(0),f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=\left[0,\frac{\pi^2}{4}\right]$

δ) Εστω $x_1,x_2\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1<x_2$.

Τότε $\sigma\upsilon\nu x_1>\sigma\upsilon\nu x_2 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x_1>2\sigma\upsilon\nu x_2$, $\eta\mu x_1<\eta\mu x_2 \Leftrightarrow -3\eta\mu x_1>-3\eta\mu x_2$,

άρα $2\sigma\upsilon\nu x_1-3\eta\mu x_1>2\sigma\upsilon\nu x_2-3\eta\mu x_2 \Leftrightarrow h(x_1)>h(x_2)\Rightarrow h\downarrow\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$

άρα $h\left(\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left[h\left(\frac{\pi}{2}\right),h\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=\left[-3,\frac{-\sqrt{2}}{2}\right]$

ε) Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πολυωνυμική συνάρτηση. Για κάθε $x_1,x_2\in[1,2]$ με $x_1<x_2$ είναι $x_1^4<x_2^4$ και $3x_1<3x_2$, άρα $x_1^4+3x_1+1<x_2^4+3x_2+1\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$. Είναι $f(1)=5$ και $f(2)=23$. Για το σύνολο τιμών της f στο $[1,2]$ ισχύει: $f([1,2])=[f(1),f(2)]=[5,23]$.

στ) Η f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Για κάθε $x_1,x_2\in[0,\pi]$ με $x_1<x_2$, είναι: $-2x_1>-2x_2$ και $\sigma\upsilon\nu x_1>\sigma\upsilon\nu x_2$,

άρα $-2x_1+\sigma\upsilon\nu x_1>-2x_2+\sigma\upsilon\nu x_2 \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$, οπότε f γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$.

Είναι: $f(0)=1$ και $f(\pi)=-2\pi-1$. Για το σύνολο τιμών της f στο $[0,\pi]$ ισχύει:

$f([0,\pi])=[f(\pi),f(0)]=[-2\pi-1,1]$.

3.528. Εστω $f(x)=e^x+x-1821$, $x\in\mathbb{R}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+x-1821\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+x-1821\right)=+\infty$, άρα $f(A)=\mathbb{R}$.

$0\in f(A)$, άρα η εξίσωση $f(x)=0\Leftrightarrow e^x+x-1821=0$ έχει μοναδική ρίζα.

3.529. **α)** Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\left(e^x+\ln(x+1)-1\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+\ln(x+1)-1\right)=+\infty$,

άρα $f(A)=\mathbb{R}$.

β) Είναι $e^x+\ln(x+1)=1\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow f(x)=f(0)\overset{1-1}{\Leftrightarrow} x=0$ έχει μοναδική ρίζα.

3.530. **α)** Εστω $x_1,x_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1<x_2$, τότε $\sigma\upsilon\nu x_1>\sigma\upsilon\nu x_2$, $\eta\mu x_1<\eta\mu x_2\Leftrightarrow -\eta\mu x_1>-\eta\mu x_2$,

άρα $f(x_1)>f(x_2)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Επειδή $f(0)=1$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$, είναι $f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left[-\frac{\pi}{2},1\right]$.

β) $f(0)=1, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}<0$, άρα $f(0)f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, η ρίζα είναι μοναδική.

3.531. **α)** Εστω $x_1,x_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1<x_2$, τότε $x_1^2<x_2^2 \Leftrightarrow 2x_1^2-1<2x_2^2-1$,

$\sigma\upsilon\nu x_1>\sigma\upsilon\nu x_2 \Leftrightarrow -\sigma\upsilon\nu x_1<-\sigma\upsilon\nu x_2$ και $2x_1^2-1-\sigma\upsilon\nu x_1<2x_2^2-1-\sigma\upsilon\nu x_2 \Leftrightarrow$

$g(x_1)<g(x_2)\Rightarrow g\uparrow\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

β) Επειδή η g είναι συνεχής και $\uparrow\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, είναι $g\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left[g(0),g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=\left[-2,\frac{\pi^2}{2}-1\right]$

γ) Επειδή το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της g και $g\uparrow\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

3.532. Εστω $g(x)=\frac{1}{3}(x^3+1)-x$, $x\in(-2,-1)$. Έστω $x_1,x_2\in(-2,-1)$ με $x_1<x_2$, τότε

$g(x_1)-g(x_2)=\frac{1}{3}(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2-2)<0$ (1), γιατί $-2<x_1<-1\Leftrightarrow 1<x_1^2<4$,

$-2<x_2<-1\Leftrightarrow 1<x_2^2<4$, $\begin{matrix}1<-x_1<2\\1<-x_2<2\end{matrix}\overset{x}{\Rightarrow}1<x_1x_2<4$ άρα $1<x_1^2+x_1x_2+x_2^2-2<10$

άρα $x_1^2+x_1x_2+x_2^2-2>0$ $(1)\Rightarrow g(x_1)<g(x_2)$, άρα g γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1=(-2,-1)$.

$g(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to-2^+}g(x),\lim\limits_{x\to-1^-}g(x)\right)=\left(-\frac{1}{3},1\right)$.

$0\in g(\Delta_1)$, άρα υπάρχει μοναδικό $x_1\in\Delta_1$ τέτοιο, ώστε $g(x_1)=0$.

Επαναλαμβάνουμε το ίδιο στα διαστήματα $(-1,1)$ και $(1,2)$

3.533. Είναι $f^2(1)+f^2(4)=2f(4)-6f(1)-10 \Leftrightarrow f^2(1)+6f(1)+f^2(4)-2f(4)+10=0\Leftrightarrow$

$f^2(1)+6f(1)+9+f^2(4)-2f(4)+1=0\Leftrightarrow (f(1)+3)^2+(f(4)-1)^2=0$.

Άρα $f(1)=-3$ και $f(4)=1$. Επομένως επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[1,4]$ το σύνολο τιμών $f(A)=[f(1),f(4)]=[-3,1]$.

3.534. **α)** $f^2(2)+f^2(5)=8f(2)-2f(5)-17\Leftrightarrow(f(2)-4)^2+(f(5)+1)^2=0\Leftrightarrow f(2)=4$ και $f(5)=-1$.

Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη και $f(2)>f(5)$, η f είναι $\downarrow[2,5]$.

β) Επειδή η f είναι συνεχής και $\downarrow$ στο $[2,5]$, είναι $f([2,5])=[f(5),f(2)]=[-1,4]$.

3.535. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει ότι $f(4)=4$ και $f(8)=8$.

Επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα, ισχύει ότι $g(4)=8$ και $g(8)=4$.

Εστω $t(x)=f\left(g\left(h(x)\right)\right)-g\left(f(x)\right)$, $x\in[4,8]$. Είναι

$t(4)=f\left(g\left(h(4)\right)\right)-g\left(f(4)\right)=f\left(g(8)\right)-g(4)=f(4)-8=4-8=-4<0$

$t(8)=f\left(g\left(h(8)\right)\right)-g\left(f(8)\right)=f\left(g(4)\right)-g(8)=f(8)-4=8-4=4>0$, άρα $t(4)t(8)<0$.....

3.536. **α)** Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $[-2,3]$, $[3,5]$,$[5,8]$

και $f(-2)<f(3)$, $f(3)>f(5)$ και $f(5)<f(8)$, είναι $f\uparrow[-2,3]$, $\downarrow[3,5]$ και $\uparrow[5,8]$.

β) $f([-2,3])=[-2,4]$, $f([3,5])=[1,4]$, $f([5,8])=[1,2]$,

άρα $f([-2,8])=[-2,4]\cup[1,4]\cup[1,2]=[-2,4]$

γ) Επειδή $0\in f([-2,3])$, υπάρχει μοναδικό $x_1\in(0,2):f(x_1)=0$.

Επειδή $0\notin f([3,5])=[1,4]$ η $f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $[3,5]$

Επειδή $0\notin f([5,8])=[1,2]$, η $f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $[5,8]$.

Επομένως η $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

3.537. **α)** Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $[0,2]$, $[2,4]$,$[4,5]$

και $f(0)>f(2)$, $f(2)<f(4)$ και $f(4)>f(5)$, είναι $f\downarrow[0,2]$, $\uparrow[2,4]$ και $\downarrow[4,5]$.

β) $f([0,2])=[-2,1]$, $f([2,4])=[-2,3]$, $f([4,5])=[-4,3]$,

άρα $f([0,5])=[-2,1]\cup[-2,3]\cup[-4,3]=[-4,3]$

γ) Επειδή $0\in f([0,2])$, υπάρχει μοναδικό $x_1\in(0,2):f(x_1)=0$.

Επειδή $0\in f([2,4])=[-2,3]$ υπάρχει μοναδικό $x_2\in(2,4):f(x_2)=0$

Επειδή $0\in f([4,5])=[-4,3]$, υπάρχει μοναδικό $x_3\in(4,5):f(x_3)=0$

Επομένως η $f(x)=0$ έχει ακριβώς τρείς ρίζες.

3.538. Αν η f είναι συνεχής στο $[1,3]$, τότε θα έπρεπε το σύνολο τιμών της να είναι κλειστό διάστημα. Επειδή το σύνολο τιμών είναι $f(A)=(3,5]$, τότε η f δεν είναι συνεχής στο $[1,3]$.

3.539. **α)** Εστω $f(x)=x^3+2x-4$, $x\in[1,2]$. Είναι $f(1)=-1$, $f(2)=8$ και επειδή η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική, λόγω του Θ.Β η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,2)$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι $\uparrow[1,2]$, οπότε η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

β) Εστω $f(x)=x^4+2x^3+3x-8$ $x\in[1,3]$. Είναι $f(1)=-2$, $f(3)=136$ και επειδή η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική, λόγω του Θ.Β η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,3)$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι $\uparrow[1,3]$, οπότε η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

γ) Εστω $f(x)=x^3+\eta\mu x-1$, $x\in[0,\pi]$. Είναι $f(0)=-1$, $f(\pi)=\pi^3-1$ και επειδή η f είναι συνεχής ως άθροισμα σ.σ., από το Θ.Β η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,\pi)$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι $\uparrow[0,\pi]$, οπότε η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

δ) Εστω $f(x)=\varepsilon\varphi x+5x-2$, $x\in[0,1]$. Είναι $f(0)=-2$, $f(1)=\varepsilon\varphi 1+3>0$ και επειδή η f είναι συνεχής ως άθροισμα σ.σ., από το Θ.Β η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι $\uparrow[0,1]$, οπότε η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

3.540. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=2\ln x-3\sigma\upsilon\nu x+4$, η οποία είναι συνεχής στο $(0,1]$.
Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2\ln x-3\sigma\upsilon\nu x+4)=-\infty$, οπότε υπάρχει $\gamma\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\gamma)<0$.
Επίσης, $f(1)=2\ln 1-3\sigma\upsilon\nu 1+4=4-3\sigma\upsilon\nu 1>0$ γιατί $0<1<\frac{\pi}{2}$, οπότε $\sigma\upsilon\nu 1>0$. Άρα η f είναι συνεχής στο $[\gamma,1]\subseteq(0,1]$ και $f(\gamma)\cdot f(1)<0$, οπότε σύμφωνα με το θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(\gamma,1)\subseteq(0,1)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0)=0\Leftrightarrow 2\ln x_0-3\sigma\upsilon\nu x_0+4=0$.
Εστω $x_1,x_2\in(0,1)$ με $x_1<x_2$. Είναι $\ln x_1<\ln x_2\Leftrightarrow 2\ln x_1<2\ln x_2$
και $\sigma\upsilon\nu x_1>\sigma\upsilon\nu x_2\Leftrightarrow -3\sigma\upsilon\nu x_1<-3\sigma\upsilon\nu x_2\Leftrightarrow -3\sigma\upsilon\nu x_1+4<-3\sigma\upsilon\nu x_2+4$.
Άρα και $2\ln x_1-3\sigma\upsilon\nu x_1+4<2\ln x_2-3\sigma\upsilon\nu x_2+4\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$, άρα η f είναι $\uparrow$ στο $(0,1)$ και η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

3.541. Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=x^5+4x-\kappa$, η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική. Είναι $g(0)=-\kappa<0$ και $g(0)=5-\kappa>0$ επειδή $0<\kappa<5$. Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0$.
Εστω $x_1,x_2\in(0,1)$ με $x_1<x_2$, τότε $x_1^5<x_2^5$ και $4x_1<4x_2$. Άρα, προσθέτοντας κατά μέλη, είναι $x_1^5+4x_1<x_2^5+4x_2\Leftrightarrow x_1^5+4x_1-\kappa<x_2^5+4x_2-\kappa\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$. Οπότε η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$, επομένως η ρίζα $\xi\in(0,1)$ είναι μοναδική.

3.542. Εστω η συνάρτηση $g(x)=\ln(e-e^x)-x$ με $x\in(-\infty,1)$.
Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}(e-e^x)=e-0=e$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ είναι
$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln(e-e^x)-x\right]=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^-}(e-e^x)=0$ και $\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\ln(e-e^x)\right]=-\infty$,
άρα $\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\ln(e-e^x)-x\right]=-\infty$.
Επίσης, έστω $x_1,x_2\in(-\infty,1)$ με $x_1<x_2$, είναι $e^{x_1}<e^{x_2}\Leftrightarrow -e^{x_1}>-e^{x_2}\Leftrightarrow e-e^{x_1}>e-e^{x_2}$
$\overset{\ln\uparrow}{\Leftrightarrow}\ln(e-e^{x_1})>\ln(e-e^{x_2})$.
Επίσης $-x_1>-x_2$ άρα $\ln(e-e^{x_1})-x_1>\ln(e-e^{x_2})-x_2\Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)$, οπότε η g είναι $\downarrow$ στο $(-\infty,1)$. Η συνάρτηση g έχει σύνολο τιμών $g(A)=\left(\lim\limits_{x\to 1^-} g(x),\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$
και, αφού το $0\in\mathbb{R}$, η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα. Επειδή η g είναι $\downarrow$ η ρίζα θα είναι μοναδική.

3.543. α) $\alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(\alpha)<f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<f(\beta)\Leftrightarrow f(\alpha)<0<f(\beta)$

β) $f\left(2x-\frac{\alpha}{2}\right)=f\left(x+\frac{\beta}{2}\right)\overset{f\,1-1}{\Leftrightarrow} 2x-\frac{\alpha}{2}=x+\frac{\beta}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\alpha+\beta}{2}$

γ) Εστω $g(x)=f(x)-\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$, $x\in[\alpha,\beta]$. Είναι

$g(\alpha)=f(\alpha)-\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}=\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{2}<0$, $g(\beta)=f(\beta)-\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{2}>0$,

δηλαδή $g(\alpha)g(\beta)<0$..............

3.544. Εστω $g(x)=f(x)+2e^{x+1}+\ln x-3$, $x\in(0,+\infty)$ Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. $g(A)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+}g(x),\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right)=\mathbb{R}$, $0\in g(A)$, άρα υπάρχει μοναδικό $x_0>0$ τέτοιο ώστε: $g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)+2e^{x_0+1}+\ln x_0=3$.

3.545. α) $f^2(x)+xf(x)=4\Leftrightarrow\left(f(x)+\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{4}+4=\frac{x^2+16}{4}>0$,

άρα $g(x)=f(x)+\frac{x}{2}\neq 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο.

β) Είναι $g(3)=f(3)+\frac{3}{2}=-\frac{5}{2}<0$, άρα $g(x)<0$ για κάθε $x\geq 0$,

οπότε $\left(f(x)+\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2+16}{4}\Leftrightarrow f(x)+\frac{x}{2}=-\sqrt{\frac{x^2+16}{4}}\Leftrightarrow f(x)=-\frac{x+\sqrt{x^2+16}}{2}$, $x\geq 0$

γ) Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.

$f(0)=-2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, άρα $f(A)=(-\infty,-2]$.

Αν $k\leq -2$, τότε η εξίσωση έχει μία ρίζα και αν $k>-2$ είναι αδύνατη.

3.546. α) Εύκολα f γνησίως αύξουσα.

β) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, άρα $f(A)=\mathbb{R}$

γ) $x\ln x=1-x\Leftrightarrow \ln x=\frac{1-x}{x}\Leftrightarrow \ln x+\frac{x-1}{x}=0\Leftrightarrow f(x)=f(1)\overset{f\,1-1}{\Leftrightarrow} x=1$

δ) $1<\alpha<\beta\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(1)<f(\alpha)<f(\beta)$. Εστω $g(x)=f^2(x)-f(\alpha)f(\beta)$, $x\in[\alpha,\beta]$.

$g(\alpha)=f^2(\alpha)-f(\alpha)f(\beta)=f(\alpha)\big(f(\alpha)-f(\beta)\big)<0$,

$g(\beta)=f^2(\beta)-f(\alpha)f(\beta)=f(\beta)\big(f(\beta)-f(\alpha)\big)>0$,

δηλαδή $g(\alpha)g(\beta)<0$ και g συνεχής, οπότε από το Θ.Β υπάρχει $\theta\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g(\theta)=0\Leftrightarrow f^2(\theta)=f(\alpha)f(\beta)$

3.547. Από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ και επειδή η f είναι συνεχής, έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

3.548. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^5-24x+3$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική. Παρατηρούμε $f(0)=3>0$, $f(1)=-20<0$ και $f(3)=3^5-24\cdot 3+3=174>0$. Οπότε η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και ισχύει $f(0)\cdot f(1)<0$, άρα σύμφωνα με το θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(0,1): f(\xi_1)=0$. Επίσης, η f είναι συνεχής στο $[1,3]$ και είναι $f(1)\cdot f(3)<0$, οπότε από το θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(1,3): f(\xi_2)=0$. Άρα, η εξίσωση $x^5-24x+3=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(0,3)$.

3.549. Εστω $f(x)=x^2e^{-\eta\mu x}+x-e^{-\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x$, $x\in[-\pi,\pi]$.
$f(-\pi)=\pi^2-\pi-1>0$, $f(0)=-1<0$, $f(\pi)=\pi^2+\pi+1>0$, δηλαδή $f(-\pi)f(0)<0$ και $f(0)f(\pi)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[-\pi,\pi]$, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\pi,0)$ και $(0,\pi)$.

3.550. **α)** Εστω $f(x)=x^3+3x^2-1$, $x\in[-2,1]$. Είναι $f(-2)=3$, $f(0)=-1$, $f(1)=3>0$.
Επειδή $f(-2)f(0)<0$, $f(0)f(1)<0$ και η f είναι συνεχής στο $[-2,1]$, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(-2,0)$ και $(0,1)$.

β) Εστω $f(x)=2x^4+x^2-1$, $x\in[-2,1]$. Είναι $f(-2)=35$, $f(0)=-1$, $f(1)=2$.
Επειδή $f(-2)f(0)<0$, $f(0)f(1)<0$ και η f είναι συνεχής στο $[-2,1]$, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(-2,0)$ και $(0,1)$.

γ) Εστω $f(x)=x^6-2x^3+5x^2+x-1$, $x\in[-2,1]$. Είναι $f(-2)=97$, $f(0)=-1$, $f(1)=4$.
Επειδή $f(-2)f(0)<0$, $f(0)f(1)<0$ και η f είναι συνεχής στο $[-2,1]$, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(-2,0)$ και $(0,1)$.

3.551. Εστω $f(x)=x^3+\alpha x^2+2$, $x\in[-1,1]$. Είναι $f(-1)=\alpha+1<-2<0$, $f(0)=0>0$, $f(1)=\alpha+3<0$ και επειδή η f είναι συνεχής, η $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(-1,0)$ και $(0,1)$.

3.552. Εστω $f(x)=x^3-4x^2+x+3$, $x\in[-1,4]$. Είναι $f(-1)=-3$, $f(0)=3$, $f(2)=-3$, $f(4)=7$ και επειδή η f είναι συνεχής, η $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(-1,0)$, $(0,2)$ και $(2,4)$.

3.553. Εστω $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, $f(-1)=-\alpha+\beta-\gamma+\delta<-\alpha-\gamma-\alpha-\gamma<0$, $f(0)=\delta>0$, $f(1)=\alpha+\beta+\gamma+\delta<0$ και Θ. Bolzano στα $[-1,0]$ και $[0,1]$.

3.554. **α)** $\Delta=16(\mu+\lambda)+16=16(\mu+\lambda+1)<0\Leftrightarrow\mu+\lambda+1<0$

β) $f(x)=x^3+\mu x^2+\lambda$, $f(-1)=-1+\mu+\lambda<-2<0$, $f(0)=\lambda>0$, $f(1)=1+\mu+\lambda<0$

3.555. Εστω $g(x)=f^2(x)-9=(f(x)-3)(f(x)+3)$

$g(-1)=-5<0$, $g(0)=7>0$, άρα η $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-1,0)$.

Εστω $h(x)=f(x)-3$, $h(0)=1>0$, $h(1)=-7<0$, άρα υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)-3=0$, τότε $g(x_0)=(f(x_0)-3)(f(x_0)+3)=0$, άρα η g έχει τουλάχιστον μία ρίζα και στο $(0,1)$.

3.556. α) Εχουμε ότι: $f(x)=0\Leftrightarrow x^3-2x^2-5x+6=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=3$ ή $x=-2$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα προκύπτουν τα αποτελέσματα:

Διάστημα	$(-\infty,-2)$	$(-2,1)$	$(1,3)$	$(3,+\infty)$
Επιλεγμένος αριθμός x_0	-4	0	2	5
$f(x_0)$	-70	6	-4	56
Πρόσημο της f	$-$	$+$	$-$	$+$

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $f(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+x+2}=x+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq -1$.

Τότε $\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)^2=(x+1)^2\Leftrightarrow x^2+x+2=x^2+2x+1\Leftrightarrow x=1$

Είναι $f(0)=\sqrt{2}-1>0$ και η f είναι συνεχής και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[-1,1)$, άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in[-1,1)$.

Είναι $f(2)=2\sqrt{2}-3<0$ και η f είναι συνεχής και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$, άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$.

3.557. Εστω ότι η f δεν διατηρεί το πρόσημό στο $\mathbb{R}$, τότε θα υπάρχουν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$, τέτοια ώστε $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι συνεχής και στο $[\alpha,\beta]$, οπότε λόγω Θ. Bolzano θα υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0)=0$.

Η σχέση (1) για $x=x_0$ γίνεται: $2f^2(x_0)-3f(x_0)=x_0^{\ 2}-x_0+4\Leftrightarrow x_0^{\ 2}-x_0+4=0$.

Η τελευταία εξίσωση έχει $\Delta=-15<0$ και είναι αδύνατη, οπότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

3.558. Εστω ότι η f δεν διατηρεί πρόσημο στο $[-1,2]$. Τότε υπάρχουν $\alpha,\beta\in[-1,2]$ με $\alpha<\beta$ τέτοια ώστε $f(\alpha)f(\beta)<0$. Επειδή η f είναι συνεχής, από το Θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$. Τότε $f^3(\xi)-5f^2(\xi)+f(\xi)=\xi^2-7\xi+12\Leftrightarrow\xi^2-7\xi+12=0\Leftrightarrow\xi=3$ ή $\xi=4$ που απορρίπτονται.

3.559. Εστω ότι η f δεν διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Τότε υπάρχουν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$ τέτοια ώστε $f(\alpha)f(\beta)<0$. Επειδή η f είναι συνεχής. από το Θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$. Τότε $f^2(\xi)+3f(\xi)\geq\xi^4+e^{\xi}+2\Leftrightarrow\xi^4+e^{\xi}+2\leq0$ που είναι άτοπο, αφού $\xi^4+e^{\xi}+2>0$.

3.560. Εστω ότι η f δεν διατηρεί πρόσημο στο $(1,+\infty)$. Τότε υπάρχουν $\alpha,\beta\in(1,+\infty)$ με $\alpha<\beta$ τέτοια ώστε $f(\alpha)f(\beta)<0$. Επειδή η f είναι συνεχής. από το Θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$. Τότε $|f(\xi)-1|-\dfrac{2}{\xi+1}=\xi-1\Leftrightarrow1-\dfrac{2}{\xi+1}=\xi-1\Leftrightarrow\xi+1-2=\xi^2-1\Leftrightarrow$ $\xi=0$ ή $\xi=1$ που είναι άτοπο αφού $\xi>1$.

3.561. Εστω ότι η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, ώστε $f(x_1),f(x_2)$ να είναι ετερόσημοι. Τότε όμως η f θα ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θ. Bolzano στο $[x_1,x_2]$ αφού είναι συνεχής στο $x_0\in(x_1,x_2)$ και $f(x_1)\cdot f(x_2)<0$. Άρα θα υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$. Όμως από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι ισχύει $f(x)(h(x)+2)\geq2$. Για $x=x_0$ προκύπτει $f(x_0)(h(x_0)+2)\geq2$ ή $0\geq2$ που είναι άτοπο. Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

3.562. **α)** Στη δοσμένη σχέση για $x=1$ έχουμε: $f^2(1)=1+2-4f(1)-3\Leftrightarrow f^2(1)=-4f(1)\Leftrightarrow$ $f(1)(f(1)+4)=0\Leftrightarrow f(1)=0$. (απορρίπτεται, γιατί $f(x)\neq0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$) ή $f(1)=-4$.

β) Είναι $f^2(x)=x^4+2x^2-4f(x)-3\Leftrightarrow f^2(x)+4f(x)=x^4+2x^2-3\Leftrightarrow$

$f^2(x)+4f(x)+4=x^4+2x^2+1\Leftrightarrow(f(x)+2)^2=(x^2+1)^2$.

Εστω $g(x)=f(x)+2$, η g είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών και $g(x)\neq0$ γιατί $g^2(x)=(x^2+1)^2\neq0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή $g(1)=f(1)+2=-4+2<0$ τότε $g(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως $g^2(x)=(x^2+1)^2\Leftrightarrow g(x)=-x^2-1\Leftrightarrow f(x)+2=-x^2-1\Leftrightarrow f(x)=-x^2-3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

3.563. Είναι $f^2(x)=e^{2x}\Leftrightarrow f^2(x)=(e^x)^2$. Όμως $f^2(x)=e^{2x}\neq0$ άρα $f(x)\neq0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Άρα $f(x)=e^x$ ή $f(x)=-e^x$.
Επειδή $f(0)=1>0$, είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε $f(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

3.564. $f^2(x)=x^2+2f(x)\Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)=x^2\Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)+1=x^2+1\Leftrightarrow(f(x)-1)^2=x^2+1$ (2)
Επειδή $x^2+1\neq0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, θα είναι και $f(x)-1\neq0$.
Επειδή η συνάρτηση $f(x)-1$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα διατηρεί σταθερό πρόσημο, οπότε από τη σχέση (2), προκύπτει ότι: $f(x)-1=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow f(x)=1+\sqrt{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$ ή $f(x)-1=-\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow f(x)=1-\sqrt{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

3.565. $f^2(x)-x^4=-2f(x)\Leftrightarrow (f(x)+1)^2=x^4+1\neq 0$, άρα $f(x)+1\neq 0$, οπότε η συνάρτηση $f(x)+1$ διατηρεί σταθερό πρόσημο.
Επειδή $f(x)+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $f(x)+1=\sqrt{x^4+1}\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^4+1}-1,\ x\in\mathbb{R}$

3.566. $f^2(x)-4f(x)\eta\mu x=x^4+4\sigma\upsilon\nu^2 x=x^4+4-4\eta\mu^2 x\Leftrightarrow f^2(x)-4f(x)\eta\mu x+4\eta\mu^2 x=x^4+4\Leftrightarrow$
$(f(x)-2\eta\mu x)^2=x^4+4\neq 0$, άρα η συνάρτηση $f(x)-2\eta\mu x$, επειδή είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο.
Είναι $f(0)-2\eta\mu 0=2>0$, άρα $f(x)-2\eta\mu x>0$, οπότε $f(x)-2\eta\mu x=\sqrt{x^4+1}\Leftrightarrow$
$f(x)=2\eta\mu x+\sqrt{x^4+1},\ x\in\mathbb{R}$

3.567. Είναι $f^2(x)-2e^x+x^2=e^{2x}+2xf(x)+1\Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2=e^{2x}+2e^x+1\Leftrightarrow$
$(f(x)-x)^2=(e^x+1)^2$. Όμως $(f(x)-x)^2=(e^x+1)^2\neq 0\Leftrightarrow f(x)-x\neq 0$ και η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.
Άρα $f(x)-x=e^x+1$ ή $f(x)-x=-e^x-1$.
Είναι $g(0)=f(0)=-2<0$, άρα $g(x)<0\Leftrightarrow f(x)-x<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Επομένως $f(x)-x=-e^x-1\Leftrightarrow f(x)=x-e^x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

3.568. Επειδή $f(0)=0<2<f(4)=4$, αν η f ήταν συνεχής, τότε από το ΘΕΤ θα υπήρχε $x_0\in(0,4)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=2$. Τότε $f^2(x_0)-4f(x_0)-x_0^2=2x_0\Leftrightarrow 4-8-x_0^2=2x_0\Leftrightarrow x_0^2+2x_0+4=0$ που είναι αδύνατο.

3.569. **α)** Για κάθε $x\in[-3,3]$ ισχύει $f^2(x)=9-x^2$ (1).
Είναι: $f(x)=0\Leftrightarrow f^2(x)=0$ και από την (1) $9-x^2=0\Leftrightarrow x=3$ ή $x=-3$
Επομένως οι ρίζες της $f(x)=0$ στο $[-3,3]$ είναι μόνο οι αριθμοί -3 και 3.

β) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-3,3)$. Δηλαδή υπάρχουν $x_1,x_2\in(-3,3)$ με $x_1<x_2$ ώστε τα $f(x_1),f(x_2)$ να είναι ετερόσημοι αριθμοί.
Τότε η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θ. Bolzano στο $[x_1,x_2]\subseteq[-3,3]$ αφού είναι συνεχής και $f(x_1)\cdot f(x_2)<0$. Άρα υπάρχει $\theta\in(x_1,x_2)$ ώστε $f(\theta)=0$.
Στην (1) για $x=\theta$ είναι: $f^2(\theta)=9-\theta^2\Leftrightarrow 9-\theta^2=0\Leftrightarrow \theta^2=9\Leftrightarrow \theta=3$ ή $\theta=-3$ άτοπο διότι $\theta\in(x_1,x_2)\subseteq(-3,3)$. Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-3,3)$.

γ) Επειδή η f είναι συνεχής και διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-3,3)$ θα ισχύει $f(x)>0$ ή $f(x)<0$ για $x\in(-3,3)$. Όμως $f(0)=-3$ άρα $f(x)<0$ όταν $x\in(-3,3)$. Από την (1) είναι $f^2(x)=9-x^2\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{9-x^2}$ ή $f(x)=-\sqrt{9-x^2}$. Αφού $f(x)<0$ τότε
$f(x)=-\sqrt{9-x^2}$ για κάθε $x\in[-3,3]$.

3.570. **α)** Επειδή η f είναι περιττή ισχύει: $f(-x)=-f(x)$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για $x=0$ είναι $f(0)=-f(0)\Leftrightarrow 2f(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0$. Επειδή η $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$, ισχύει ότι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, δηλαδή η f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

Επειδή $f(2)<0$ είναι $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Η σχέση για $x=2$ γίνεται:

$f(-2)=-f(2)>0$, άρα και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$.

β) Είναι $g(x)=0\Leftrightarrow f(x)(x^2-4)=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x^2-4=0\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm 2$.

Για κάθε $x\in(-\infty,-2)\cup(0,2)$ είναι $g(x)>0$,

ενώ για κάθε $x\in(-2,0)\cup(2,+\infty)$ είναι $g(x)<0$.

x	$-\infty$ … -2	-2 … 0	0 … 2	2 … $+\infty$
$f(x)$	+	+	−	−
x^2-4	+	−	−	+
$g(x)$	+	−	+	−

γ) Είναι $f^2(x)=x^8=(x^4)^2$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$, ενώ $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, άρα: $f(x)=x^4$ για κάθε $x<0$ και $f(x)=-x^4$ για κάθε $x>0$.

Επειδή $f(0)=0$, ο τύπος της f είναι $f(x)=\begin{cases} x^4 & ,\ x<0 \\ 0 & ,\ x=0 \\ -x^4 & ,\ x>0 \end{cases}$.

3.571. **α)** Το τριώνυμο x^2+2x+4 έχει $\Delta=-16<0$, άρα $x^2+2x+4>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. $A_f=\mathbb{R}$.

β) $f(x)=0\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+4}-x=0\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+4}=x$ (1)

Αν $x<0$ η (1) είναι αδύνατη.

Αν $x\geq 0$, έχουμε: $\left(\sqrt{x^2+2x+4}\right)^2=x^2\Leftrightarrow x^2+2x+4=x^2\Leftrightarrow x=-2$ που απορρίπτεται.

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη.

γ) Επειδή $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Επειδή $f(1)=\sqrt{1+2+4}-1=\sqrt{7}-1>0$, είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

3.572. Επειδή f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(x)\neq 0$ και $f(3)=5>0$, είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(f(4)+3)x^2-3x+1}{x+5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(f(4)+3)x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left((f(4)+3)x\right)=+\infty$.

3.573. Επειδή $-1,4$ διαδοχικές ρίζες της $f(x)=0$, είναι $f(0)\neq 0$ και επειδή $f(3)=-5$

είναι $f(x)<0$ για κάθε $x\in(-1,4)$. Άρα, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(0)\cdot x^3+2x+5}{x^2+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(0)\cdot x\right)=-\infty$.

3.574. Επειδή η f είναι συνεχής συνάρτηση με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (1,10)$ και $f(5) = -4 < 0$ είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (1,10)$.

Άρα $f(2), f(6) < 0$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(2)x^4 - f(8)x^3 + 7x^2 + 5}{f(6)x^3 - x^2 + 5x - 9} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(2)x^{\cancel{4}}}{f(6)\cancel{x^3}} = -\infty$.

3.575. Εστω $h(x) = f_1(x) - f_2(x)$ η οποία είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών. Επειδή η εξίσωση $f_1(x) = f_2(x)$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$ είναι $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε η συνάρτηση $h(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Εστω $h(x) < 0$ τότε $f_1(x) < f_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$ (1). Θέτουμε όπου x το $f_1(x)$ και είναι $f_1(f_1(x)) < f_2(f_1(x)) \Leftrightarrow (f_1 \circ f_1)(x) < (f_2 \circ f_1)(x)$ όμως από την υπόθεση (2) $(f_2 \circ f_1)(x) = (f_1 \circ f_2)(x)$ άρα $(f_1 \circ f_1)(x) < (f_1 \circ f_2)(x)$ (3). Στην (1) θέτουμε όπου x το $f_2(x)$ οπότε: $f_1(f_2(x)) < f_2(f_2(x)) \Leftrightarrow (f_1 \circ f_2)(x) < (f_2 \circ f_2)(x)$ (4). Από (3) και (4) προκύπτει ότι $(f_1 \circ f_1)(x) < (f_2 \circ f_2)(x)$. Ομοίως εργαζόμαστε και στην περίπτωση που $h(x) > 0$.

Άρα $(f_1 \circ f_1)(x) \neq (f_2 \circ f_2)(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η εξίσωση $(f_1 \circ f_1)(x) = (f_2 \circ f_2)(x)$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

3.576. Εστω $g(x) = f(x) + \ln x$, $x \in (0, +\infty)$. Είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, οπότε υπάρχει κάποιος πολύ μεγάλος θετικός αριθμός β, τέτοιος ώστε $g(\beta) > 0$. Είναι $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$, οπότε υπάρχει κάποιος θετικός αριθμός $\alpha \in (0,1)$, τέτοιος ώστε $g(\alpha) < 0$. Από το Θ.Β η $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α, β) που είναι θετικός αριθμός.

3.577. Εστω ότι υπάρχει ένα $\rho \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f(\rho) > 0$. Τότε η f είναι συνεχής στο $[0,\rho] \subseteq [0,2]$ και $f(\rho)f(0) < 0$. Ομοίως και $f(\rho)f(2) < 0$. Άρα από το Θ. Bolzano θα υπάρχουν $x_1 \in (0,\rho)$ και $x_2 \in (\rho, 2)$ με $f(x_1) = f(x_2) = 0$ που είναι άτοπο αφού η f είναι 1–1.

Άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

3.578. **α)** Εστω ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) = 0$. Τότε $(f(x_0) - x_0)(f(x_0) + x_0) = x_0^2 + 1 \Leftrightarrow -x_0^2 = x_0^2 + 1 \Leftrightarrow$ $2x_0^2 = -1$ που είναι αδύνατο.

β) Επειδή $f(x) \neq 0$ και η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

γ) $(f(x) - x)(f(x) + x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow f^2(x) - x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow f^2(x) = 2x^2 + 1 \Leftrightarrow$

$f(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$ ή $f(x) = -\sqrt{2x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

3.579. Η f είναι συνεχής στο $[0,5]$ ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $f(0) = -2$ και $f(5) = 40 - 2\sigma\upsilon\nu 5\pi = 42$. Παρατηρούμε ότι $f(0) < 1 < f(5)$, άρα λόγω θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,5)$, τέτοιο ώστε: $f(x_0) = 1$.

3.580. $f(1)=-1,\ f(2)=256,\ f(1)<100<256$ και f συνεχής στο $[1,2]$,
άρα υπάρχει $x_0\in(1,2): f(x_0)=100$

3.581. Εστω ότι η f είναι συνεχής στο $[2,3]$. Επειδή $f(2)\neq f(3)$, σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ. η f παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(2)=2$ και $f(3)=3$, επομένως και την τιμή $\frac{7}{3}$.

Δηλαδή υπάρχει $x_0\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\frac{7}{3}$.

Για $x=x_0$, η (1) γίνεται: $f^2(x_0)-3f(x_0)=x_0^2-2x_0 \Leftrightarrow \frac{49}{9}-7=x_0^2-2x_0 \Leftrightarrow$
$9x_0^2-18x_0+14=0$ η οποία είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, άρα η f δεν είναι συνεχής.

3.582. Αν η f ήταν συνεχής στο, τότε επειδή $f(1)=3<4<f(2)=5$, λόγω του ΘΕΤ υπάρχει $x_0\,(1,2)$: $f(x_0)=4$ που είναι άτοπο.

3.583. $f^2(x)-3f(x)+2=0 \Leftrightarrow (f(x)-1)(f(x)-2)=0 \Leftrightarrow f(x)=1$ ή $f(x)=2$
Σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ. αν υπήρχαν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=1$ και $f(x_2)=2$ τότε επειδή $1<\frac{3}{2}<2$ και η f είναι συνεχής, υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}: f(x_0)=\frac{3}{2}$, τότε $f^2(x_0)-3f(x_0)+2=0 \Leftrightarrow$
$\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+2=0 \Leftrightarrow 9-18+8=0$ που είναι άτοπο. Άρα $f(x)=1,\ x\in\mathbb{R}$ ή $f(x)=2,\ x\in\mathbb{R}$.

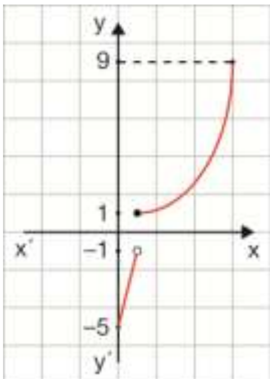
3.584. Είναι $f^2(x)-5f(x)+4=0 \Leftrightarrow [f(x)-1][f(x)-4]=0 \Leftrightarrow f(x)=1$ ή $f(x)=4$.
Σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ. αν υπήρχαν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=1$ και $f(x_2)=4$ τότε επειδή $1<3<4$ θα υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ ή $x_0\in(x_2,x_1)$ με $f(x_0)=3$. Στη σχέση που ισχύει για $x=x_0$ έχουμε: $f^2(x_0)-5f(x_0)+4=0 \Leftrightarrow 3^2-5\cdot 3+4=0 \Leftrightarrow -2=0$ άτοπο.
Άρα $f(x)=1,\ x\in\mathbb{R}$ ή $f(x)=4,\ x\in\mathbb{R}$.

3.585. **α)** Παρατηρούμε ότι: $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} x^2=1,\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(4x-5)=-1$
Επομένως η f δεν είναι συνεχής στο $x_0=1$. Άρα δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Ε.Τ.

β) Αφού δεν εφαρμόζεται το Θ.Ε.Τ. για την f μπορεί να μην παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ της ελάχιστης τιμής -5 και της μέγιστης τιμή της 9. Παρατηρούμε ότι το $0\in(-5,9)$ όμως (σχηματικά) δεν υπάρχει $x_0\in[0,3]$ ώστε $f(x_0)=0$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 4x-5=0 \\ 0\le x\le 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=\frac{5}{4} \\ 0\le x\le 1 \end{Bmatrix}$, άτοπο.

$f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x^2=0 \\ 1<x\le 3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=0 \\ 1<x\le 3 \end{Bmatrix}$, άτοπο



3.586. Στην (1) $x=8$ είναι $f(8)\cdot f(f(8))=1 \Leftrightarrow 7\cdot f(7)=1 \Leftrightarrow f(7)=\frac{1}{7}$.

Είναι $\frac{1}{7}<4<7 \Leftrightarrow f(7)<4<f(8) \overset{\Theta.E.T.}{\Leftrightarrow} \exists \xi \in (7,8): f(\xi)=4$.

Άρα στην (1) για $x=\xi$ είναι $f(\xi)\cdot f(f(\xi))=1 \Leftrightarrow 4f(4)=1 \Leftrightarrow f(4)=\frac{1}{4}$.

3.587. Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική με $g(0)=\kappa\cdot\lambda$ και $g(1)=1-\kappa-\lambda$.

Είναι $\frac{g(0)+g(1)}{2}=\frac{\kappa\lambda+1-\kappa-\lambda}{2}=\frac{-\kappa(1-\lambda)+(1-\lambda)}{2}=\frac{(1-\lambda)(1-\kappa)}{2}$

Όμως $g(0)<\frac{g(0)+g(1)}{2}<g(1)$ ή $g(1)<\frac{g(0)+g(1)}{2}<g(0)$, άρα σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ.

υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $g(\xi)=\frac{g(0)+g(1)}{2} \Leftrightarrow g(\xi)=\frac{(1-\lambda)(1-\kappa)}{2}$.

3.588. Αφού η f είναι συνεχής στο $[1,8]$ θα ισχύει $f(1)=\lim_{x\to1}f(x)$.

Όμως $\lim_{x\to1}\frac{6x^2-6x}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{6x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=3$, $\lim_{x\to1}\frac{6(\sqrt{x}-1)}{(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{6\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}=3$

Άρα και $\lim_{x\to1}f(x)=3=f(1)$ (2). Οπότε $f(1)\cdot f(8)=27 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} f(8)=9$. Εφαρμόζουμε για την f το Θ.Ε.Τ. στο $[1,8]$. Η f συνεχής στο $[1,8]$, $f(1)\neq f(8)$ και $3<7<9$, δηλαδή $f(1)<7<f(8)$.

Άρα από Θ.Ε.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,8)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=7$.

3.589. Επειδή $f(\alpha)f(\beta)>0$ και $\gamma f(\alpha)+\delta f(\beta)=0$, οι γ,δ είναι ετερόσημοι ή $\gamma=\delta=0$.

Αν $\gamma=\delta=0$, τότε το μηδέν ανήκει στο σύνολο τιμών της, οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$.

Αν οι γ,δ είναι ετερόσημοι τότε: λόγω του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει $x_1\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=\gamma$ και $x_2\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=\delta$. Έστω ότι $x_1<x_2$.

Είναι $f(x_1)f(x_2)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής, από το Θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)\subseteq(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$.

3.590. Αν η f δεν είναι σταθερή τότε το σύνολο τιμών της θα είναι της μορφής $[m,M]$ που είναι άτοπο. Άρα η f είναι σταθερή και επειδή $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, είναι $f(x)=\frac{1}{2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

3.591. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ θα υπάρχουν m,M, τέτοιοι ώστε:

$m\le f(x)\le M$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Οπότε: $m\le f(x_1)\le M \Leftrightarrow \kappa m\le \kappa f(x_1)\le \kappa M$

$m\le f(x_2)\le M \Leftrightarrow \lambda m\le \lambda f(x_2)\le \lambda M$

$m\le f(x_3)\le M \Leftrightarrow \mu m\le \mu f(x_3)\le \mu M$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει:

$(\kappa+\lambda+\mu)m \le \kappa f(x_1)+\lambda f(x_2)+\mu f(x_3) \le (\kappa+\lambda+\mu)M \Leftrightarrow$

$4m \le \kappa f(x_1)+\lambda f(x_2)+\mu f(x_3) \le 4M \Leftrightarrow m \le \dfrac{\kappa f(x_1)+\lambda f(x_2)+\mu f(x_3)}{4} \le M$.

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε:

$f(\xi) = \dfrac{\kappa f(x_1)+\lambda f(x_2)+\mu f(x_3)}{4} \Leftrightarrow \kappa f(x_1)+\lambda f(x_2)+\mu f(x_3) = 4f(\xi)$.

3.592. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$, είναι $f(\beta) \le f(x) \le f(\alpha)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

Οπότε: $f(\beta) < f(\alpha) = f(\alpha)$, $f(\beta) = f(\beta) < f(\alpha)$, $f(\beta) < f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) < f(\alpha)$,

άρα $3f(\beta) < f(\alpha)+f(\beta)+f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) < 3f(\alpha) \Leftrightarrow f(\beta) < \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)+f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}{3} < f(\alpha)$

Επειδή ο αριθμός $\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)+f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}{3}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f και η f είναι συνεχής, υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f(\xi) = \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)+f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}{3}$.

3.593. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[1,4]$ υπάρχουν m,M, τέτοια ώστε: $m \le f(x) \le M$ για κάθε $x \in [1,4]$.

Άρα $m \le f(1) \le M$, $m \le f(2) \le M \Leftrightarrow 3m \le 3f(2) \le 3M$,

$m \le f(3) \le M \Leftrightarrow 5m \le 5f(3) \le 5M$, $m \le f(4) \le M$, άρα και

$10m \le f(1)+3f(2)+5f(2)+f(4) \le 10M \Leftrightarrow m \le \dfrac{f(1)+3f(2)+5f(2)+f(4)}{10} \le M$

Επειδή ο αριθμός $\dfrac{f(1)+3f(2)+5f(2)+f(4)}{10}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f και η f είναι συνεχής, υπάρχει $x_0 \in [1,4]$ τέτοιο ώστε: $f(\xi) = \dfrac{f(1)+3f(2)+5f(2)+f(4)}{10}$.

3.594. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ θα υπάρχουν m,M, τέτοια ώστε: $m \le f(x) \le M$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

Οπότε: $m \le f(\alpha) \le M \Leftrightarrow \kappa m \le \kappa f(\alpha) \le \kappa M$, $m \le f(\beta) \le M \Leftrightarrow \lambda m \le \lambda f(\beta) \le \lambda M$ και

$\kappa m+\lambda m \le \kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta) \le \kappa M+\lambda M \Leftrightarrow m \le \dfrac{\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)}{\kappa+\lambda} \le M$.

Επειδή ο αριθμός $\dfrac{\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)}{\kappa+\lambda}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f και η f είναι συνεχής, υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f(\xi) = \dfrac{\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)}{\kappa+\lambda}$.

3.595. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[\alpha,\beta\right]$, υπάρχουν m,M, τέτοια ώστε:

$m \le f(x) \le M$ για κάθε $x \in \left[\alpha,\beta\right]$.

Οπότε: $m \le f(\alpha) \le M$, $m \le f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \le M \Leftrightarrow 2m \le 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \le 2M$,

$m \le f(\beta) \le M \Leftrightarrow 3m \le 3f(\beta) \le 3M$ άρα και

$$6m \le f(\alpha)+f(\beta)+f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \le 6M \Leftrightarrow m \le \frac{1}{6}\left(f(\alpha)+f(\beta)+f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right) \le M$$

Επειδή ο αριθμός $\frac{1}{6}\left(f(\alpha)+f(\beta)+f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f και η f είναι συνεχής υπάρχει $\xi \in \left[\alpha,\beta\right]$ τέτοιο ώστε: $f(\xi) = \frac{1}{6}\left(f(\alpha)+f(\beta)+f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)$.

3.596. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[\alpha,\beta\right]$, υπάρχουν m,M, τέτοια ώστε:

$m \le f(x) \le M$ για κάθε $x \in \left[\alpha,\beta\right]$.

Άρα $m \le f(x_1) \le M, m \le f(x_2) \le M, \dots, m \le f(x_\nu) \le M$

άρα και $\nu m \le f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_\nu) \le \nu M \Leftrightarrow m \le \frac{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_\nu)}{\nu} \le M$

Επειδή ο αριθμός $\frac{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_\nu)}{\nu}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f και η f είναι συνεχής υπάρχει $\xi \in \left[\alpha,\beta\right]$τέτοιο, ώστε: $f(\xi) = \frac{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_\nu)}{\nu}$.

3.597. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[0,1\right]$, υπάρχουν m,M, τέτοια, ώστε:

$m \le f(x) \le M$ για κάθε $x \in \left[0,1\right]$.

Άρα $m \le f\left(\frac{1}{5}\right) \le M$, $m \le f\left(\frac{2}{5}\right) \le M$, $m \le f\left(\frac{3}{5}\right) \le M$, $m \le f\left(\frac{4}{5}\right) \le M$

άρα και $4m \le f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right) \le 4M \Leftrightarrow m \le \frac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4} \le M$

Επειδή ο αριθμός $\frac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f και η f είναι συνεχής υπάρχει $\xi \in \left[0,1\right]$ τέτοιο ώστε: $f(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$.

3.598. **α)** Η f είναι συνεχής στο $\left[6,8\right]$. Από το Θ. μέγιστης και ελάχιστης τιμής, η f θα έχει ελάχιστο $m = f(x_1)$ και μέγιστο $M = f(x_2)$, όπου $x_1, x_2 \in \left[6,8\right]$.

β) Επομένως, θα ισχύει $m \le f(x) \le M$ για κάθε $x \in \left[6,8\right]$.

Άρα: $m^3 = m \cdot m \cdot m \le f(6)f(7)f(8) \le M \cdot M \cdot M = M^3 \quad (1)$.

γ) Από την (1) προκύπτει: $0<m\le\sqrt[3]{f(6)f(7)f(8)}\le M$. Οπότε, από το Θ.Ε.Τ. έχουμε ότι η εξίσωση: $f(x)=\sqrt[3]{f(6)f(7)f(8)}\Leftrightarrow f^3(x)-f(6)f(7)f(8)=0$ έχει λύση στο $[x_1,x_2]\subseteq[6,8]$.

3.599. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, υπάρχουν m,M, τέτοια ώστε:

$0\le m\le f(x)\le M$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Άρα $m\le f(x_1)\le M, m\le f(x_2)\le M,.....,m\le f(x_\nu)\le M$

άρα και $m^\nu\le f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot...\cdot f(x_\nu)\le M^\nu\Leftrightarrow m\le\sqrt{f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot...\cdot f(x_\nu)}\le M$

Επειδή ο αριθμός $\sqrt{f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot...\cdot f(x_\nu)}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f και η f είναι συνεχής υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε: $f(\xi)=\sqrt{f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot...\cdot f(x_\nu)}$.

3.600. **α)** Εστω m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της g στο $[\alpha,\beta]$ τότε το σύνολο τιμών της g είναι το διάστημα $[m,M]$ και αφού $g(x)\ge0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ τότε $m,M\ge0$.

Για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ είναι $m\le g(x)\le M$, για $x=x_1$ έχουμε $m\le g(x_1)\le M$, ενώ για $x=x_2$ είναι $m\le g(x_2)\le M$. Οπότε $m^2\le g(x_1)\cdot g(x_2)\le M^2\Leftrightarrow m\le\sqrt{g(x_1)\cdot g(x_2)}\le M$ και από το Θ.Ε.Τ. υπάρχει $\xi_1\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $g(\xi_1)=\sqrt{g(x_1)\cdot g(x_2)}$.

β) Είναι $m\le\dfrac{g(x_1)+g(x_2)}{2}\le M$ γιατί $\dfrac{g(x_1)+g(x_2)}{2}$ είναι μεταξύ των $g(x_1),g(x_2)$.

Άρα σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ. υπάρχει $\xi_2\in[\alpha,\beta]$: $g(\xi_2)=\dfrac{g(x_1)+g(x_2)}{2}$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $\dfrac{g(x_1)+g(x_2)}{2}\ge\sqrt{g(x_1)\cdot g(x_2)}$. Πράγματι:

$g(x_1)+g(x_2)\ge2\sqrt{g(x_1)\cdot g(x_2)}\Leftrightarrow[g(x_1)+g(x_2)]^2\ge4g(x_1)\cdot g(x_2)\Leftrightarrow$

$g^2(x_1)+2g(x_1)\cdot g(x_2)+g^2(x_2)\ge4g(x_1)\cdot g(x_2)\Leftrightarrow$

$g^2(x_1)-2g(x_1)\cdot g(x_2)+g^2(x_2)\ge0\Leftrightarrow(g(x_1)-g(x_2))^2\ge0$ που ισχύει.

3.601. **α)** Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Τότε: $e^{f(x_1)}=e^{f(x_2)}$ και $f(x_1)+e^{f(x_1)}=f(x_2)+e^{f(x_2)}\Leftrightarrow$ $5-4x_1=5-4x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$. Άρα η f είναι 1–1 και αντιστρέφεται.

β) $(f\circ f)(x)-f(5-10x^3)=0\Leftrightarrow f(f(x))=f(5-10x^3)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}$

$f(x)=5-10x^3\Leftrightarrow f(x)+10x^3-5=0\ (1)$.

Αρκεί η (1) να έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$. Εστω $g(x)=f(x)+10x^3-5$.

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Είναι: $g(0)=f(0)-5$.

Όμως $f(0)+e^{f(0)}=5\Leftrightarrow f(0)=5-e^{f(0)}$, οπότε $g(0)=5-e^{f(0)}-5=-e^{f(0)}<0$.

$g(1)=f(1)+10-5>0$. Δηλαδή $g(0)\cdot g(1)<0$, οπότε από το Θ. Bolzano η εξίσωση $g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=5-10x^3$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

3.602. **α)** Για $x \neq 0$ είναι $f(x) = \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} - x\eta\mu\frac{1}{x}$. Είναι $\left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right| = |x|\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq x\eta\mu\frac{1}{x} \leq |x|$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}|x| = \lim\limits_{x\to 0}(-|x|) = 0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right) = 0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$ είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Άρα $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} - x\eta\mu\frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$.

β) Για $x \neq 0$ είναι $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right| \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \leq \frac{1}{|x|}$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right) = 0$

άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$. Οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} - \frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right) = 0 - 0 - 1 = -1$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u} = 1$.

γ) Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1 < 0$, υπάρχει $\gamma \in (1, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(\gamma) < 0$

και $f\left(\frac{1}{\pi}\right) = \pi\left(1 - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{\pi}\right) > 0$ και η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{\pi}, \gamma\right]$, λόγω του θεωρήματος

Bolzano η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{\pi}, \gamma\right)$.

3.603. **α)** Επειδή τα ρ_1, ρ_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + x + \lambda = 0$ ισχύει:

$\rho_1 + \rho_2 = -1$ και $\rho_1 \cdot \rho_2 = \lambda$. Είναι $|\rho_1| + |\rho_2| \geq 0$ και

$(|\rho_1| + |\rho_2|)^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + 2|\rho_1||\rho_2| = (\rho_1 + \rho_2)^2 - 2\rho_1\rho_2 + 2|\rho_1\rho_2| =$

$(-1)^2 - 2\lambda + 2|\lambda| = 1 - 2\lambda + 2|\lambda|$ οπότε $|\rho_1| + |\rho_2| = \sqrt{1 - 2\lambda + 2|\lambda|}$.

Αν $\lambda \geq 0$, τότε $f(\lambda) = |\rho_1| + |\rho_2| = \sqrt{1 - 2\lambda + 2\lambda} = 1$,

ενώ αν $\lambda < 0$, τότε $f(\lambda) = |\rho_1| + |\rho_2| = \sqrt{1 - 2\lambda - 2\lambda} = \sqrt{1 - 4\lambda}$, άρα $f(\lambda) = \begin{cases} \sqrt{1-4\lambda} & , \lambda \leq 0 \\ 1 & , \lambda > 0 \end{cases}$.

β) Είναι $\lim\limits_{\lambda\to 0^-} f(\lambda) = \lim\limits_{\lambda\to 0^+} f(\lambda) = 1$ οπότε η f είναι συνεχής στο $x = 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως σταθερή, η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

γ) Εστω $g(x) = f(x) + \ln f(x) + x - 2$ η οποία είναι συνεχής στο $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$.

Είναι $g(-2) = f(-2) + \ln f(-2) - 2 - 2 = 3 + \ln 3 - 4 = \ln 3 - 1 > 0$

και $g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + \ln f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} - 2 = 1 + \ln 1 + \frac{1}{2} - 2 = -\frac{1}{2} < 0$, δηλαδή $g(-2)g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$.

Λόγω του θεωρήματος Bolzano η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)+\ln f(x)=2-x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left(-2,\frac{1}{2}\right)$.

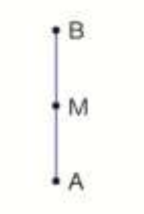
3.604. **α)** Εστω $h(x)=f(x)-\frac{1}{3}(10-4x)$, $x\in[-2,1]$.

Η h είναι συνεχής στο διάστημα $[-2,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Είναι:

$h(-2)=f(-2)-\frac{1}{3}(10-4\cdot(-2))=f(-2)-6>0$ και $h(1)=f(1)-\frac{1}{3}(10-4)=f(1)-2<0$,

δηλαδή $h(-2)h(1)<0$, οπότε λόγω του θεωρήματος Bolzano η εξίσωση $h(x)=0 \Leftrightarrow$ $f(x)=\frac{1}{3}(10-4x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-2,1)$.

β) Γνωρίζουμε ότι: $(MA)+(MB)\ge(AB)$ άρα η συνάρτηση g παίρνει την ελάχιστη τιμή της όταν το σημείο Μ βρίσκεται στην ευθεία ΑΒ. Επειδή $f(-2)>6$, για $x=-2$ είναι $y_M>y_A$ οπότε το σημείο Μ βρίσκεται πιο πάνω από το σημείο Α. Επειδή $f(1)<2$, για $x=1$ είναι $y_M<y_B$ οπότε το σημείο Μ βρίσκεται πιο κάτω από το σημείο Β. Άρα το Μ βρίσκεται μεταξύ των Α,Β. Τότε $(MA)+(MB)=(AB)=\sqrt{(-1-1)^2+(6-2)^2}=5$.



Άρα $g(x)=(MA)+(MB)\ge(AB)=5$, δηλαδή η g έχει ελάχιστη τιμή το 5.

3.605. **α)** Εστω $x_1,x_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1<x_2$, τότε $x_1^2-1<x_2^2-1$ και $2\eta\mu x_1<2\eta\mu x_2$,

άρα και $f(x_1)<f(x_2)$.

$$f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)==\left[f(0),f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=\left[-1,\frac{\pi^2}{4}+1\right]$$

β) $f(0)=-1$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}+1>0$ και Θ. Bolzano...

γ) Επειδή $f(0)<2<f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, υπάρχει $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, τέτοιο, ώστε $f(\xi)=2$.

3.606. **α)** Θέτουμε $1-\ln x=u \Leftrightarrow x=e^{1-u}$, τότε $f(u)=2u-2e^{1-u}$, άρα και $f(x)=2x-2e^{1-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Εύκολα f γνησίως αύξουσα.

γ) Για κάθε $x>1$ είναι $f(x)>f(1)=0$ και για κάθε $x<1$ είναι $f(x)<f(1)=0$.

δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ και $f(A)=\mathbb{R}$

3.607. **α)** Είναι $f^3(x)+f(x)=x^2+1$ και για $x=x_0$ είναι: $f^3(x_0)+f(x_0)={x_0}^2+1$

Με αφαίρεση κατά μέλη, προκύπτει: $f^3(x)-f^3(x_0)+f(x)-f(x_0)=x^2-{x_0}^2 \Leftrightarrow$

$(f(x)-f(x_0))(f^2(x)+f(x)\cdot f(x_0)+f^2(x_0)+1)=x^2-{x_0}^2$ (1)

Η παράσταση $f^2(x)+f(x)\cdot f(x_0)+f^2(x_0)$ είναι τριώνυμο ως προς $f(x)$ με $\Delta=f^2(x_0)-4f^2(x_0)\le 0$. Άρα $f^2(x)+f(x)\cdot f(x_0)+f^2(x_0)\ge 0$ και $f^2(x)+f(x)\cdot f(x_0)+f^2(x_0)+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Οπότε η (1) γίνεται: $f(x)-f(x_0)=\dfrac{x^2-x_0^{\,2}}{f^2(x)+f(x)\cdot f(x_0)+f^2(x_0)+1}$

Είναι $|f(x)-f(x_0)|=\dfrac{|x^2-x_0^{\,2}|}{|f^2(x)+f(x)\cdot f(x_0)+f^2(x_0)+1|}\le |x^2-x_0^{\,2}|\Leftrightarrow$

$-|x^2-x_0^{\,2}|\le f(x)-f(x_0)\le |x^2-x_0^{\,2}|$.

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\left(-|x^2-x_0^{\,2}|\right)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}|x^2-x_0^{\,2}|=0$, άρα λόγω του κριτηρίου παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Εστω ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Τότε υπάρχουν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$ τέτοια ώστε $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$. Τότε όμως λόγω του θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$. Όμως για $x=\xi$ είναι $f^3(\xi)+f(\xi)=\xi^2+1\Leftrightarrow \xi^2+1=0\Leftrightarrow \xi^2=-1$ που είναι αδύνατο. Επομένως η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

3.608. α) Για $x>0$ είναι $\dfrac{\sqrt[3]{2x+8}-\sqrt{x^2+4}}{x}\le f(x)\le \dfrac{\eta\mu\frac{x}{6}}{x}+x^5$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{2x+8}-\sqrt{x^2+4}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sqrt[3]{2x+8}-2}{x}-\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2\cancel{x}+\cancel{8}-\cancel{8}}{\cancel{x}\left(\left(\sqrt[3]{2x+8}\right)2+2\sqrt[3]{2x+8}+4\right)}-\frac{x^2+4-4}{x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}\right)=\frac{1}{6},\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu\frac{x}{6}}{x}\ \underset{u\to 0^+}{\overset{\frac{x}{6}=u}{=}}\ \lim_{u\to 0^+}\frac{\eta\mu u}{6u}=\frac{1}{6},$$

οπότε από Κ.Π. είναι και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\dfrac{1}{6}$. Επειδή η f είναι συνεχής είναι και $f(0)=\dfrac{1}{6}$.

β) Εστω $g(x)=f(x)-\eta\mu\dfrac{x}{6}-x^6$, $x\in[0,1]$. Είναι $g(0)=f(0)=\dfrac{1}{6}>0$,

$g(1)=f(1)-\eta\mu\dfrac{1}{6}-1\le 0$ γιατί $f(x)\le\dfrac{\eta\mu\frac{x}{6}}{x}+x^5$ για κάθε $x>0$. Άρα $g(0)g(1)\le 0$.

Αν $g(0)g(1)=0\Leftrightarrow g(1)=0\Leftrightarrow \lambda=1$.

Αν $g(0)g(1)<0$, τότε επειδή η g είναι συνεχής, από το Θ.Β υπάρχει $\lambda\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $g(\lambda)=0\Leftrightarrow f(\lambda)=\eta\mu\dfrac{\lambda}{6}+\lambda^6$.

Άρα γενικά υπάρχει τουλάχιστον ένα $\lambda\in(0,1]$ ώστε: $f(\lambda)=\eta\mu\dfrac{\lambda}{6}+\lambda^6$.

3.609. α) $\dfrac{f^2(x)-4}{e^x+1}=e^x\Leftrightarrow f^2(x)=e^{2x}+e^x+4\ne 0$, άρα $f(x)\neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο.

β) i. Επειδή $f(0)=-3$ είναι $f(x)<0$, άρα $f(x)=-\sqrt{e^{2x}+e^{x}+4}$, $x\in\mathbb{R}$.

ii. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+4^{x+2}}{3^{x}+4^{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\sqrt{e^{2x}+e^{x}+4}+4^{x+2}}{3^{x}+4^{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\cancel{\left(\frac{e}{4}\right)^{x}}^{0}\sqrt{1+\frac{1}{e^{x}}+\frac{4}{e^{2x}}}+16}{\cancel{\left(\frac{3}{4}\right)^{x}}^{0}+1}=16$$

3.610. α) Εύκολα αποδεικνύεται ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.
$\lim\limits_{x\to 0^{+}}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\left(\ln x+e^{x}+x-1\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x+e^{x}+x-1\right)=+\infty$,
άρα $g(A)=\mathbb{R}$

β) Επειδή $\alpha\in\mathbb{R}$ και η g είναι γνησίως αύξουσα, υπάρχει μοναδικός $x_0\in A=(0,+\infty)$ τέτοιος ώστε $g(x_0)=\alpha$.

γ) $g(x)=e\Leftrightarrow g(x)=g(1)\overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} x=1$

δ) $e^{\kappa^2+4}-e^{4\kappa}=\ln(4\kappa)-\ln\left(\kappa^2+4\right)+4\kappa-\kappa^2-4\Leftrightarrow g\left(\kappa^2+4\right)=g(4\kappa)\overset{g\ 1-1}{\Leftrightarrow}\kappa^2+4=4\kappa\Leftrightarrow\kappa=2$

3.611. α) Θ. Bolzano για την $h(x)=g(x)-x$ στο $[0,1]$.

β) Όπου x το $\frac{1}{x}$ προκύπτει: $\frac{1}{2x^2}\leq g\left(\frac{1}{x}\right)\leq\frac{1+x^2}{2x^2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\leq x^2\cdot g\left(\frac{1}{x}\right)\leq\frac{1+x^2}{2}$,

άρα $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cdot g\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{1}{2}$.

γ) $$\lim_{x\to 0}\frac{x^3\cdot g\left(\frac{1}{x}\right)+\eta\mu 3x}{x^2+\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(x^2\cdot g\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{\eta\mu 3x}{x}\right)}{x\left(x+\frac{\eta\mu x}{x}\right)}=\frac{7}{2}.$$

3.612. α) Επειδή για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ είναι $g(x)\in[\alpha,\beta]$ και $f(x)\in[\alpha,\beta]$, ορίζονται οι συναρτήσεις $f\circ g$, $g\circ f$.

β) Εστω $h(x)=f(g(x))-2x+g(f(x))$, $x\in[\alpha,\beta]$.
Είναι $h(\alpha)=f(g(\alpha))-2\alpha+g(f(\alpha))=\left[f(g(\alpha))-\alpha\right]+\left[g(f(\alpha))-\alpha\right]\geq 0$,
$h(\beta)=f(g(\beta))-2\beta+g(f(\beta))=\left[f(g(\beta))-\beta\right]+\left[g(f(\beta))-\beta\right]\leq 0$,
δηλαδή $h(\alpha)h(\beta)\leq 0$ ...

3.613. α) $f^2(x)+x^4=2x^2f(x)+e^{2x}\Leftrightarrow\left[f(x)-x^2\right]^2=e^{2x}\Leftrightarrow g^2(x)=e^{2x}\neq 0$, άρα $g(x)\neq 0$

και επειδή είναι συνεχής διατηρεί σταθερό πρόσημο.

β) $g(0)=f(0)=1>0$, άρα $g(x)>0$, οπότε $g(x)=\sqrt{e^{2x}}=e^{x}\Leftrightarrow f(x)=e^{x}+x^2$, $x\in\mathbb{R}$.

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}\left(1+e^x\right)}=0$

3.614. **α)** Επειδή $f(x)\neq 0$ και f συνεχής στο $[3,6]$ με $f(3)>0$ είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in[3,6]$.

β) Εστω $g(x)=f^2(x)-f(3)\cdot f(4)$, $x\in[3,4]$.

$g(3)=f(3)\big(f(3)-f(4)\big)$ και $g(4)=f(4)\big(f(4)-f(3)\big)$.

Δηλαδή $g(3)g(4)=-f(3)f(4)\big(f(3)-f(4)\big)^2\leq 0$.

Αν $g(3)g(4)=0\Leftrightarrow g(3)=0$ ή $g(4)=0$, τότε 3 ή 4 ρίζες της g.

Αν $g(3)g(4)<0$, τότε λόγω Θ. Bolzano...

Όμοια για την $h(x)=f^2(x)-f(5)f(6)$.

γ) Επειδή $f(3)\cdot f(4)=f(5)\cdot f(6)$ είναι $f^2(x_1)=f^2(x_2)$, άρα $f(x_1)=f(x_2)$ αφού $f(x)>0$, άρα η f δεν είναι 1–1.

3.615. **α)** $|iz-w|^2=|z|^2+|w|^2\Leftrightarrow (iz-w)(-i\bar{z}-\bar{w})=z\cdot\bar{z}+w\cdot\bar{w}\Leftrightarrow$

$-i^2\cdot z\cdot\bar{z}-iz\bar{w}+i\bar{z}w+w\cdot\bar{w}=z\cdot\bar{z}+w\cdot\bar{w}\Leftrightarrow z\cdot\bar{z}-iz\bar{w}+i\bar{z}w+w\cdot\bar{w}=z\cdot\bar{z}+w\cdot\bar{w}\Leftrightarrow$

$-iz\bar{w}+i\bar{z}w=0\Leftrightarrow z\bar{w}=\bar{z}w\Leftrightarrow\dfrac{z}{w}=\dfrac{\bar{z}}{\bar{w}}\Leftrightarrow\dfrac{z}{w}\in\mathbb{R}$.

β) $z\bar{w}-\bar{z}w=0\Leftrightarrow 2\mathrm{Im}(z\bar{w})=0\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z\bar{w})=0$, όμως $z\bar{w}=\alpha f(\alpha)-\beta f(\beta)+\big(\alpha\beta+f(\alpha)f(\beta)\big)i$

άρα $\alpha\beta+f(\alpha)f(\beta)=0\Leftrightarrow f(\alpha)f(\beta)=-\alpha\beta<0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, λόγω του θεωρήματος Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α,β).

γ) Αρκεί $|z|^2+|-iw|^2=|z+iw|^2\Leftrightarrow|z|^2+|i|^2|w|^2=|-i^2z+iw|^2\Leftrightarrow$

$|z|^2+|w|^2=|-i(iz-w)|^2\Leftrightarrow|z|^2+|w|^2=|-i|^2|iz-w|^2\Leftrightarrow|z|^2+|w|^2=|iz-w|^2$ που ισχύει.

3.616. Επειδή η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο με κέντρο $K(3,-4)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{2}$, είναι $(\alpha-3)^2+(\beta+4)^2=2$.

Εστω $f(x)=(\alpha-3)^2x^{2\nu}+(\beta+4)^2x^{\nu}-1$, $x\in[0,1]$.

Είναι $f(0)=-1<0$, $f(1)=(\alpha-3)^2+(\beta+4)^2-1=2-1=1>0$, δηλαδή $f(0)f(1)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, η εξίσωση $f(x)=0\Leftrightarrow(\alpha-3)^2x^{2\nu}+(\beta+4)^2x^{\nu}=1$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.